# Opcióelmélet

**Gáll József**
**Pap Gyula**



*Ez a jegyzet az M.C.A. van Zuijlen professzorral (Nijmegeni Egyetem, Hollandia) közösen írt angol nyelvű Option theory című munkánk fordításával és annak bővítésével jött létre.*

# Tartalomjegyzék

# Bevezetés

Az elmúlt évtizedekben a pénzügyi matematika és azon belül is elsősorban a sztochasztikus kalkulus eszközei fontos szerepet játszottak a modern pénzügy, és különösen az opcióelmélet nagyívű fejlődésében.

Az opciós szerződések a származtatott értékpapírok egy típusát képezik, hiszen azok értéke más értékpapírok értékétől függ. Például ilyen egy adott részvényre vonatkozó európai vételi opció, mely a tulajdonosát azzal a joggal ruházza fel, hogy egy jövőbeli rögzített időpontban egy rögzített áron vásárolhat egy részvényt. Az opcióelmélet alapvető feladata az opció ésszerű árának a meghatározása, azaz az alábbi kérdésre keressük a választ: *„Mennyit lennénk hajlandóak fizetni egy ilyen szerződésért?”* Erre a kérdésre először Black és Scholes majd Cox Ross és Rubinstein adtak választ híres munkáikban ([Black and Scholes 73] és [Cox, Ross and Rubinstein 79]), amelyek a gyakorlatban is alkalmazásra kerültek megjelenésük után röviddel.

A legfőbb célunk ebben a jegyzetben az, hogy ismertessük az opciós ügyleteket és vezessünk le opcióárazási formulákat egy általános matematikai modellben, mindezt egy egységes terminológiában, amelyhez alapot elsősorban a [Harrison and Pliska 81], [Shiryaev, Kabanov, Kramkov, Mel'nikov I. 94] és [Shiryaev, Kabanov, Kramkov, Mel'nikov II. 94] munkák szolgáltattak.

Ezt a célt kitűzve, tárgyaljuk a diszkrét idejű $(B, S)$ piacok fogalmát (ld. 2-4., 6-7. Fejezetek), melyeken két értékpapírral kereskednek: az egyik rizikómentes, melyet kötvénynek fogunk nevezni, míg a másik már véletlentől függő, azaz rizikós, melyet pedig részvénynek fogunk nevezni. Számos, ilyen piacokkal kapcsolatos fogalmat kívánunk ismertetni, például: önfinanszírozó stratégiák, fedezeti stratégiák, piaci arbitrázs. Szükséges és elégséges feltételeket fogalmazunk meg két fontos piaci jellemzőre: az egyik a piaci arbitrázs (3. Fejezet), a másik a piac teljessége (4. Fejezet). Az opciós ügyletek több típusával ismertetjük meg az olvasót (5. Fejezet): amerikai, európai és bizonyos egzotikus, más szempontból vételi és eladási opciókkal. Az megértéshez szükséges közgazdasági fogalmakat ismertetjük, továbbá példákon át azokat bemutatjuk.

Látni fogjuk, hogy az opcióárazás problémáját általánosabban is kezelhetjük, mint feltételes követelések árazási problémáját. Ezért a feltételes kö-





vetelésekre kapott árformulákból kapjuk majd az egyes ismert opcióárazási formulákat.

A módszerek alapját martingálelmélet, és különösen a folytonos idejű piacok esetén sztochasztikus kalkulus jelenti. Az egyszerűbb diszkrét idejű modellben használt módszerek és eredmények megértése után látni fogjuk, hogy számos helyen alkalmazhatóak analóg ötletek és módszerek a folytonos idejű modellben is.

Igaz, azt is meg kell itt említenünk, hogy az alapvető diszkrét idejű eredményekhez nem feltétlenül szükséges a valószínűségszámítási megközelítés (ld. [Dzhaparidze and Zuijlen 96]).

A jegyzet a folytonos idejű modell egy rövidebb áttekintésével fejeződik be (ld. 7. Fejezet).

# 1. Fejezet

# Értékpapírpiacok

## 1.1. Általános feltételek

Mindenekelőtt ismertetjük azokat a piactípusokat, amelyeket a továbbiakban vizsgálni kívánunk. Olyan pénzügyi piacokkal fogunk foglalkozni, amelyeken minden piaci szereplő (vagy résztvevő) (például kereskedők, spekulánsok, befektetők) két pénzügyi eszközzel (értékpapírral) kereskedhetnek minden időpillanatban. Ezen értékpapírok egyikét *részvény*nek, míg a másikat *kötvény*nek fogjuk nevezni. Feltesszük, hogy a piaci szereplőknek a részvényekkel illetve kötvényekkel való kereskedés során nem kell *tranzakciós költség*et fizetni.

A piacot egy véges $[0, T]$ $(T \in \mathbb{R}^+)$ időintervallumon fogjuk vizsgálni, ahol a 0 felel meg a *jelenlegi időpont*nak, a $T$ pedig az ún. *lejárati idő*t jelöli. Az idő szempontjából megkülönböztetünk diszkrét és folytonos idejű modelleket. Az első fejezetekben diszkrét idejű modellekkel fogunk foglalkozni. Ebben az esetben feltesszük azt, hogy adott az időpillanatoknak egy $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T$ véges sorozata. Ezeket az időpontokat *kereskedési idő*nek fogjuk nevezni, ezek jelölik azon időpontokat, amikor az új árak a piacon életbe lépnek, ismertté válnak.

A kötvény egy *kockázatmentes* eszköz, hiszen a $B$-vel jelölendő ára az időnek és a kamatlábnak egy determinisztikus függvénye lesz, ahol a kamatlábról feltesszük, hogy ismert és nem véletlen (de nem szükségképpen konstans) a $[0, T]$ időintervallumban. Közgazdasági megközelítésben a kötvények olyan követelések, amelyeket általában az állam, a vállalatok, a bankok és egyéb pénzügyi intézmények bocsátanak ki annak érdekében, hogy forrásaikat növeljék. Ilyenek például az államkötvények, kincstárjegyek, vállalati kötvények.

A kötvénnyel ellentétben a részvény egy *kockázatos* eszköz, amelynek $S$-sel jelölt árát véletlentől függőnek tekintjük, azaz sztochasztikus folyamatnak, mely a $[0, T]$ intervallumon van definiálva. Részvényeket általában bizonyos vállalatok (pl. részvénytársaságok) bocsátanak ki a működésükhöz szükséges





tőke biztosításához.

Fontos azonban hangsúlyozni, hogy az következőkben leírt matematikai modellekben mindössze annyit szükséges feltennünk, hogy az egyik piaci eszköz ára véletlenül változzon, míg a másiké ne legyen véletlentől függő. Ezért elméletünkben nem csak a hagyományos közgazdasági értelemben vett részvények tehetnek eleget a részvény difiníciójának, hanem külföldi valuták és egyéb (pénzügyi) eszközök is, amelyek árfolyamata a fentiekben leírt módon modellezhető. A hagyományos értelemben vett részvények esetén elsősorban a piac aktuális állapotának váltakozása illetve a vállalat termelési tevékenysége és annak változásai okozzák a részvény árának véletlen mozgását. Hasonlóan, az elméletünk kötvényfogalma sem egyezik meg a közgazdasági kötvényfogalommal. Tekinthetünk kötvénynek az elméletünkben minden olyan eszközt, amelynek a vizsgált időszakra vonatkozó árfolyamata ismert. Ilyen eszköz lehet a nemzeti valuta, amelyben a részvények árait kifejezzük, s amelynek kamatlába az a kamatláb, amely pénzkölcsön esetén a fizetendő kamatot meghatározza.

A továbbiakban a kötvény illetve a részvény $t_n$ $(n = 0, \ldots, N)$ időpillanatbeli árát rendre $B_n$ illetve $S_n$ fogja jelölni.

Feltesszük azt is, hogy a *kockázatmentes kamatláb*ra kölcsön felvétele és kölcsön adása egyaránt lehetséges. Itt megjegyezzük, hogy általában a kötvény árfolyamatát a kamatlábbal határozzuk meg (adjuk meg), vagy éppen fordítva. Nevezetesen, az esetek többségében a kötvény árát a $t_n$ időpontban $(n = 1, \ldots, N)$ $B_n = (1 + r_n)B_{n-1}$ alakban adjuk meg, ahol $r_n$ a $(t_{n-1}, t_n]$ időszakhoz tartozó kamatláb. Ha azonban adott a kötvény árfolyamata, akkor az $r_n := B_n/B_{n-1} - 1$ $(n = 1, \ldots, N)$ formulával definiálhatjuk a kamatlábat. Úgy is megfogalmazhatjuk feltételünket, hogy kötvényeket lehet kölcsönbe adni és venni egyaránt. Fontos hangsúlyozni, hogy a kötvény ára csak a kereskedési időpontokban változik, azaz az ár konstans $B_n$ a $[t_n, t_{n+1})$ időintervallum alatt (ahol $(n = 0, \ldots, N - 1)$) és a $B_{n+1}$ ár $(n = 1, \ldots, N)$ a $t_{n+1}$ időpontban lép érvénybe.

Hasonló feltételt fogalmazunk meg a részvényekre is. Feltesszük, hogy részvények fedezetlen eladása megengedett. Ez azt jelenti, hogy eladhatunk részvényeket egy $[0, T]$-beli időpontban úgy, hogy a részvényeket csak a lejárati időpontban $(T)$ kell átadni. Úgy is fogalmazhatunk, hogy $S_t$ összegben pénzkölcsönt kapunk a $t \in [0, T]$ időpontban (amely megfelel egy részvény értékének), de ez esetben a kölcsön értéke részvényegységben van kifejezve, azaz a $T$ időpontban egy részvény árát kell visszafizetni, amely megfelel az $S_T$ pénzösszegnek. Tehát a fedezetlen részvényeladást részvénykölcsönként is értelmezhetjük.

## 1.2. Kereskedés a piacon

A piac szereplői azok, akik részvényeket vagy kötvényeket adnak el vagy vásárolnak meg. Amennyiben egy piaci szereplő $\beta$ egységnyi ($\beta \in \mathbb{R}$) kötvényt és $\gamma$ egységnyi ($\gamma \in \mathbb{R}$) részvényt birtokol, akkor másszóval azt mondjuk, hogy a $(\beta, \gamma)$ párral definiált $\pi$ *portfóliót* birtokolja.

Tegyük fel, hogy egy befektető $X_0 \geq 0$ kezdőtőkével rendelkezik, amelyet a jövőben növelni szeretne. Ezért tőkéjét részvényekbe és kötvényekbe fekteti, kialakítva ezzel egy $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ portfóliót, melyre $X_0 = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0$ a $t_0 = 0$ időpontban, ahol $S_0$ és $B_0$ a részvény és a kötvény kiindulási árai. Ezután a $(t_0, t_1)$ időintervallum alatt a befektető átrendezheti portfólióját kötvények eladásával és részvények vásárlásával, vagy éppen fordítva, s ezzel létrehozhat egy új $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$ portfóliót. A portfólió átrendezésére vonatkozóan kettő megszorítást teszünk:

- egyrészt feltételezzük, hogy az átrendezést csak a $t_1$ időpont előtt rendelkezésre álló információk alapján, azaz a $B_0$ és $S_0$ árak alapján végezte el a befektető,
- másrészt feltesszük, hogy nem lehetséges sem a tőkéből való pénzelvonás (pl. adók vagy tranzakciós költségek miatt), sem a tőkéhez pénz hozzátétele (pl. részvények után kapott osztalék miatt).

A fentiek alapján az átrendezett portfólió ki kell, hogy elégítse az

$$X_0 = \beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0$$

egyenletet. A fenti feltételek esetén a befektetési stratégiát *önfinanszírozó*nak nevezzük.

A $t_1$ időpontban az új árakat bejelentik és azok életbe lépnek a piacon, ezért az ekkor $\pi_1$ portfóliót birtokló befektető által realizált új portfólióérték

$$X_1 = \beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1.$$

Látható, hogy a részvényár véletlen változásának következtében tőkeveszteség jelentkezhet (ha $X_0 > X_1$), de ugyanakkor nyereséget is realizálhat a befektető (ha $X_0 < X_1$).

Ha a fentiekhez hasonlóan a befektető folytatja a *stratégiáját*, akkor egy tetszőleges $t_{n-1}$ kereskedési időpontban a $\pi_{n-1} = (\beta_{n-1}, \gamma_{n-1})$ portfólió birtokosa lesz, amelynek értéke a $t_{n-1}$-beli $B_{n-1}$ és $S_{n-1}$ árak ismeretében $X_{n-1} = \beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1}$. A $t_n$ kereskedési időpont előtt az addig elérhető információk birtokában a befektető ismét átrendezheti a portfólióját, kialakítva ezzel egy új $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ portfóliót úgy, hogy az eleget tesz az *önfinanszírozás*



*feltételé*nek, tehát $X_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}$. A $t_n$ időpontban az új árak bejelentésekor ez azt jelenti, hogy a befektető az $X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$ tőkeértéket fogja realizálni. Egy ilyen stratégia esetén az $\{X_n\}_{n=0}^N$ sorozatot a stratégiához tartozó értékfolyamatnak fogjuk nevezni.

Fontos kiemelnünk, hogy a részvények és a kötvények árai nem vehetnek fel negatív értéket, ám a portfólióban lehetnek negatív értékek. Egy negatív $\beta$ érték egy kölcsönnek felel meg. Ez azt jelenti, hogy egy $t$ időpontban kapott $x$ összegű kölcsön esetén ($t \in [t_n, t_{n+1})$, $0 \leq n \leq N-1$) a kölcsönt felvevőnek $xB_m/B_n$ összeget kell visszafizetnie, ha kötelezettségének a $t_m$ időpontban tesz eleget (ahol $n < m \leq N$). A $\gamma$ negatív értékei pedig fedezetlen részvényeladásoknak felelnek meg. Végül megjegyezzük, hogy további feltétel lehetne az, hogy az $\{X_n\}_{n=0}^N$ értékfolyamat ne vehessen fel negatív értékeket, hiszen ez valós gazdasági helyzetben igen természetes feltételnek tűnik ($X_n < 0$ ugyanis a befektető csődjének felelne meg). Azonban látni fogjuk a 3. és 4. Fejezetekben, hogy ezt nem szükséges külön megkövetelni a későbbiekben definiált modelljeinkben.

A matematikai modellben az információ áramlását $\sigma$-algebráknak egy monoton növekvő rendszere, még pontosabban fogalmazva egy filtráció fogja reprezentálni (ld. 2.1.1. Definíció): minél több idő telik el (azaz minél nagyobb az $n$ index értéke $t_n$-ben), annál több információhoz juthatunk és ezért az adott időpontban lehetséges eseményeket tartalmazó $\sigma$-algebra annál gazdagabb lesz.

## 1.3. Példa: bináris piacok

A *bináris piac* egy egyszerű típusa a diszkrét idejű piacoknak. A bináris piacon a $B_0, B_1, \ldots, B_N$ kötvényárakat

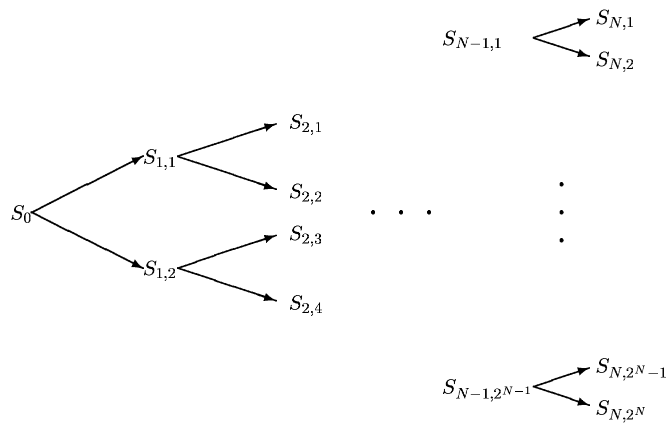
$$B_n = (1 + r_1)(1 + r_2) \ldots (1 + r_n) B_0 \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

formulával adjuk meg, azaz

$$B_n = (1 + r_n) B_{n-1} \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

ahol $N$ a kereskedési idők száma, $r_n$ pedig $(t_{n-1}, t_n]$ időintervallumhoz tartozó kamatlábat jelöli.

A részvény árfolyamatának induló értéke $S_0$, majd minden kereskedési időpontban két lehetséges érték közül veszi fel az egyiket véletlenül. A két lehetséges érték egyike rendszerint az ár növekedéséhez vezet, míg a másik árcsökkenést eredményez. A részvény árának fejlődését egy irányított bináris fával szemléltethetjük (ld. 1.1 Ábra), amelynek gyökere $S_0$ és az $n$-ik réteg minden csúcsa ($n = 0, \ldots, N$) a $t_n$ időpontbeli lehetséges árak egyikének felel




1.1. Ábra: *A részvény árfolyamata bináris piacon*
Minden $n$ $(0 \leq n \leq N)$ esetén $\{S_{n,k} \mid k = 1, \dots, 2^n\}$ a fa $n$-edik *rétege.*

meg. A fa minden csúcsából –a fa levelei kivételével– két irányított él indul ki, amelyek az árnak a következő kereskedési időponthoz tartozó két lehetséges ugrását szemléltetik. Tehát a $t_n$ időpontban a lehetséges $2^n$ ár egyike fog bekövetkezni; a $2^N$ levél pedig az árfolyamat $2^N$ trajektóriájának feleltethető meg, amelyek az ár $[0, T]$ időintervallum alatti fejlődését írják le.

Ezt a modellt általánosan nemhomogén bináris modellnek is szokták nevezni, hangsúlyozva, hogy ennek speciális eseteként áll elő az ún. homogén modell. A homogén modellben a kamatláb konstans a vizsgált időintervallumon, a részvények hozamai (azaz $S_n/S_{n-1} - 1$, $n = 1, \dots, N$) –amelyek mindegyike valószínűségi változó– pedig függetlenek és azonos eloszlásúak. Ezeket a feltételeket a következőképpen írhatjuk le. Adott egy $r \geq 0$ konstans és a $-1 < a < b$ együtthatók úgy, hogy

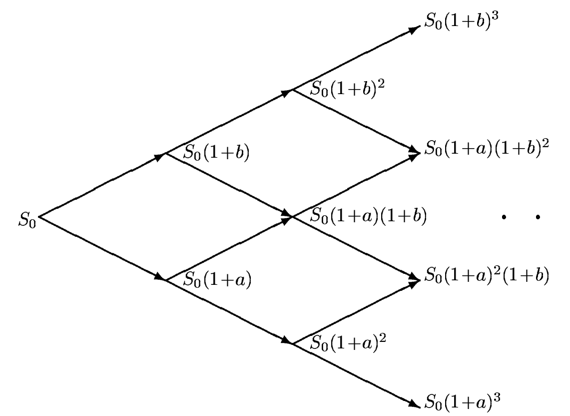
$$r = r_1 = r_2 = \ldots = r_N$$

és

$$S_n = S_{n-1}(1 + \rho_n) \qquad n = 1, \dots, N,$$

ahol a $\rho_n$-ek független azonos eloszlású valószínűségi változók, amelyek csak az $a$ vagy a $b$ értékeket vehetik fel. Egy ilyen árfolyamatot leíró fát mutat be az






1.2. Ábra: *A részvény árfolyamata homogén bináris piacon*
Itt a fa $n$-edik rétege (ld. 1.1. Ábra): $\{S_0(1+a)^k(1+b)^{n-k} \mid k = 0, \dots, n\}$.

1.2. Ábra.

## 1.4. A piacok további jellemzői

A piacok tárgyalása során felmerül egy újabb lényeges fogalom, nevezetesen az *arbitrázs* (arbitrage) fogalma. Általánosan azt mondhatjuk, hogy az arbitrázs egy rizikómentes lehetőség profit realizálására. Az arbitrázs egyik klasszikus példája az, amikor egy piaci szereplő felismeri, hogy két piacon bizonyos jószágnak, valutának vagy éppen részvénynek különbözőek az árai és ezt kihasználva mindkét piacon párhuzamosan tranzakciókat kezdeményez. Például megvásárol egy bizonyos mennyiséget a jószágból az egyik piacon és azt szinte azonnal eladja a másik piacon magasabb áron. Az ún. kamat arbitrázs (intrest arbitrage) egy másik típusa az arbitrázsnak. Ebben az esetben az egyes országokban a különböző nagyságú kamatlábak jelentik a rizikómentes profitszerzés lehetőségét.

Bár a mindennapi életben találkozhatunk arbitrázs lehetőségekkel, elméleti szempontból mégis azok a piacok lesznek az érdekesek, ahol nincs arbitrázs lehetőség. Ezért a fentiek mellett további feltételekre lesz szükségünk a diszkrét idejű piacokon, melyeket a következő, Diszkrét idejű piacok cimű fejezetben fogunk definiálni. Ezen probléma vizsgálata során felmerül egy újabb fogalom, a *piaci teljesség*, amely egy igen kedvező tulajdonsága egyes piacoknak főleg a matematikai kezelhetőség szempontjából. A teljességre szükséges és elégséges feltételeket fogunk megfogalmazni. Egy piac teljessége azt jelenti, hogy bármely előzetesen célként rögzített tervezett vagyonérték pontosan elérhető, kigazdálkozható a $T$ lejárati időre akkor, ha egy bizonyos mennyiségű kezdeti tőke a rendelkezésünkre áll. A tervezett vagyonérték azonban nem szükségképpen egy konstans összeg, hanem megadható például a részvényárnak a lejárati időpontig történő mozgásának függvényében is, azaz az lehet az $S_0, S_1, \dots, S_N$ árak egy függvénye is. Hiszen az világos, hogy bármely konstans vagyonérték kigazdálkodható úgy, hogy annak $T$-ről a jelenlegi időpontra diszkontált értékének (azaz a jelenértékének) megfelelő összeget lekötnénk, tehát kötvényt vásárolnánk az adott összegért.

# 2. Fejezet

# Diszkrét idejű piacok

## 2.1. A piacok definíciója

**2.1.1. Definíció. (Diszkrét idejű $(\mathbf{B}, \mathbf{S})_{\mathbf{N}}$ piac)**
*Egy $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F}=(\mathcal{F}_n), B=(B_n), S=(S_n), N\}$ halmazt diszkrét idejű $(B,S)_N$ piacnak nevezünk ($N \in \mathbb{N}$) ha*

- *$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező az $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ filtrációval ellátva, ahol $\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$,*
- *$B = (B_n)_{n=0}^N$ a kötvény árfolyamata, melyre $B_n \in \mathbb{R}$, $B_n > 0$, $n = 0, 1, \dots, N$,*
- *$S = (S_n)_{n=0}^N$ a részvény árfolyamata úgy, hogy az $S_n$-ek pozitív $\mathcal{F}_n$–mérhető valószínűségi változók $n = 0, 1, \dots, N$ esetén.*

**2.1.2. Megjegyzés.** Hangsúlyozzuk, hogy ebben az elméletben a kötvény árfolyamata determinisztikus, hiszen a kötvény egy rizikómentes pénzügyi eszköz.

**2.1.3. Jelölés.** *Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban egy diszkrét idejű $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F}=(\mathcal{F}_n), B=(B_n), S=(S_n), N\}$ piacot d.i.-$(B,S)_N$-nel fogunk jelölni és nem írjuk ki a hozzá tartozó valószínűségi mezőt és filtrációt, ha az nem okoz félreértést.*

**2.1.4. Jelölés.** *A fenti definícióban $N$ a kereskedési idők számát jelöli. Általában adott egy $[0,T]$ időintervallum és időpontok egy $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ sorozata. Ezen időintervallumban vizsgáljuk a piacot és az opciós szerződések is ezen intervallumon lesznek érvényesek, továbbá a fenti definícióban az $n \in \{1, \dots, N\}$ index rendre az $n$-dik kereskedési időpontra, azaz $t_n$-re vonatkoztatja az egyes mennyiségek értékét. A $T$ időpontot végső időpontnak vagy különösen opciós szerződések esetén lejárati időnek (dátumnak) fogjuk nevezni.*





**2.1.5. Megjegyzés.** A továbbiakban a diszkrét idejű piacok esetén elegendő azzal az esettel foglalkoznunk, ahol csak véges sok esemény következhet be a piacon (azaz $|\Omega| < \infty$) és feltesszük továbbá, hogy $\mathbb{P}(\omega) > 0$ minden $\omega \in \Omega$ esetén. Egyéb (általánosabb) modelleket a folytonos idejű piacokról szóló fejezetekben vizsgálunk.

**2.1.6. Definíció. (Diszkrét idejű (nemhomogén) $(\mathbf{B}, \mathbf{S})_{\mathbf{N}}$ bináris piac)**
*Egy $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F}=(\mathcal{F}_n), B=(B_n), S=(S_n), N\}$ diszkrét idejű piacot (nemhomogén) bináris $(\mathbf{B}, \mathbf{S})_{\mathbf{N}}$ piacnak nevezünk $\{r_n\}_{n=1}^N$ kamatlábakkal és $\{a_n\}_{n=1}^N$, $\{b_n\}_{n=1}^N$ együtthatókkal ha*

- *$r_n \geq 0$, $-1 < a_n < b_n$ minden $n = 1, \dots, N$ esetén,*
- *a kötvény $B = (B_n)_{n=0}^N$ árfolyamatára teljesül a*
$$B_n = (1 + r_n) B_{n-1}, \qquad n = 1, \dots, N,$$
*egyenlőség,*
- *a részvény $S = (S_n)_{n=0}^N$ árfolyamata kielégíti az*
$$S_n = (1 + \rho_n) S_{n-1}, \qquad n = 1, \dots, N,$$
*egyenlőséget, ahol $\rho_n$ olyan valószínűségi változó, melyre teljesül $\{\rho_n \in \{a_n, b_n\}\} = \Omega$ és $p_n := \mathbb{P}(\rho_n = b_n) \in (0,1)$ minden $n = 1, \dots, N$ esetén és végül*
- *$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$ a $\rho_1, \dots, \rho_N$ valószínűségi változók által generált filtráció, azaz $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ és $\mathcal{F}_n = \sigma(\rho_1, \dots, \rho_n)$, ahol $n = 1, \dots, N$.*

**2.1.7. Definíció. (Diszkrét idejű homogén $(\mathbf{B}, \mathbf{S})_{\mathbf{N}}$ bináris piac)**
*Az $\{r_n\}_{n=1}^N$ kamatlábakkal és $\{a_n\}_{n=1}^N$, $\{b_n\}_{n=1}^N$ együtthatókkal rendelkező $(B,S)_N$ diszkrét idejű bináris piacot homogén piacnak nevezzük $r$ kamatlábbal és $a$, $b$ együtthatókkal, ha az*
$$r = r_n, \quad a = a_n, \quad b = b_n, \qquad n = 1, \dots, N,$$
*feltételek teljesülnek és a $\rho_1, \dots, \rho_N$ valószínűségi változók független azonos eloszlásúak (azaz $p = p_n$, $n = 1, \dots, N$).*

**2.1.8. Jelölés.** *Egy $\{r_n\}_{n=1}^N$ kamatlábakkal és $\{a_n\}_{n=1}^N$, $\{b_n\}_{n=1}^N$ együtthatókkal ellátott $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n), B = (B_n), S = (S_n), N\}$ diszkrét idejű (nemhomogén) piac esetén a d.i.b.-$(B,S)_N$ jelölést fogjuk használni az egyszerűség kedvéért, míg a d.i.h.b.-$(B,S)_N$ jelölést használjuk majd, ha a szóbanforgó piac homogén. A piacok definíciójában szereplő valószínűségi teret, filtrációt, kamatlábakat és együtthatókat viszont nem írjuk ki, ha az nem okoz értelmezési problémákat.*

A 2.1.5. Megjegyzést figyelembe véve az elemi események $\Omega$ tere úgy is elképzelhető, mint a $(\rho_1, \dots, \rho_N)$ valószínűségi változósorozat realizációinak egy bijektív képe egy bináris piac esetén. Ez tehát azt jelenti, hogy $\Omega$ bijektív módon megfeleltethető az

$$\{(x_1, \dots, x_N) \mid x_i \in \{a_i, b_i\},\ i = 1, \dots, N\}$$

halmazzal: minden $\omega \in \Omega$ megfelel a részvény árfolyamatát leíró bináris fa egy trajektóriájának (ld. az 1.1. és 1.2. Ábrákat).

## 2.2. Stratégiák, fedezeti portfóliók

**2.2.1. Definíció.** *Legyenek $\beta_n$ és $\gamma_n$ $(n = 1, \dots, N)$ $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető valószínűségi változók egy d.i.-$(B, S)_N$ piacon és legyen $\beta_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}$. Ekkor a $\pi := \{\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)\}_{n=0}^N$ sorozatot stratégiának nevezzük.*

*Az $X_n^\pi := \beta_n B_n + \gamma_n S_n$ sorozatot $\pi$ értékfolyamatának nevezzük és $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ pedig a portfólió a $t_n$ kereskedési időpontban.*

**2.2.2. Megjegyzés.** Ha egy befektető egy $\pi$ startégiát valósít meg, akkor a $\beta_n$ és $\gamma_n$ számok azt mutatják, hogy mennyi kötvény illetve részvény van a tulajdonában a $t_n$ időpontban. Azonban szükséges hangsúlyozni, hogy a stratégia fogalmának ezen általános értelmezése nem szükségképpen felel meg egy valós életben megvalósítható (realisztikus) fogalomnak. Ugyanis a 2.2.1. Definíció „gyenge feltételei" miatt nem tekinthetjük egy valós közgazdasági fogalomnak, további megszorítások, feltételek (pl. önfinanszírozás) szükségesek ahhoz, hogy például egy befektető által megvalósított stratégiaként interpretálhassuk azt.

**2.2.3. Jelölés.** *Egy $a_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat esetén legyen*

$$\Delta a_n := a_n - a_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

*Ekkor azt mondjuk, hogy $\{\Delta a_n\}_{n=1}^\infty$ a $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ sorozat differencia sorozata.*

**2.2.4. Definíció.** *Egy d.i.-$(B, S)_N$ piacon egy $\pi = \{\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)\}_{n=0}^N$ stratégiát önfinanszírozónak nevezzük, ha kielégíti az*

$$X_{n-1}^\pi = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}, \qquad n = 1, \dots, N,$$

*egyenletet.*

**2.2.5. Megjegyzés.** Egy d.i.-$(B, S)_N$ piacon



- általában egy stratégiára teljesül $n = 1, \dots, N$ esetén, hogy

$$\begin{aligned}\Delta X_n^\pi = X_n^\pi - X_{n-1}^\pi &= \beta_n B_n + \gamma_n S_n - (\beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1}) \\ &= \beta_n B_n - \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_n - \gamma_n S_{n-1} \\ &\quad + \beta_n B_{n-1} - \beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} - \gamma_{n-1} S_{n-1} \\ &= (\beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n) + (B_{n-1} \Delta \beta_n + S_{n-1} \Delta \gamma_n),\end{aligned}$$

- önfinanszírozó stratégia esetén így

$$\Delta X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n - (\beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}) \qquad (n = 1, \dots, N)$$

  is teljesül.

E fentieket összefoglaljuk az alábbi lemmában.

**2.2.6. Lemma.** *Egy d.i.-$(B, S)_N$ piacon az alábbi megállapítások ekvivalensek egy $\pi$ stratégia esetén:*

(a) *$\pi$ önfinanszírozó, azaz $X_{n-1}^\pi = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}$ $\quad (n = 1, \dots, N)$,*

(b) *$\Delta X_n^\pi = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n$ $\quad (n = 1, \dots, N)$,*

(c) *$B_{n-1} \Delta \beta_n + S_{n-1} \Delta \gamma_n = 0$ $\quad (n = 1, \dots, N)$.*

A 2.2.6. Lemma az önfinanszírozás feltételét világítja meg több nézőpontból. Miután az új árak a $t_{n-1}$ időpontban ismertté váltak, megváltoztathatjuk a portfóliónkat (azaz meghatározhatjuk $\pi_n$-t) azzal a feltétellel, hogy $X_{n-1}^\pi$ mennyiségű tőke áll rendelkezésre a befektetési (vásárlási és eladási) terveinkhez (ld. (a)). Ezeket a változtatásokat a portfólióban nevezhetjük belsőnek vagy interiornak, kiemelve ezzel azt, hogy a protfólióból sem tőkekivétel (pl. adófizetés, működési költségek, tranzakciós költségek, stb.) sem ahhoz tőke hozzáadása (pl. részvény után osztalék, más jövedelmeknek vagy tőkének a stratégiába való befektetése, stb.) nem lehetséges a modellünk feltételei szerint, ahogy ezt az (a) és (c) pontokban hangsúlyoztuk. Ezért profitot csak az árváltozások hatására realizálhatunk a piacon (ld. (b)).

**2.2.7. Megjegyzés.** A $\rho_n(\omega)$, $S_n(\omega)$, $\beta_n(\omega)$, $\gamma_n(\omega)$ $X_n(\omega)$ valószínűségi változókban és a $\pi_n(\omega) = (\beta_n(\omega), \gamma_n(\omega))$ valószínűségi vektorváltozóban az $\omega$ változót nem mindig fogjuk kiírni a könnyebbség kedvéért.

**2.2.8. Definíció.** *Legyen adott egy d.i.-$(B,S)_N$ piac, $x \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $f_N : \mathbb{R}^{N+1} \mapsto \mathbb{R}$ egy Borel függvény. Egy $\pi = \{\pi_n\}_{n=0}^N$ stratégiát $(x, f_N)$-fedezetnek (vagy fedezeti stratégiának) nevezünk, ha*

$$X_0^\pi(\omega) = x, \qquad \forall \omega \in \Omega, \tag{2.1}$$

*és*

$$X_N^\pi(\omega) \geq f_N(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega)), \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{2.2}$$

*Ha $X_N^\pi(\omega) = f_N(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega))$, $\forall \omega \in \Omega$, akkor azt mondjuk, hogy $\pi$ minimális $(x, f_N)$-fedezet. Az összes önfinanszírozó $(x, f_N)$-fedezeti stratégiák halmazát $\Pi(x, f_N)$-el fogjuk jelölni.*

**2.2.9. Megjegyzés.** Tegyük fel, hogy a 2.2.8. Definícióban szereplő $f_N$ függvényhez található egy olyan $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ Borel függvény, amely kielégíti az $f_N(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega))) = g(S_N(\omega))$ egyenlőséget minden $\omega \in \Omega$ esetén. Ha egy befektető egy $(x, f_N)$-fedezeti stratégiát hajt végre azzal a céllal, hogy legalább $g(S_N)$ legyen tőkéjének értéke, akkor azt mondjuk, hogy a befektető a $g(S_N)$ vagyonra vagy tőkére fedezeti stratégiát szervez (vagy hajt végre).

**2.2.10. Definíció.** *Legyen $f_N : \mathbb{R}^{N+1} \mapsto \mathbb{R}$ egy Borel függvény. Ekkor egy d.i.-$(B,S)_N$ piacon a*

$$\mathbb{C}_{N,f_N} := \inf\{x > 0 \mid \Pi(x, f_N) \neq \emptyset\}$$

*értéket a $t_N$ időre legalább $f_N(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega))$ ($\forall \omega \in \Omega$) tőkét biztosító tőkének (befektetési költségnek) nevezzük.*

**2.2.11. Lemma.** *Minden d.i.-$(B,S)_N$ piac és $f_N : \mathbb{R}^{N+1} \mapsto \mathbb{R}$ Borel függvény esetén létezik $x \in \mathbb{R}^+$ úgy, hogy $\Pi(x, f_N) \neq \emptyset$.*

*Legyen például*

$$x := \frac{B_0}{B_N} \max_{\omega \in \Omega} \left| f_N(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega)) \right|$$

*és a $\pi = \{\pi_n\}_{n=0}^N$ stratégia pedig olyan, hogy*

$$\pi_n := (\beta_n, \gamma_n) \equiv (x/B_0, 0), \quad n = 0, \ldots, N.$$

*Ekkor $\pi \in \Pi(x, f_N)$, ezért $\mathbb{C}_{N,f_N} < \infty$.*



**2.2.12. Megjegyzés.** Nyílvánvaló, hogy $\mathbb{C}_{N,f_N}$ azt a minimális kezdeti tőkemennyiséget hivatott megmutatni, amely biztosítja a befektető számára azt a lehetőséget, hogy a $T$ időpontban egy $\pi$ stratégia eredményeként azon $X_N^\pi$ tőkét realizálja, melyre $X_N^\pi(\omega) = f_N(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega))$ teljesül. Megjegyezzük továbbá, hogy még nem mutattuk meg egy ilyen tulajdonságú stratégia létezését (ld. 6.1.3. Megjegyzés és 6.2.1. Tétel).

**2.2.13. Megjegyzés.** A közgazdaságtanban általában az $X_n^\pi \geq 0 \quad (0 \leq n \leq N)$ feltétel is szerepel a fedezeti stratégia fogalmában, amely egy nyílvánvalóan racionális követelmény. A későbbiek során meg fogjuk mutatni, hogy ha létezik egy stratégia az $x$ kezdeti tőkéhez és az $f_N$ „megcélzott" függvényhez, akkor ebből már következik a létezése egy nemnegatív értékfolyamattal rendelkező stratégiának is ugyanezen tulajdonságokkal (ld. 6.1.3. Megjegyzés).

**2.2.14. Definíció.** *Legyen $\pi$ egy stratégia egy d.i.-$(B,S)_N$ piacon. Ekkor a*

$$M_n^\pi := \frac{X_n^\pi}{B_n} \qquad (0 \leq n \leq N) \tag{2.3}$$

*folyamatot a $\pi$ stratégia diszkontált (leszámítolt) értékfolyamatának nevezzük.*

A fenti definícióban a közgazdaságtanban megszokott leszámítolás szerepel (az ismert kamatlábnak megfelelően), amelynek eredményeképpen a különböző időpontbeli tőkemennyiségek összehasonlíthatóvá tehetőek. Igaz, esetünkben még a $B_0$ kezdeti kötvényárral is normáltuk a folyamat értékét.

# 3. Fejezet

# Arbitrázs

## 3.1. Az arbitrázs fogalma

A közgazdaságtanban tágabb értelemben minden kockázatmentes profitszerzési módot arbitrázs-lehetőségnek tekinthetünk. A mi modellünkben az arbitrázs-stratégia fogalmát a következő természetes módon lehet értelmezni.

**3.1.1. Definíció.** *Egy d.i.-$(B,S)_N$ piacon a $\pi$ önfinanszírozó stratégiát arbitrázsnak, vagy arbitrázs-stratégiának nevezzük, ha*

- $X_0^\pi \equiv 0$,
- $X_n^\pi \geq 0 \quad 1 \leq n \leq N$,
- $\exists\, \omega \in \Omega : X_N^\pi(\omega) > 0$ *(azaz* $\mathbb{P}(X_N^\pi > 0) > 0$*).*

*Azt mondjuk, hogy a piac kizárja az arbitrázst (más szóval az arbitrázs lehetőségét), ha nincs önfinanszírozó arbitrázs-stratégia a piacon.*

### 3.1.1. Martingál-mérték

**3.1.2. Definíció.** *Azt mondjuk, hogy $\mathbb{P}^*$ egy ekvivalens martingál-mérték az $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F}=(\mathcal{F}_n), B=(B_n), S=(S_n), N\}$ diszkrét idejű piacon, ha*

- $\mathbb{P}^*$ *valószínűségi mérték $(\Omega,\mathcal{F})$-en,*
- $\mathbb{P}^*$ *és $\mathbb{P}$ ekvivalensek, és*
- *az $(S_n/B_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0\leq n\leq N}$ sorozat martingált alkot.*

**3.1.3. Jelölés.** *Egy $\mathbb{P}^*$ valószínűségi mérték esetén $\mathbb{E}^*$ a $\mathbb{P}^*$ mértékre vonatkozó várható értéket jelöli.*





**3.1.4. Lemma.** *A d.i.-$(B,S)_N$ piacon az $(S_n/B_n, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)_{0\leq n\leq N}$ sorozat akkor és csak akkor alkot martingált, ha tetszőleges $\pi$ önfinanszírozó stratégia esetén az $(X_n^\pi/B_n, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)_{0\leq n\leq N}$ sorozat martingált alkot.*

**Bizonyítás.** $X_n^\pi/B_n = \beta_n + \gamma_n S_n/B_n$ és

$$\mathbb{E}^*(X_n^\pi/B_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \beta_n + \gamma_n \mathbb{E}^*(S_n/B_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}^\pi/B_{n-1},$$

mivel $\beta_n$ és $\gamma_n$ $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhetőek. □

**3.1.5. Tétel.** *Tekintsünk egy olyan d.i.b.-$(B,S)_N$ piacot, ahol az $\{r_n\}_{n=1}^N$ kamatlábakra és az $\{a_n\}_{n=1}^N$, $\{b_n\}_{n=1}^N$ együtthatókra teljesülnek az $a_n < r_n < b_n$ $(n=1,\ldots,N)$ egyenlőtlenségek. Ekkor a*

$$\mathbb{P}^*(\rho_n = b_n) = p_n^* := \frac{r_n - a_n}{b_n - a_n}, \qquad n = 1,\ldots,N \tag{3.1}$$

*képlettel értelmezett mérték egy ekvivalens martingál-mérték.*

**3.1.6. Megjegyzés.** Nyilvánvaló, hogy a (3.1) képlet a $\mathbb{P}^*$ mértéket egyértelműen definiálja. Valóban, az $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n$ $\sigma$-algebrát generálják a $\rho_1,\ldots,\rho_N$ független valószínűségi változók. Felidézve, hogy $\Omega$ elemei tekinthetők a $\rho_1,\ldots,\rho_N$ valószínűségi változók realizációiból álló halmaznak (lásd 17. oldal), könnyen látható, hogy egy $\omega \in \Omega$ elem esetén a

$$\mathbb{P}^*(\omega) = \prod_{\substack{0\leq n\leq N \\ x_n = b_n}} \left(\frac{r_n - a_n}{b_n - a_n}\right) \prod_{\substack{0\leq n\leq N \\ x_n = a_n}} \left(\frac{b_n - r_n}{b_n - a_n}\right)$$

összefüggésnek teljesülnie kell, ahol $(x_1,\ldots,x_N)$ az $\omega$ elemi eseményhez tartozó vektor. Speciálisan, egy homogén bináris piacon

$$\mathbb{P}^*(\omega) = \left(\frac{r-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-r}{b-a}\right)^{N-k}, \tag{3.2}$$

ahol $k$ a részvényár felfelé történő ugrásainak száma a $[0,T]$ intervallumon, mialatt az ár az $\omega$ elemi eseménynek megfelelő trajektória szerint alakul. Nyilván a (3.2)-ben leírt $\mathbb{P}^*$ egy binomiális eloszlás, ezért nevezik néha a homogén bináris piacot binomiális (értékpapír-) piacnak is a szakirodalomban.

**A 3.1.5. tétel bizonyítása.** Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*\rho_n &= a_n(1-p_n^*) + b_n p_n^* \\ &= (b_n - a_n)p_n^* + a_n = r_n \qquad \text{ha} \quad n = 1,\ldots,N.\end{aligned}$$

Mivel a részvényár folyamata adaptált az $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^N$ filtrációhoz, így

$$\mathbb{E}^*\Big(\frac{S_n}{B_n} \;\Big|\; \mathcal{F}_{n-1}\Big) = \frac{S_{n-1}}{B_n}\,\mathbb{E}^*\big((\rho_n+1) \mid \mathcal{F}_{n-1}\big)$$
$$= \frac{S_{n-1}}{B_n}\,(r_n+1) = \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\,, \qquad n = 1,\dots,N,$$

amivel kész a bizonyítás. □

**3.1.7. Jelölés.** *Az $A$ halmaz idikátorfüggvényét $I_A(\cdot)$ fogja jelölni.*

**3.1.8. Lemma.** *Legyenek $\xi_n$ $(n = 0,\dots,N,\ N \in \mathbb{N})$ valószínűségi változók az $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ filtrációval ellátott $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn.*
*Ha*

- $\mathbb{E}|\xi_n| < \infty \qquad (n = 0,\dots,N)$,
- *a $\xi_n$-ek $\mathcal{F}_n$-mérhetőek $(n = 0,\dots,N)$, és*
- *tetszőleges $\tau : \Omega \mapsto \{0,1,\dots,N\}$ megállítási idő esetén $\mathbb{E}\xi_\tau = \mathbb{E}\xi_0$,*

*akkor a $(\xi_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})_{0\le n\le N}$ sorozat martingált alkot.*

**Bizonyítás.** Legyen $A \in \mathcal{F}_n$ és legyen $n_A$ a következő módon értelmezett megállítási idő:

$$n_A(\omega) := \begin{cases} n & \text{if } \omega \in A, \\ N & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor

$$\mathbb{E}\xi_0 = \mathbb{E}\xi_{n_A} = \mathbb{E}\xi_n I_A + \mathbb{E}\xi_N I_{\overline{A}},$$

speciálisan,

$$\mathbb{E}\xi_0 = \mathbb{E}\xi_N.$$

Ezért a két utolsó egyenlet alapján

$$\int_A \xi_N\, d\mathbb{P} = \mathbb{E}\xi_N I_A = \mathbb{E}\xi_N - \mathbb{E}\xi_N I_{\overline{A}} = \mathbb{E}\xi_n I_A = \int_A \xi_n\, d\mathbb{P},$$

azaz $\xi_n = \mathbb{E}(\xi_N|\mathcal{F}_n)$ $\mathbb{P}$-m.m., amiből az iterált feltételes várható értékre vonatkozó szabály alapján

$$\mathbb{E}(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi_N|\mathcal{F}_{n+1})\big|\mathcal{F}_n\big) = \mathbb{E}(\xi_N|\mathcal{F}_n) = \xi_n \quad \mathbb{P}\text{-m.m.}$$

□



## 3.2. Az arbitrázsra vonatkozó főtételek

**3.2.1. Tétel.** *Egy d.i.-$(B,S)_N$ piacon a következő állítások ekvivalensek:*

**(1)** *létezik ekvivalens martingál-mérték,*

**(2)** *a piac kizárja az arbitrázs lehetőségét.*

**Bizonyítás. (1) ⇒ (2).** Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}^*$ egy ekvivalens martingál-mérték. Tegyük fel, hogy $\pi$ egy önfinanszírozó stratégia $X_0^\pi = 0$ kezdeti tőkével. Ekkor a 3.1.4. Lemma szerint

$$\mathbb{E}^* X_N^\pi = \frac{B_N}{B_0}\, X_0^\pi = 0,$$

ezért $\pi$ nem lehet arbitrázs-stratégia, mivel $X_N^\pi \ge 0$ és $\mathbb{P}^*(X_N^\pi > 0) > 0$ azt vonná maga után, hogy $\mathbb{E}^* X_N^\pi > 0$.

**(2) ⇒ (1).** Tegyük fel, hogy nincs arbitrázs-stratégia a piacon, és legyen

$$V_0 := \{\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R} \text{ v.v.} \mid \exists \text{ olyan } \pi \text{ önfinanszírozó stratégia,}$$
$$\text{melyre } X_0^\pi = 0 \text{ és } X_N^\pi = \xi\}$$

és

$$V_1 := \{\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R} \text{ v.v.} \mid \xi \ge 0 \text{ és } \mathbb{E}\xi \ge 1\}.$$

A könnyebb megértés kedvéért 5 lépésre bontjuk a bizonyítást.

*1. lépés. Megmutatjuk, hogy $V_0 \cap V_1 = \emptyset$.*

Tegyük fel, hogy $\exists \xi \in V_0 \cap V_1$. Ekkor létezik olyan $\pi$ önfinanszírozó stratégia, melyre $X_0^\pi = 0$ és $X_N^\pi = \xi$, amiből — ahogy látni fogjuk — következik egy $\overline{\pi}$ arbitrázs-stratégia létezése, ami ellentmond **(2)**-nek.

Ha $X_n^\pi \ge 0$ $(0 \le n \le N)$, akkor $\overline{\pi} := \pi$ egy arbitrázs-stratégia.

Egyébként $\exists$ $m < N$ és $\omega_0 \in \Omega$ úgy, hogy $X_m^\pi(\omega_0) < 0$ és $X_n^\pi(\omega) \ge 0$ teljesül $\forall \omega \in \Omega$ és $n > m$ esetén. Ekkor a következő módon lehet egy $\{\overline{\pi}_n = (\overline{\beta}_n, \overline{\gamma}_n)\}_{n=0}^N$ arbitrázs-stratégiát konstruálni:

$$\overline{\beta}_n(\omega) := I_{\{\omega_0=\omega\}} I_{\{n>m\}} \left(\beta_n(\omega) - \frac{X_m^\pi(\omega_0)}{B_m}\right)$$

$$\overline{\gamma}_n(\omega) := I_{\{\omega_0=\omega\}} I_{\{n>m\}} \gamma_n(\omega) \quad \text{ha } n = 0,\dots,N.$$

Először azt ellenőrizzük, hogy $\overline{\pi}$ valóban önfinanszírozó. Ha $n \le m$ vagy $\omega \ne \omega_0$, akkor $\Delta\overline{\beta}_n(\omega) = \Delta\overline{\gamma}_n(\omega) = 0$.

Ha $n = m + 1$, akkor

$$\Delta\overline{\beta}_n(\omega_0) = \overline{\beta}_{m+1}(\omega_0) = \beta_{m+1}(\omega_0) - \frac{X_m^\pi(\omega_0)}{B_m}$$

és

$$\Delta\overline{\gamma}_n(\omega_0) = \gamma_{m+1}(\omega_0),$$

ezért

$$\begin{aligned} B_{n-1}\Delta\overline{\beta}_n(\omega_0) + S_{n-1}\Delta\overline{\gamma}_n(\omega_0) &= \left(\beta_{m+1}(\omega_0) - \frac{X_m^\pi(\omega_0)}{B_m}\right) B_m + \gamma_{m+1}(\omega_0) S_m \\ &= X_m^\pi(\omega_0) - X_m^\pi(\omega_0) = 0. \end{aligned}$$

Ha $n > m + 1$, akkor $\Delta\overline{\beta}_n(\omega_0) = \Delta\beta_n(\omega_0)$ és $\Delta\overline{\gamma}_n(\omega_0) = \Delta\gamma_n(\omega_0)$ alapján $B_{n-1}\Delta\overline{\beta}_n(\omega_0) + S_{n-1}\Delta\overline{\gamma}_n(\omega_0) = 0$, mivel $\pi$ önfinanszírozó, tehát végülis megállapíthatjuk, hogy $\overline{\pi}$ is önfinanszírozó.

Másodszor, $X_n^{\overline{\pi}} \geq 0 \quad (0 \leq n \leq N)$, mivel ha $n > m$, akkor

$$\begin{aligned} X_n^{\overline{\pi}}(\omega) &= \overline{\beta}_n(\omega) B_n + \overline{\gamma}_n(\omega) S_n \\ &= I_{\{\omega=\omega_0\}} \left(\beta_n(\omega) B_n + \gamma_n(\omega) S_n - \frac{X_m^\pi(\omega_0) B_n}{B_m}\right) \geq 0, \end{aligned}$$

és nyilván $X_n^{\overline{\pi}}(\omega) \equiv 0$ ha $n \leq m$. Továbbá, $\exists\ \omega \in \Omega$ úgy, hogy $X_N^{\overline{\pi}}(\omega) > 0$, mégpedig $\omega_0$, hiszen

$$\begin{aligned} X_N^{\overline{\pi}}(\omega_0) &= \beta_N(\omega_0) B_N - \frac{X_m^\pi(\omega_0) B_N}{B_m} + \gamma_N(\omega_0) S_N \\ &= X_N^\pi(\omega_0) - \frac{X_m^\pi(\omega_0) B_N}{B_m} > 0. \end{aligned}$$

*2. lépés.* Jelölje $f : V_0 \cup V_1 \mapsto \mathbb{R}^k$ az $f(\xi) = (\xi(\omega_1), \ldots, \xi(\omega_k))$ bijekciót $\xi \in V_0 \cup V_1$ esetén, ahol $k = |\Omega|$, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$.

*Az $f(V_0)$ halmaz lineáris altér $\mathbb{R}^k$-ban*, mivel $\xi, \eta \in V_0$ esetén $\lambda_1\xi + \lambda_2\eta \in V_0$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$, hiszen a $\pi = \lambda_1\pi_\xi + \lambda_2\pi_\eta = (\lambda_1\beta_\xi + \lambda_2\beta_\eta, \lambda_1\gamma_\xi + \lambda_2\gamma_\eta)$ startégia a $t_N$ időpontban $X_N^\pi = \lambda_1\xi + \lambda_2\eta$ tőkét eredményez, ahol $\pi_\xi$ és $\pi_\eta$ a $V_0$ definíciója alapján a $\pi_\xi$-hez, illetve $\pi_\eta$-hoz rendelt stratégiák.

*Az $f(V_1)$ halmaz konvex $\mathbb{R}^k$-ban*, mivel adott $\xi, \eta \in V_1$ és $\lambda \in [0, 1]$ esetén nyilván $\lambda\xi + (1 - \lambda)\eta \geq 0$ és $\mathbb{E}(\lambda\xi + (1 - \lambda)\eta) \geq \lambda + (1 - \lambda) = 1$.



*3. lépés. A $\mathbb{P}^*$ konstrukciója.*

Lineáris algebrából ismert, hogy $\mathbb{R}^k$-ban adott diszjunkt $f(V_0)$ lineáris altér és $f(V_1)$ konvex halmaz esetén létezik olyan $l : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ lineáris függvény, hogy

$$\begin{aligned} l(v) = 0 \quad &\text{ha } v \in f(V_0), \\ l(v) > 0 \quad &\text{ha } v \in f(V_1). \end{aligned}$$

Továbbá, az $l$ lineáris függvényhez létezik egy $q \in \mathbb{R}^k$ vektor úgy, hogy $l$ írható $l(v) = \langle v, q\rangle = \sum_{i=1}^k v_i q_i$ alakban, ahol $v = (v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}^k$, $q = (q_1, \ldots, q_k) \in \mathbb{R}^k$.

Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_k$ a következő módon definiált valószínűségi változók:

$$\xi_i(\omega_j) := \begin{cases} \dfrac{1}{\mathbb{P}(\{\omega_j\})} & \text{ha } i = j, \\ 0 & \text{egyébként}, \end{cases}$$

ahol $i, j = 1, \ldots, k$. Ekkor $\xi_i \geq 0$ és $\mathbb{E}\xi_i = 1$, ezért $\xi_i \in V_1 \quad (1 \leq i \leq k)$, és azt kapjuk, hogy $l(f(\xi_i)) = q_i/\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$, amiből az következik, hogy $q_i > 0 \quad (1 \leq i \leq k)$. Definiáljuk a $\mathbb{P}^*$ valószínűségi mértéket a következő módon:

$$\mathbb{P}^*(\{\omega_i\}) := \frac{q_i}{\sum_{j=1}^k q_j} \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

*4. lépés.* Vegyük észre, hogy *egy $X_0^\pi = 0$ kezdeti tőkéjű $\pi$ önfinanszírozó stratégia esetén $\mathbb{E}^* X_N^\pi = 0$.* Ez könnyen belátható, hiszen $X_N^\pi \in V_0$, és így $0 = l(f(X_N^\pi)) = \sum_{i=1}^k X_N^\pi(\omega_i) q_i = \mathbb{E}^* X_N^\pi \sum_{i=1}^k q_i$.

*5. lépés. Ellenőrizzük, hogy $\mathbb{P}^*$ valóban ekvivalens martingál-mérték.*

Mivel az $\Omega$ halmaz véges és $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$, $\mathbb{P}^*(\{\omega_i\}) > 0$ ha $i = 1, \ldots, k$, így $\mathbb{P}^*$ és $\mathbb{P}$ ekvivalenciája triviális. A 3.1.8. Lemma szerint elegendő azt megmutatni, hogy az $\mathbb{F}$-re vonatkozó tetszőleges $\tau : \Omega \mapsto \{0, \ldots, N\}$ megállítási idő esetén teljesül

$$\mathbb{E}^* \left(\frac{S_\tau}{B_\tau} - \frac{S_0}{B_0}\right) = 0, \tag{3.3}$$

mert ekkor ebből már következik, hogy $(S_n/B_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0 \leq n \leq N}$ martingál. Legyen $\tau$ egy megállítási idő és legyen

$$\begin{aligned} \beta_n &:= \frac{S_\tau}{B_\tau} I_{\{n > \tau\}} - \frac{S_0}{B_0}, \\ \gamma_n &:= I_{\{n \leq \tau\}}, \end{aligned}$$

valamint

$$\pi_n := (\beta_n, \gamma_n) \qquad \text{ha } n = 0, \dots, N.$$

Ekkor a $\pi = (\pi_n)_{n=0}^N$ stratégia a $t_0$ időpontban 0 kezdeti tőkével indul, hiszen

$$X_0^\pi = -\frac{S_0}{B_0} B_0 + S_0 = 0.$$

Az önfinanszírozó tulajdonság ellenőrzése:

$$\begin{aligned} B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n &= \frac{S_\tau}{B_\tau}(I_{\{n>\tau\}} - I_{\{n-1>\tau\}})B_{n-1} + (I_{\{\tau\geq n\}} - I_{\{\tau\geq n-1\}})S_{n-1} \\ &= \frac{S_\tau}{B_\tau} I_{\{\tau=n-1\}} B_{n-1} - I_{\{\tau=n-1\}} S_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

A 4. lépés alkalmazásával

$$\begin{aligned} 0 = \mathbb{E}^* X_N^\pi &= \mathbb{E}^*(\beta_N B_N + \gamma_N S_N) \\ &= \mathbb{E}^* \left( \left( \frac{S_\tau}{B_\tau} I_{\{\tau<N\}} - \frac{S_0}{B_0} \right) B_N + \frac{S_\tau}{B_\tau} I_{\{\tau=N\}} B_N \right) \\ &= B_N \mathbb{E}^* \left( \frac{S_\tau}{B_\tau} - \frac{S_0}{B_0} \right), \end{aligned}$$

így fennáll a (3.3) egyenlet, amivel kész a bizonyítás. □

A 3.2.1. Tétel fontos szerepet játszik az opcióelméletben, és általában a közgazdaságtanban. Ez a tétel matematikai és közgazdaságtani fogalmak szerencsés egybeesését állítja. Egyrészt közgazdaságtani szempontból alapvető fontosságú az arbitrázs-lehetőségek, illetve az arbitrázst kizáró piacok vizsgálata (például a kiegyensúlyozott gazdaságok elméletében), másrészt látni fogjuk, hogy egy ekvivalens martingál-mérték létezése kiváló eszközt biztosít bizonyos számítások egyszerű végrehajtásához.

Azt is fontos megjegyezni, hogy a piac tényleges $\mathbb{P}$ valószínűségi mértéke ismeretlen, ami teljesen megszokott jelenség a valószínűségelméletben és a matematikai statisztikában, viszont az opcióárazái problémánk meglehetősen szokatlan jellegű. Ugyanis azokra a $\mathbb{C}_{N,f_N}$ mennyiségekre szeretnénk bizonyos feltételek mellett formulákat kapni, melyek definíciója (lásd a 2.2.10. Definíciót) a fedezeti stratégia fogalmán alapul, mely a piac mindenféle valószínűségi mértékétől független, továbbá a (2.1) és (2.2) fedezeti feltételnek a piac összes lehetséges eseményére teljesülnie kell (lásd a 2.2.8. Definíciót). Ezért lehet néhány problémát valószínűségelmélet nélkül kezelni (ld. [Dzhaparidze and Zuijlen 96]), ahogy ezt már említettük.



**3.2.2. Következmény.** *Tekintsünk egy d.i.b.-$(B,S)_N$ piacot. Jelölje $\{r_n\}_{n=1}^N$ a kamatlábakat és $\{a_n\}_{n=1}^N$, $\{b_n\}_{n=1}^N$ az együtthatókat. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

**(1)** *létezik ekvivalens martingál-mérték,*

**(2)** *a piac kizárja az arbitrázs lehetőségét,*

**(3)** *$a_n < r_n < b_n$ teljesül minden $n = 1, \dots, N$ esetén.*

**Bizonyítás.** A 3.1.5. és 3.2.1. Tételek alapján csak a **(3)** ⇒ **(2)** irányt kell megmutatnunk, amit indirekt módon bizonyítunk.

Tegyük fel, hogy van olyan $1 \leq n^* \leq N$ egész, melyre $r_{n^*} \notin (a_{n^*}, b_{n^*})$.

Például tekintsük az $r_{n^*} \leq a_{n^*}$ esetet. Ekkor válasszuk a következő $\pi$ stratégiát:

$$\beta_k := \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq k \leq n^*-1, \\ -\dfrac{S_{n^*-1}}{B_{n^*-1}} & \text{ha } k = n^*, \\ \dfrac{S_{n^*-1}(r_{n^*} - \rho_{n^*})}{B_{n^*}} & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$\gamma_k := \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq k \leq n^*-1, \\ 1 & \text{ha } k = n^*, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$\pi := \{(\beta_k, \gamma_k)\}_{k=0}^N$$

Megjegyezzük, hogy a $\pi$ stratégia önfinanszírozó. Továbbá,

$$\begin{aligned} X_{n^*}^\pi &= -\frac{S_{n^*-1}}{B_{n^*-1}} B_{n^*} + S_{n^*} = \big(-(1+r_{n^*}) + (1+\rho_{n^*})\big) S_{n^*-1} \\ &\geq \big(-(1+r_{n^*}) + (1+a_{n^*})\big) S_{n^*-1} > 0 \end{aligned}$$

valamint

$$X_N^\pi = \beta_N B_N = \frac{B_N}{B_{n^*}} X_{n^*}^\pi > 0,$$

tehát $\pi$ egy arbitrázs-stratégia, amely ellentmond **(2)**-nek.

Hasonló érvelés használható $r_{n^*} \geq b_{n^*}$ esetén, amikor $-\pi$ lesz egy arbitrázs-stratégia. □

# 4. Fejezet

# A piac teljessége

Ahogy azt már említettük, a piac teljessége azt jelenti, hogy bármely előzetesen célként rögzített tervezett vagyonértékhez (mely függhet a részvényár teljes folyamatától) létezik olyan önfinanszírozó stratégia, mellyel ez a vagyonérték pontosan elérhető. Modellünkben ezt a fogalmat a következőképpen definiáljuk:

**4.0.3. Definíció.** *A d.i.-$(B, S)_N$ piacot teljesnek nevezzük, ha tetszőleges $\xi$ valószínűségi változóhoz létezik olyan $\pi$ önfinanszírozó stratégia, hogy*

$$X_N^\pi(\omega) = \xi(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega \quad \text{esetén.}$$

**4.0.4. Tétel.** *Tegyük fel, hogy a d.i.-$(B, S)_N$ piacon létezik $\mathbb{P}^*$ ekvivalens martingál-mérték. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

**(1)** *a piac teljes,*

**(2)** *$\mathbb{P}^*$ az egyetlen martingál-mérték a piacon,*

**(3)** *tetszőleges $(M_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0 \le n \le N}$ martingál előállítható*

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta m_k, \qquad n = 1, \dots, N$$

*alakban, ahol a $\gamma_n$-ek $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető valószínűségi változók ($n = 1, \dots, N$), és*

$$m_n := \frac{S_n}{B_n} \qquad \text{ha} \quad n = 1, \dots, N.$$

**Bizonyítás. (1) ⇒ (2).** Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}^{**}$ is egy ekvivalens martingál-mérték. Megmutatjuk, hogy $\mathbb{P}^{**} = \mathbb{P}^*$.





Legyen $A \in \mathcal{F}$ és $\xi(\omega) := I_A(\omega)$. Ekkor a piac teljessége miatt létezik olyan $\pi$ önfinanszírozó stratégia, melyre $X_N^\pi = \xi$. A $\pi$ diszkontált értékfolyamata martingált alkot tetszőleges ekvivalens martingál-mértékre vonatkozóan. Speciálisan,

$$\mathbb{E}^* \frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{X_0^\pi}{B_0} = \mathbb{E}^{**} \frac{X_N^\pi}{B_N},$$

ahol $\mathbb{E}^*$ és $\mathbb{E}^{**}$ a $\mathbb{P}^*$, illetve $\mathbb{P}^{**}$ mértékekre vonatkozó várható értéket jelöli, ezért

$$\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{E}^* I_A = \mathbb{E}^{**} I_A = \mathbb{P}^{**}(A),$$

amivel kész (1) ⇒ (2) bizonyítása.

**(2) ⇒ (1).** Megjegyezzük, hogy a $\mathbb{P}^*$ ekvivalens martingál-mérték egyértelműségéből az következik, hogy $\mathbb{P}^*$ csak az a mérték lehet, melyet a 3.2.1. Tétel bizonyításában konstruáltunk.

Ugyanazt a jelölést fogjuk használni, amit (2) ⇒ (1) bizonyításánál használtunk a 3.2.1. Tételnél.

Emlékeztetünk arra, hogy

$$V_0 := \{\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R} \text{ v.v.} \mid \exists \text{ olyan } \pi \text{ önfinanszírozó stratégia,} \\ \text{melyre } X_0^\pi = 0 \text{ és } X_N^\pi = \xi\}.$$

Legyen

$$V_2 := \{\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R} \text{ v.v.} \mid \mathbb{E}^* \xi = 0\}.$$

Az $f(V_2)$ halmaz ($f$ definícióját lásd a 25. oldalon) nyilván lineáris altér $\mathbb{R}^k$-ban, hiszen $\mathbb{E}^*$ lineáris funkcionál a piachoz tartozó valószínűségi mezőn definiált valószínűségi változók halmazán. A 26. oldalon található 4. lépés szerint $V_0 \subseteq V_2$. Először az (a), (b) és (c) lépésekben megmutatjuk, hogy ez a két altér egybeesik, azaz $V_0 = V_2$.
*(a) lépés.* Tegyük fel, hogy $V_0 \neq V_2$. Ekkor létezik olyan $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \in f(V_2)$ nullvektortól különböző vektor, mely ortogonális az $f(V_2)$ lineáris tér $f(V_0)$ alterére, azaz

$$\langle \tilde{x}, x \rangle = 0 \qquad \text{ha} \quad x \in f(V_0).$$

Mivel $\mathbb{P}^*$ konstrukciójában $q_i > 0$ ha $i = 1, \dots, k$ , így választhatunk olyan kicsi $\varepsilon > 0$ számot, hogy

$$\tilde{q}_i := q_i - \varepsilon \tilde{x}_i > 0$$

minden $i = 1, \ldots, k$ esetén. Legyen $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_k)$ és vegyük észre, hogy

$$\langle \tilde{q}, x \rangle = \langle q, x \rangle - \varepsilon \langle \tilde{x}, x \rangle = 0 \qquad \text{ha} \quad x \in f(V_0). \tag{4.1}$$

*(b) lépés.* Legyen

$$\tilde{\mathbb{P}}(\{\omega_i\}) = \frac{\tilde{q}_i}{\sum_{j=1}^k \tilde{q}_i} \qquad \text{ha} \quad i = 1, \ldots, k.$$

Ekkor $\tilde{\mathbb{P}}$ egy ekvivalens martingál-mérték a piacon, amit ugyanúgy mutatunk meg, ahogy azt $\mathbb{P}^*$ esetén tettük az 5. lépésben a 26. oldalon. Ehhez tekintsünk egy tetszőleges $\tau$ megállítási pillanatot, és idézzük fel az 5. lépésben a 26. oldalon definiált $\pi$ önfinanszírozó stratégiát. Jelöljük a $\tilde{\mathbb{P}}$-re vonatkozó várható értéket $\tilde{\mathbb{E}}$-vel. Ekkor a (4.1) állítás alapján az $\tilde{\mathbb{E}}$ funkcionál eltűnik a $V_0$ halmazon, és így

$$\begin{aligned}
0 = \tilde{\mathbb{E}} X_N^\pi &= \tilde{\mathbb{E}}(\beta_N B_N + \gamma_N S_N) \\
&= \tilde{\mathbb{E}}\left(\left(\frac{S_\tau}{B_\tau} I_{\{\tau<N\}} - \frac{S_0}{B_0}\right) B_N + \frac{S_\tau}{B_\tau} I_{\{\tau=N\}} B_N\right) \\
&= B_N \tilde{\mathbb{E}}\left(\frac{S_\tau}{B_\tau} - \frac{S_0}{B_0}\right),
\end{aligned}$$

ami a 3.1.8. Lemmával együtt azt eredményezi, hogy $\tilde{\mathbb{P}}$ valóban egy ekvivalens martingál-mérték.
*(c) lépés.* A $\mathbb{P}^*$ egyértelműsége alapján azt kapjuk, hogy $\mathbb{P}^* = \tilde{\mathbb{P}}$, ami azzal ekvivalens, hogy

$$q = \alpha \tilde{q} = \alpha q - \alpha \varepsilon \tilde{x},$$

ahol $\alpha = \sum_{j=1}^k q_j / \sum_{j=1}^k \tilde{q}_j$. Tehát

$$(1-\alpha) q = -\alpha \varepsilon \tilde{x}. \tag{4.2}$$

Viszont $\tilde{x} \in f(V_2)$, ezért abból, hogy $\mathbb{E}^*$ eltűnik a $V_2$ halmazon, azt kapjuk, hogy a (4.2) egyenlet csak akkor teljesülhet, ha $\alpha = 1$, és így $\tilde{x}$ nullvektor. Ez viszont nem lehetséges, így ellentmondásra jutottunk, ezért valóban $V_0 = V_2$.
*(d) lépés.* Végül megmutatjuk, hogy $V_0$ és $V_2$ egybeeséséből következik a piac teljessége. Legyen $\xi$ tetszőleges ($\mathcal{F}$-mérhető) valószínűségi változó. Ekkor a $\xi - \mathbb{E}^*\xi$ valószínűségi változó a $V_2 = V_0$ halmazban veszi fel értékeit. Ezért létezik olyan $\breve{\pi} = \{(\breve{\beta}_n, \breve{\gamma}_n)\}_{n=0}^N$ önfinanszírozó stratégia, melyre

$$X_0^{\breve{\pi}} = 0 \quad \text{és} \quad X_N^{\breve{\pi}} = \xi - \mathbb{E}^*\xi.$$



Legyen

$$\breve{\beta}_n' := \breve{\beta}_n + \frac{\mathbb{E}^*\xi}{B_N} \qquad \text{ha} \quad n = 0, \ldots, N.$$

Ekkor a $\breve{\pi}' := \{(\breve{\beta}_n', \breve{\gamma}_n)\}_{n=0}^N$ stratégia nyilván önfinanszírozó, és

$$X_N^{\breve{\pi}'} = \xi,$$

amivel beláttuk a piac teljességét.

**(1) ⇒ (3).** Tegyük fel, hogy a piac teljes, és legyen $(M_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0 \le n \le N}$ egy martingál.

Ekkor a teljességből következik, hogy létezik olyan $\pi = \{(\beta_n, \gamma_n)\}_{n=0}^N$ önfinanszírozó stratégia, melyre

$$X_N^\pi(\omega) = B_N M_N(\omega).$$

Az alapján, hogy $\mathbb{P}^*$ egy ekvivalens martingál-mérték, azt kapjuk, hogy a $(M_n^\pi, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0 \le n \le N}$ sorozat martingál, és így

$$M_n = \mathbb{E}^*(M_N \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^*\left(\frac{X_N^\pi}{B_N} \,\Big|\, \mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}^*(M_N^\pi \mid \mathcal{F}_n) = M_n^\pi.$$

Tehát végülis azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
M_n - M_{n-1} = M_n^\pi - M_{n-1}^\pi &= \frac{\beta_n B_n + \gamma_n S_n}{B_n} \\
&- \frac{\beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}}{B_{n-1}} = \gamma_n \left(\frac{S_n}{B_n} - \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

minden $n = 1, \ldots, N$ esetén, ami azt jelenti, hogy $M$ valóban előáll

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n \gamma_k \Delta m_k, \qquad n = 1, \ldots, N,$$

alakban.

**(3) ⇒ (1).** Legyen $\xi$ egy ($\mathcal{F}$-mérhető) valószínűségi változó, és legyen

$$M_n = \mathbb{E}^*\left(\frac{\xi}{B_N} \,\Big|\, \mathcal{F}_n\right) \qquad \text{ha} \quad n = 0, \ldots, N.$$

Nyilván $(M_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0\le n\le N}$ martingál, ezért léteznek olyan $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető $\gamma_n$, $n = 1, \dots, N$, valószínűségi változók, hogy

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \left( \frac{S_n}{B_n} - \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \right), \qquad n = 1, \dots, N.$$

Legyen

$$\beta_n := M_n - \gamma_n \frac{S_n}{B_n}, \qquad n = 1, \dots, N,$$

valamint

$$\pi := \{(\beta_n, \gamma_n)\}_{n=0}^{N}.$$

A $\beta_n$-ek definíciója alapján teljesülnek az $M_n^\pi = M_n$, $n = 0, \dots, N$ összefüggések, ezért $X_N^\pi = B_N M_N^\pi = B_N M_N = \xi$ is teljesül. Végül megmutatjuk, hogy $\pi$ önfinanszírozó. Valóban,

$$\begin{aligned} B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n &= B_{n-1}\left( \Delta M_n - \Delta\left( \gamma_n \frac{S_n}{B_n} \right) \right) + S_{n-1}\Delta\gamma_n \\ &= B_{n-1}\left( \gamma_n \Delta\left( \frac{S_n}{B_n} \right) - \Delta\left( \gamma_n \frac{S_n}{B_n} \right) \right) + S_{n-1}\Delta\gamma_n \\ &= -B_{n-1}\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\Delta\gamma_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0. \end{aligned}$$

□

**4.0.5. Lemma. (Martingál-reprezentáció)** *A d.i.b.-$(B, S)_N$ piacon minden olyan $(M_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{1\le n\le N}$ martingál, melyre $\mathbb{E}M_N = 0$, előállítható*

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Delta m_k^*, \qquad 1 \le n \le N$$

*alakban alkalmas $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető $\alpha_n$, $1 \le n \le N$, valószínűségi változókkal, ahol*

$$m_n^* := \sum_{k=1}^{n} (\rho_k - r_k), \qquad 1 \le n \le N.$$



**Bizonyítás.** Mivel az $M_n$ $(n = 1, \dots, N)$ valószínűségi változó $\mathcal{F}_n$-mérhető, így léteznek olyan $h_n : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ $(n = 1, \dots, N)$ Borel-mérhető függvények, hogy

$$M_n(\omega) = h_n(\rho_1(\omega), \dots, \rho_n(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

Ezért $M_n$ martingál-tulajdonsága írható

$$\mathbb{E}\big(h_n(\rho_1(\omega), \dots, \rho_n(\omega)) - h_{n-1}(\rho_1(\omega), \dots, \rho_{n-1}(\omega)) \mid \mathcal{F}_{n-1}\big) = 0 \quad (\mathbb{P}^* - m.m.)$$

alakban, vagy ekvivalens módon:

$$\begin{aligned} p\, h_n(\rho_1(\omega), \dots, \rho_{n-1}(\omega), b) + (1-p)\, h_n(\rho_1(\omega), \dots, \rho_{n-1}(\omega), a) \\ = h_{n-1}(\rho_1(\omega), \dots, \rho_{n-1}(\omega)) \quad (\mathbb{P}^* - m.m.). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Legyen

$$\alpha_n := \frac{h_n(\rho_1(\omega), \dots, \rho_{n-1}(\omega), b_n) - h_{n-1}(\rho_1(\omega), \dots, \rho_{n-1}(\omega))}{b_n - r_n}. \tag{4.4}$$

A (4.3) egyenlet alapján könnyen levezethető, hogy

$$\alpha_n = \frac{h_n(\rho_1(\omega), \dots, \rho_{n-1}(\omega), a_n) - h_{n-1}(\rho_1(\omega), \dots, \rho_{n-1}(\omega))}{a_n - r_n}. \tag{4.5}$$

Megszorozva a (4.4) és (4.5) egyenletet $(b_n - r_n)$-vel illetve $(a_n - r_n)$-vel észrevehetjük, hogy ez a két egyenlet azzal ekvivalens, hogy

$$\Delta M_n(\omega) = \alpha_n(\omega)\Delta m_n^*, \qquad n = 2, \dots, N,$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. □

**4.0.6. Tétel.** *Ha a d.i.b.-$(B, S)_N$ piac kamatlábaira és együtthatóira teljesülnek az*

$$a_n < r_n < b_n, \qquad n = 1, \dots, N$$

*egyenlőtlenségek, akkor a piac teljes.*

**Bizonyítás.** Legyen $(M_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0\le n\le N}$ egy martingál, ahol $\mathbb{P}^*$ a 3.1.5. Tételben definiált ekvivalens martingál-mérték. A 4.0.5. Lemma alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$M_n - M_0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Delta m_k^*, \qquad 1 \le n \le N,$$

ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, alkalmas valószínűségi változók, melyek rendre $\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_{N-1}$-mérhetőek, és $m_n^*$-ek a 4.0.5. Lemmában definiált valószínűségi változók. Legyen

$$\gamma_n := \alpha_n \frac{B_n}{S_{n-1}}, \qquad n = 1, \dots, N.$$

Nyilván $\gamma_n$ $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető, és

$$\begin{aligned} M_n &= M_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Delta m_k^* = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \frac{S_{k-1}}{B_k} (\rho_k - r_k) \\ &= M_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \frac{S_{k-1}}{B_{k-1}} \left( \frac{\rho_k + 1}{r_k + 1} - 1 \right) = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta m_k. \end{aligned}$$

A 3.1.5. és 4.0.4. Tételekből következik, hogy a piac teljes. □

# 5. Fejezet

# Opciók

## 5.1. Opciók, mint származtatott értékpapírok

Tekintsünk egy értékpapírpiacot, melyet az 1. Fejezetben már ismertettünk. Ott leírtuk azokat az alapvető értékpapírokat, amelyekkel egy ilyen piacon kereskednek. Ezen alapvető értékpapírok segítségével azonban tudunk újabb, összetettebb pénzügyi szerződéseket is létrehozni. Így újabb értékpapírokat kaphatunk, amelyeket *származtatott értékpapír*oknak nevezünk, hangsúlyozva ezzel azt, hogy ezek más (már létező) értékpapíroktól függnek. A származtatott értékpapír-szerződések a szerződő felek bizonyos jogait tartalmazzák az „alapvető" pénzügyi eszközökre vonatkozóan, ezért értékük is függ ezen „alapvető" pénzügyi eszközök értékétől. Ez az oka annak, hogy gyakran *feltételes követelés*ekként is hivatkoznak a származtatott értékpapírokra az irodalomban. A forward és future szerződések egyaránt említhetőek példaként, mint ahogy az opciós szerződések is származtatott értékpapírok, s ez utóbbi típus a tárgya a következő fejezeteknek.

Elsősorban az ún. európai illetve amerikai opciókra fordítjuk a figyelmünket, amelyek a legismertebb és legelterjedtebb típusú opciók. Mindkét esetben két alapvető osztályát különböztethetjük meg ezen típusoknak, az egyiket vételi, míg a másikat eladási opciónak (vagy opciós ügyletnek) nevezzük.

Egy adott részvényre megkötött *vételi opciós szerződés* azt a jogot biztosítja a papír tulajdonosának (vagy vásárlónak, birtokosnak), hogy a szóban-forgó részvényt az opció eladójától (vagyis kibocsátójától) megvásárolhassa egy, a szerződésben rögzített áron egy jövőbeli időpillanatban vagy időpillanatig (dátumig). Ezzel szemben az *eladási opció* esetén a vevő joga az adott részvény eladása a rögzített áron a meghatározott időben. A szerződésbeli rögzített árat *érvényesítési ár*nak nevezzük és $K$-val fogjuk jelölni ebben a jegyzetben. Azt a végső dátumot, ameddig az opciós jogot érvényesíteni lehet (azaz a vevő az opciós szerződés típusától függően vásárolhat vagy eladhat egy





részvényt) *lejárati idő*nek (dátumnak) nevezik az irodalomban és $T$-vel fogjuk a továbbiakban jelölni, hiszen ez az az utolsó időpont, ameddig a piacot meg kívánjuk figyelni, mint az értékpapír tulajdonosai.

Az *amerikai és az európai típusú opciós ügyletek* a lejárati idővel kapcsolatban tartalmaznak különböző szerződési feltételeket. Az európai opciót csak a lejárati $T$ időben lehet érvényesíteni ellenben az amerikaival, amely a lejáratig bármely időpontban érvényesíthető.

Lényeges kiemelnünk, hogy a fenti joga az opció tulajdonosának természetesen nem kötelessége egyben; az ő döntésén múlik, hogy él-e ezzel a joggal és lehívja az opciót, vagy nem.

## 5.2. Az opció lehívása

Most tekintsünk egy részvényre vonatkozó európai vételi opciót egy értékpapírpiacon. Jelöljük most ezen részvény $t \in [0,T]$ időpontbeli értékét $S_t$-vel. Megjegyezzük ugyanis, hogy az elkövetkezendő opciókról megfogalmazott általános megállapításaink nem csak a diszkrét idejű esetre teljesülnek. Így $B_t, S_t$ helyett az 2.1.1. Definícióbeli $S_1, \dots, S_N, B_1, \dots, B_N$ jelöléseket csak akkor fogjuk használni, ha megjegyzéseink speciálisan csak a diszkrét idejű piacokra érvényesek.

Ha a lejárati $T$ időpillanatban a részvény $S_T$ piaci ára nagyobb, mint az érvényesítési ár, akkor a tulajdonos vásárolhat egy részvényt $K$ áron és eladhatja azt azonnal a piacon $S_T$ áron, hogy ezzel az $S_T - K$ nagyságú profitot realizálja. Ám előfordulhat, hogy $S_T$ kisebb vagy egyenlő, mint $K$, s ezzel az opciós szerződés értéktelenné válik, hiszen semmi értelme nem lenne az opciós jogot érvényesítve részvényt vásárolni, ha a piacon az olcsóbban megszerezhető. Így azt mondhatjuk, hogy az opciós szerződés lényegében felruházza annak tulajdonosát a lejáratkor az

$$(S_T - K)^+ := \max(0, S_T - K)$$

jövedelem megszerzésére, amely nyílvánvalóan egyben az opciót kibocsátó veszteségének felel meg. Másszóval az opció értéke a $T$ időpontban $(S_T - K)^+$.

Ennélfogva könnyen találhatunk korlátokat a $K$ értékére. A $K$ értékét az $S_T$ lehetséges értékeinek tartományából ésszerű venni, igaz, ez az állítás csak akkor használható, ha ezen tartomány valahogy előrejelezhető. Például egy $a$ és $b$ együtthatókkal ellátott d.i.h.b.-$(B,S)_N$ piacon a

$$\min_{\omega\in\Omega}(S_N(\omega)) = S_0(1+a)^N < K < S_0(1+b)^N = \max_{\omega\in\Omega}(S_N(\omega))$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülni, feltéve, hogy a szerződő felek racionális döntéseket hoznak.

Bizonyos módosításokkal a fentiekkel analóg megjegyzéseket tehetünk európai eladási opciók és amerikai opciók esetén is. Mindössze kettőt említünk közülük. A vételi opció tulajdonosával ellentétben az eladási opció tulajdonosa azt szeretné, hogy a részvény ára menjen az érvenyesítési ár alá, hiszen ekkor a piaci árnál magasabbért vásároltathatná meg az opció kibocsátójával a részvényét. Nyilvánvaló, hogy amerikai opciók esetén a fentiekben tett megállapításokban $T$ és $S_T$ szerepét tetszőleges $t \in [0, T]$ és hozzá tartozó $S_t$ játsza.

## 5.3. Pozíciók

A különböző értékpapírok esetén az egyes felek szerződésben játszott szerepe alapján különböző pozíciókat tudunk értelmezni. Azt mondjuk, hogy egy (vételi vagy eladási) opció vásárlója a (vételi vagy eladási) *hossz-spekulációs pozíció*ban (hossz-pozícióban) van, míg az opciót eladó fél a (vételi vagy eladási) *bessz-spekulációs pozíció*t (bessz-pozíciót) birtokolja, melyek megfelelő kötelezettségekkel járnak együtt.

Hasonlóan, a részvény birtoklása egy *részvény hossz-pozíció*t jelent, ellentétben a *részvény bessz-pozíció*val, mely egy fedezet nélküli részvényeladás következményeként azt a kötelezettséget jelenti, hogy egy meghatározott lejárati dátumig kell a részvényt átadni.

Az opciók ismertetésének és besorolásának egy hasznos eszköze az, ha meghatározzuk az egyes pozíciókban a kifizetés értékét arra az időpontra vonatkozóan, amikor az opciós jog érvényesítésre kerül. Sőt, ez az egyedüli információ, amely a továbbiakban a matematikai modellünkhöz szükséges az opciókról. Azt a függvényt, amely megmutatja az opció tulajdonosa által kapott pénzösszeget (az opció érvényesítésének időpontjában), az opcióhoz tartozó *kifizetési függvény*nek nevezzük. Könnyen látható, hogy a kifizetési függvény

- $(S_T - K)^+ := \max(S_T - K, 0)\ (\geq 0)$ európai vételi hossz-pozíciónál, s ennélfogva
- $-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)\ (\leq 0)$ európai vételi bessz-pozíció esetén,
- $(K - S_T)^+ := \max(K - S_T, 0)\ (\geq 0)$ európai eladási hossz-pozíciónál, s így
- $-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)\ (\leq 0)$ európai eladási bessz-pozíciónál.



A fenti képletekben $T$-t $t \in [0, T]$-vel helyettesítve megkapjuk az amerikai opciók különböző pozícióinak megfelelő kifizetési fügvényeit a $t$ időpontra vonatkozóan (ha azok a $t$-ben lennének érvényesítve).

Ahhoz, hogy a teljes nyereséget vagy veszteséget megkapjuk az egyes pozíciók esetén (ld. 5.1. Ábra), módosítanunk kell a fenti formulákat azzal a pénzösszeggel, amit az opcióért fizetett a vásárló a vevőnek a 0 időpillanatban. Ez mindössze az opció ár lejárati időre számított jövőértékének hozzáadását vagy elvételét jelenti. Itt megemlítjük, hogy a közgazdaságtanban és az elméletünkben különösen fontos a diszkontálás vagy jövőértékszámítás segítségével a különböző időpontbeli értékek azonos bázisban kifejezett értékének a meghatározása annak érdekében, hogy azok valóban összehasonlíthatóak legyenek.

Az 5.1. Ábrán a teljes nyereségek kiszámításához a lejárati időt választottuk közös alapként, de valójában ez bármely egyéb időpont is lehetett volna a $[0, T]$ intervallumban. Ezért minden esetben a 0 időpillanatban az opcióért fizetett árat megszoroztuk a diszkont faktor reciprokával (azaz a $B_T/B_0$ faktorral), amely például egy, az 1. Fejezetben ismertetett bináris piac esetén $\prod_{n=1}^{N}(1 + r_n)$.

Az opció kibocsátója létrehozhat egy ún. fedezett vételi pozóciót úgy, hogy az opció eladásával egy időben egy részvényt vásárol. Így a kibocsátó esetleges vesztesége ($(S_T - K)^+$) már fedezve lenne, ha az opciós jogot vele szemben érvényesítenék. Hasonlóan beszélhetünk fedezett eladási pozícióról, amely azt jelenti, hogy egyszerre van a birtokunkban egy részvény és egy eladási opció. Könnyen ellenőrizhető az 5.1. Ábrára pillantva, hogy az alábbi pozíciók két ekvivalenciája (a teljes nyereségekre vonatkozóan) érvényben van:

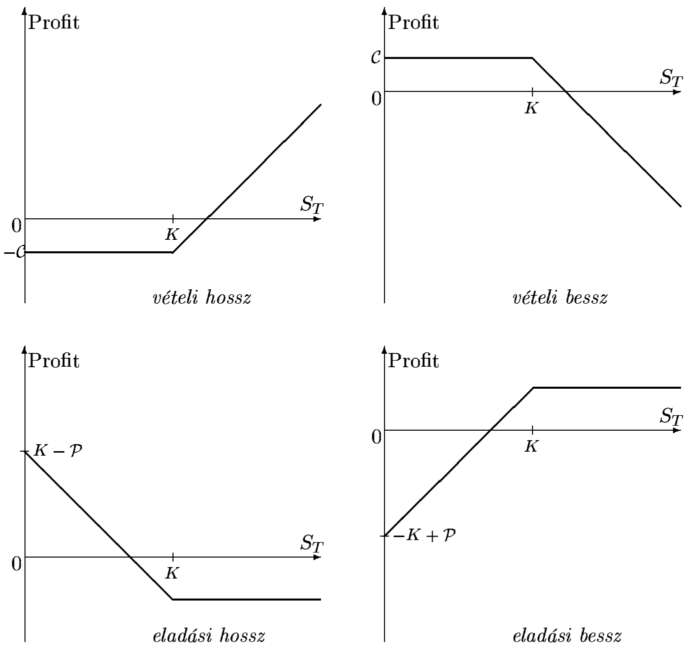
$$\text{fedezett vételi pozíció (részvény hossz + vételi bessz)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{eladási bessz,} \tag{5.1}$$

$$\text{fedezett eladási pozíció (részvény hossz + eladási hossz)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{vételi hossz.} \tag{5.2}$$

Ezek az egyszerű összefüggések különösen az opciókkal való kereskedések első éveiben játszottak fontos szerepet, ugyanis akkor még az eladási opciókk nem voltak engedélyezve, ám (5.1) és (5.2) segítségével ezek a pozíciók „mesterségesen" létrehozhatók voltak.

## 5.4. Az alapfeladat: az opció árazása

A korábbiakban ismertettük az opciók legfontosabb típusait és meghatároztuk azoknak a lejárati időhöz tartozó kifizetési függvényét. Másképpen úgy is




5.1. Ábra: *A teljes profit vagy veszteség európai opcióknál a lejáratkor*
A $\mathcal{C}$ illetve $\mathcal{P}$ a vételi illetve eladási opciók 0 időpontbeli értékének szorzata a diszkont faktor reciprokával, azaz $B_0/B_T$-el. Minden esetben a nyereség vagy veszteség (függőleges tengelyen) az $S_T$ részvényár (vízszintes tengely) függvényeként van ábrázolva.



fogalmazhatnánk, hogy a kifizetési függvény megmutatja az opció lejáratkori árát.

Ebben a fejezetben $\mathcal{C}$ ($\mathcal{P}$) fogja jelölni az éppen vizsgált vételi (eladási) opció árát, annak $Eu$ és $Am$ indexe pedig rendre arra fog utalni, hogy az adott opció európai-e vagy éppen amerikai.

Az opciókkal kapcsolatos alapvető kérdés a következő. *„Mennyit lennénk hajlandóak fizetni a kezdeti* 0 *időpontban egy opciós szerződésért”*, amely feljogosít egy véletlentől függő, azaz bizonytalan összeg realizálására a lejáratkor. Másképpen fogalmazva: *„Mennyi az opció ésszerű (racionális) ára a* 0 *időpillanatban, a vételkor?”*

Tekintsünk egy európai vételi opciót $K$ érvényesítési árral és legyen $T$ a lejáratának ideje. Láttuk, hogy egy ilyen értékpapír azt a jogot biztosítja a vásárlójának, hogy egy részvényt vásárolhasson a lejáratkor $K$ áron. Az opcióárazás problémájához először azt kell tisztáznunk, hogy mit jelentene természetesen az ár ésszerűsége, azaz mit tekintene az opció eladója és vevője egyarányt racionálisnak. Tudjuk, hogy a 0 kezdeti időpontban a kibocsátó megkap egy összeget, nevezetesen az opció árát. Ám a szerződésben egyben kötelezettséget is vállal, amely gyakorlatilag nem más, mint az $(S_T - K)^+$ összeg kifizetésének a kötelezettsége a vásárlónak, amely a $T$ lejáratkor esedékes. Ezért az ésszerűség és korrektség alapján a racionális árnak azt a mennyiséget nevezhetjük, amely biztosítja a lehetőséget a kibocsátó számára, hogy a felmerülő esetleges veszteségeit (amely éppen $(S_T - K)^+$) képes legyen fedezni a lejáratkor.

Ennélfogva arra a megállapításra juthatunk, hogy legyen az opció *ésszerű ára* $\mathbb{C}_{N,f_N}$ (ld. 2.2.10. Definíció), ahol $f_N(S_N) = (S_N - K)^+$. Ezt a következtetést az alábbi megállapításokkal támaszthatjuk alá.

- Ez egy olyan tőkemennyiség, mely lehetővé teszi a kibocsátó számára, hogy a tervezett $(S_N - K)^+$ tőkére egy fedezeti stratégiát szervezzen és ez a minimális ilyen tulajdonságú kezdeti tőke (ld. 2.2.12. Megjegyzés), amely azt jelenti, hogy

- semmilyen ennél alacsonyabb ár esetén nem tudná biztosan teljesíteni a szerződési kötelezettségeit a kibocsátó, és végül

- bármely ennél magasabb ár arbitrázs lehetőséget teremtene, mert ez egy $\mathcal{C} - \mathbb{C}_{N,f_N}$ nagyságú profit azonnali realizálását biztosítaná a kibocsátónak, hiszen $\mathbb{C}_{N,f_N}$ nagyságú tőke elég lenne a szerződésbeli kötelezettségei kielégítésére úgy, ahogy azt már fent leírtuk (azaz $\mathbb{C}_{N,f_N}$ kezdeti tőkével indulva egy fedezeti stratégiát $(S_N - K)^+$-re végrehajtva).

Hasonló módon kaphatjuk bármely európai opció árát is, ha $f_N$ helyébe az opció megfelelő kifizetési függvényét írjuk.

Most pedig tekintsünk általánosan egy olyan feltételes követelést, amelynek kifizetése az $f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ alakban írható fel. Ez azt jelenti, hogy a kifizetés a részvény árfolyamatának egész múltjától függ. Ekkor ugyancsak alkalmas a fenti módszer egy ilyen feltételes követelés árazására.

Később még látni fogjuk, hogy bármely, a most leírt racionális ártól különböző opcióár arbitrázs lehetőséget teremtene vagy a vevőnek vagy az eladónak.

Kettő fontos kérdés maradt nyitott az opcióárazással kapcsolatban az általunk tárgyalt modellben. Egyrészt ki kell számolni az ésszerű árat, a gyakorlatban is alkalmazható formulákat kell levezetnünk. Másrészt meg kell mutatnunk, hogy létezik legalább egy olyan önfinanszírozó stratégia, mely értékfolyamatának kezdeti értéke ($X_0^\pi$) éppen a racionális ár és annak végső értéke a lejáratkor ($X_T^\pi$ or $X_N^\pi$) pedig az opció kifizetési függvényének értékét adja. Természetesen a racionális árra levezetett formulák több változó függvényei, melyek akár a szerződéstől függnek vagy a piaci modell bizonyos paraméterei. Így függhet az opció ára például: az érvényesítési $K$ ártól, a lejárati $T$ dátumtól, a kezdeti $S_0$ és $B_0$ részvény- illetve kötvényártól, a részvény árfolyamatát leíró sztochasztikus folyamat paramétereitől és a kötvény kamatlábától (amely leírja a kötvény árfolyamatát vagy vice versa).

## 5.5. Vételi versus eladási opciók

Most tegyük fel, hogy a piacon az opciókkal történő kereskedés azok racionális árain folyik. Ekkor a vételi és az eladási opciók árai között közvetlen összefüggést találhatunk. Néhányat közülük megemlítünk.

Európai opciók esetén (amelyeknek azonosak a szerződésbeli paramétereik: az érvényesítési ár és a lejárat) a

$$\mathcal{C}^{Eu} + K\frac{B_0}{B_T} - S_0 = \mathcal{P}^{Eu}$$

egyenlet írja le a kapcsolatot, amelyet vételi-eladási paritásként ismer az irodalom. Ennek ellenörzéséhez vegyünk két portfóliót. Az I. portfólió tartalmazzon egy európai vételi opciót és $KB_0/B_T$ egységnyi kötvényt, míg a II. portfólió egy európai eladási opcióból és egy részvényből álljon. (Megjegyezzük, hogy a kettő típusú értékpapírt tartalmazó portfólió mintájára (ld. 1. Fejezet) értelmezhető általánosan $n$ különböző értékpapírból álló portfólió is természetesen, ahogy azt általában a közgazdaságtanban teszik.) Ekkor az I. portfólió értéke

$$(S_T - K)^+ + K \;=\; \max(S_T, K)$$

a $T$ időpillanatban, ahogy ennyi az értéke a II. portfóliónak is ekkor, hiszen

$$(K - S_T)^+ + S_T = \max(K, S_T).$$



Ezért ezen portfóliók értéke bármely $[0, T]$-beli időpontban meg kell, hogy egyezzen, így speciálisan a

$$\mathcal{C}^{Eu} + K\frac{B_0}{B_T} = \mathcal{P}^{Eu} + S_0$$

összefüggésnek is érvényben kell lenni.

Amerikai opciók esetén az árak különbségére lehet hasonló módszerrel bizonyos korlátokat találni. Ezzel nem kívánunk foglalkozni. (Az érdeklődő olvasó például [Hull 93]-ban találhatja meg ezen korlátokat.)

## 5.6. Opciók a valóságban

Végezetül megemlítjük, hogy az opciós ügyletek fogalma igazán 1973-tól vált elterjedtté az egész világon, amikor először kezdtek kereskedni opciókkal szervezett értékpapírpiacon. Ez volt egyben az opcióárazás problémájában is a nagy áttörés éve, hiszen F. Black és M. Scholes ekkor közölték a híres és széleskörűen alkalmazott eredményüket, mely Black-Scholes formulaként vált ismertté az irodalomban (ld. [Black and Scholes 73]). Azonban érdemes itt megemlíteni, hogy ez a formula a folytonos idejű piacokra vonatkozik (ld. 7. Fejezet).

Ma már számos tőzsdén kereskednek opciós értékpapírokkal, a leghíresebbek talán a Chicago Board Options Exchange (CBOE) vagy a Philadelphia Exchange (PHLX) és számos típusú opciós ügyeletek léteznek már, amelyek vagy az érvényesítés feltételeiben, vagy az érvényesítési ár meghatározásában vagy éppen abban különböznek, hogy milyen (alapvető) értékpapírra vonatkozik az opciós jog. Most csak néhány további típust említünk meg, hogy érzékeltessük ezek gazdagságát. Egyúttal ismét kiemeljük, hogy elméleti modellünkben is opciós szerződést lehet létrehozni bármely rizikós jószágra vagy aktívára vonatkozóan, amely eleget tesz a modellbeli részvény definíciójának, továbbá azt is érdemes kiemelni, hogy a következő részekben ismertetett árazási formulákat a feltételes követelések egy széles skálájára lehet alkalmazni.

Attól függően, hogy mire vonatkozik az opciós jog, beszélhetünk részvényre, forward szerződésre, külföldi valutára vonatkozó opciós ügyletekről, melyek igen elterjedtek, ám az opciós jog akár egy másik opcióra is vonatkozhat.

A következő példákat diszkrét idejű piacokra adjuk meg, így ismét a $B_n$ és $S_n$ jelölést alkalmazzuk, ahol $n = 1, \ldots, N$ (ld. 2.1.6. Definíció).

Az ún. look-back opció, mely szintén egy származtatott értékpapír, esetén az európai opció analógiájára történik az ügylet megkötése azzal a különbséggel, hogy az érvényesítési ár itt a részvény lejáratig való teljes múltjától függ, nevezetesen a kifizetési függvény az alábbi formában definiált:

$$(S_N - K_N)^+, \qquad \text{ahol} \quad K_N := \min(S_0, S_1, \dots, S_N)$$

vételi opció esetén és

$$(K_N^* - S_N)^+, \qquad \text{ahol} \quad K_N^* := \max(S_0, S_1, \dots, S_N)$$

eladási opció esetén.

Egy további típus az ázsiai opció, melynek érvényesítési ára és így a kifizetési függvénye a részvényár $[0, T]$ intervallum alatt felvett értékeinek átlagával van kifejezve. Pontosabban, a vételi és eladási kifizetési függvények alakja ekkor is $(S_N - \overline{K})^+$ illetve $(\overline{K} - S_N)^+$, azonban ebben az esetben

$$\overline{K} := \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} S_i.$$

Végül megemlítjük még a Bermuda opciót, melyet az érvényességének $[0, T]$ intervalluma alatt csak bizonyos (a szerződésben meghatározott) napokon lehet érvényesíteni.

Az érdeklődő olvasó további érdekességeket és hasznos közgazdasági ismereteket találhat [Hull 93]-ban az opciókról és egyéb értékpapírokról.

# 6. Fejezet

# Európai opciók árazása

## 6.1. Főtételek

A következő lemma állítása meglehetősen triviális, de fontosnak tartjuk hangsúlyozni, mert megmagyarázza az ekvivalens martingál-mérték szerepét az opcióelméletben.

**6.1.1. Lemma.** *Legyen $\pi$ egy önfinanszírozó $(x, f_N)$-fedezeti stratégia egy d.i.-$(B,S)_N$ piacon, ahol $x \in \mathbb{R}^+$ és $f_N : \mathbb{R}^{N+1} \mapsto \mathbb{R}$ Borel-függvény, és tegyük fel, hogy $\mathbb{P}^*$ egy ekvivalens martingál-mérték a piacon.*

*Ekkor*

$$x \geq \frac{B_0}{B_N}\, \mathbb{E}^* f_N(S_0, S_1, \dots, S_N),$$

*és ha $\pi$ ráadásul minimális $(x, f_N)$-fedezeti stratégia, akkor*

$$x = \frac{B_0}{B_N}\, \mathbb{E}^* f_N(S_0, S_1, \dots, S_N).$$

**Bizonyítás.** Mivel $(M_n^\pi, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0 \leq n \leq N}$ martingál, így

$$\begin{aligned}\frac{B_0}{B_N}\, \mathbb{E}^* f_N(S_0, S_1, \dots, S_N) &\leq \frac{B_0}{B_N}\, \mathbb{E}^* X_N^\pi = B_0\, \mathbb{E}^* \frac{X_N^\pi}{B_N} \\ &= B_0\, \mathbb{E}^* M_N^\pi = B_0 M_0^\pi = x.\end{aligned}$$

□

**6.1.2. Tétel. (Feltételes követelések árazása)** *Jelölje $\mathbb{P}^*$ az (egyértelműen létező) ekvivalens martingál-mértéket egy d.i.-$(B,S)_N$ piacon, és legyen $f_N : \mathbb{R}^{N+1} \mapsto \mathbb{R}$ Borel-függvény. Ekkor*

$$\mathbb{C}_{N,f_N} = \frac{B_0}{B_N}\, \mathbb{E}^* f_N(S_0, S_1, \dots, S_N).$$





**Bizonyítás.** A 2.2.11. Lemmából következik, hogy létezik olyan $x \in \mathbb{R}^+$, hogy $\Pi(x, f_N) \neq \emptyset$, ami azt jelenti, hogy $\mathbb{C}_{N,f_N} < \infty$. A 6.1.1. Lemma alapján nyilvánvaló, hogy

$$\mathbb{C}_{N,f_N} \geq \frac{B_0}{B_N}\, \mathbb{E}^* f_N(S_0, S_1, \dots, S_N). \tag{6.1}$$

Továbbá a piac teljessége biztosítja, hogy létezik olyan $\pi$ önfinanszírozó minimális $(x, f_N)$-fedezeti stratégia, melyre

$$X_0^\pi = \frac{B_0}{B_N}\, \mathbb{E}^* f_N(S_0, S_1, \dots, S_N),$$

és így $X_0^\pi \geq \mathbb{C}_{N,f_N}$, azaz (6.1)-ben egyenlőség teljesül. □

**6.1.3. Megjegyzés.** A 4.0.4. Tétel bizonyításának **(3)** ⇒ **(1)** irányából már könnyen látható, hogy az $f_N(S_0, S_1, \dots, S_N) \geq 0$ egyenlőtlenségből közvetlenül következik egy olyan minimális $(\mathbb{C}_{N,f_N}, f_N)$-fedezeti stratégia létezése, melynek értékfolyamata nemnegatív ($X_n^\pi \geq 0, \quad n = 0, \dots, N$).

## 6.2. Néhány széles körben használt árazási formula

**6.2.1. Tétel. (Európai opció árazása)** *Tekintsünk egy olyan d.i.b.-$(B,S)_N$ piacot, ahol az $\{r_n\}_{n=1}^N$ kamatlábakra és az $\{a_n\}_{n=1}^N$, $\{b_n\}_{n=1}^N$ együtthatókra teljesülnek az $a_n < r_n < b_n$ $(n = 1, \dots, N)$ egyenlőtlenségek. Legyen $f_n : \mathbb{R}^{N+1} \mapsto \mathbb{R}$ Borel-függvény.*

**(1)** *Az $f_N(S_0, S_1, \dots, S_N)$ kifizetési függvényű európai opció ésszerű ára*

$$\mathbb{C}_{N,f_N} = \frac{1}{\prod_{n=1}^N (1 + r_n)}\, \mathbb{E}^* f_N(S_0, S_1, \dots, S_N),$$

*ahol $\mathbb{E}^*$ a $\mathbb{P}^*$-ra vonatkozó várható értéket jelöli, és*

$$\mathbb{P}^*(\rho_n = b_n) = p_n^* := \frac{r_n - a_n}{b_n - a_n}, \qquad n = 1, \dots, N.$$

**(2)** *Létezik $\pi$ önfinanszírozó stratégia, mely minimális $(\mathbb{C}_{N,f_N}, f_N)$-fedezeti stratégia.*

**(3)** *Egy ilyen stratégiát adnak meg a következő képletek:*

$$\pi := \{\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)\}_{n=0}^N,$$

$$\gamma_n := \frac{\alpha_n \beta_n}{S_{n-1}},$$

$$\beta_n := \frac{X_{n-1}^\pi - \gamma_n S_{n-1}}{B_{n-1}}, \qquad n = 1, \dots, N,$$

*ahol*

$$X_n^\pi := \frac{1}{\prod_{k=n+1}^N (1+r_k)} \mathbb{E}^*\big(f_N(S_0, S_1, \dots, S_N) \mid \mathcal{F}_n\big),$$

*és $\alpha_n$ $(n = 1, \dots, N)$ az $X_n^\pi / B_n$ folyamatnak a 4.0.5. Lemmában megadott martingál-reprezentációjában szereplő $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető együtthatója.*

**Bizonyítás.** A 6.1.2. Tételből következik **(1)**, a 4.0.6. Tételből pedig **(2)** és **(3)**. □

**6.2.2. Következmény.** *Tegyük fel, hogy teljesülnek a 6.2.1. Tétel feltételei. Tegyük fel, hogy $f_N$ a következő alakban írható:*

$$g\big(S_N(\omega)\big) = f_N\big(S_0(\omega), S_1(\omega), \dots, S_N(\omega)\big), \qquad \forall\, \omega \in \Omega,$$

*ahol $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ Borel-függvény.*

*Ekkor*

$$\mathbb{C}_{N,f_N} = d \sum_{H\in\Gamma} g\left(S_0 \prod_{\substack{1\le n\le N\\ n\in H}} (1+b_n) \prod_{\substack{1\le n\le N\\ n\notin H}} (1+a_n)\right) \prod_{\substack{1\le n\le N\\ n\in H}} p_n^* \prod_{\substack{1\le n\le N\\ n\notin H}} (1-p_n^*), \tag{6.2}$$

*ahol $d$ a diszkont faktor, azaz*

$$d = \frac{1}{\prod_{n=1}^N (1+r_n)}$$

*és a jelölések ugyanazok, mint a 6.2.1. Tételben, továbbá $\Gamma$ az $\{1, 2, \dots, N\}$ halmaz hatványhalmaza.*[1] *Speciálisan,*

$$\mathbb{C}_{N,f_N} = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{k=0}^N g\left(S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k}\right) \binom{N}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \tag{6.3}$$

*a homogén bináris piacon, ahol $p^* := (r-a)/(b-a)$.*

**Bizonyítás.** Nyilvánvaló, hogy a (6.2) és (6.3) formulák értéke éppen

$$\frac{1}{\prod_{n=1}^N (1+r_n)} \mathbb{E}^* g(S_N), \quad \text{illetve} \quad (1+r)^{-N} \mathbb{E}^* g(S_N).$$

□

[1] $\Gamma$ a $\{1, 2, \dots, N\}$ halmaz összes részhalmazainak rendszere.



**6.2.3. Következmény. (Cox-Ross-Rubinstein árazási formula)** *A d.i.h.b.-$(B,S)_N$ piacon az európai vételi opció ésszerű ára $K$ $(K > 0)$ lejárati ár és $(S_N - K)^+$ kifizetési függvény esetén*

$$\mathcal{C}_{N,K}^{call} = S_0\, \mathbb{B}(k_0, N, \tilde{p}) - K(1+r)^{-N}\, \mathbb{B}(k_0, N, p^*),$$

*ahol*

$$k_0 := 1 + \left[ \frac{\log \dfrac{K}{S_0(1+a)^N}}{\log \dfrac{1+b}{1+a}} \right]$$

*és*

$$\mathbb{B}(j, N, p) := \begin{cases} \sum_{k=j}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} & \textit{if } k \le N,\ k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \textit{egyébként}, \end{cases}$$

*valamint*

$$\tilde{p} = \left(\frac{1+b}{1+a}\right) p^*, \qquad p^* = \frac{r-a}{b-a},$$

*ahol $[y]$ az $y \in \mathbb{R}$ szám egész részét jelöli.*

**Bizonyítás.** Legyen $g(x) = \max(0, x-K)$, és alkalmazzuk a 6.2.2. Következményt.

Tegyük fel, hogy a piacon egy olyan $\tilde{\omega} \in \Omega$ elemi esemény következett be, melynek $(\rho_1(\tilde{\omega}), \dots, \rho_1(\tilde{\omega}))$ realizációi $k$ $(0 \le k \le N)$ alkalommal tartalmazzák a $1+b$ számot, azaz a megfigyelt időintervallumban a részvényár $k$-szor ugrott felfelé. Ekkor

$$g(S_N(\tilde{\omega})) = \max\left(0, S_0(1+a)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k - K\right),$$

továbbá

$$S_0(1+a)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k - K > 0$$

akkor és csak akkor teljesül ha

$$k > \frac{\log \dfrac{K}{S_0(1+a)^N}}{\log \dfrac{1+b}{1+a}},$$

azaz, ha $k \geq k_0$. Ezért azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{call}_{N,K} := \mathbb{C}_{N,f_N} &= S_0 \sum_{k=k_0}^{N} \binom{N}{k} p^{*k}(1-p^*)^{N-k} \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k \\ &- K(1+r)^{-N} \sum_{k=k_0}^{N} \binom{N}{k} p^{*k}(1-p^*)^{N-k} \\ &= S_0 \mathbb{B}(k_0, N, \tilde{p}) - K(1+r)^{-N} \mathbb{B}(k_0, N, p^*), \end{aligned}$$

mivel

$$\begin{aligned} 1-\tilde{p} = 1 - p^* \frac{1+b}{1+r} &= \frac{(b-a)(1+r)-(r-a)(1+b)}{(b-a)(1+r)} \\ &= \frac{(b-r)(1+a)}{(b-a)(1+r)} = (1-p^*)\,\frac{1+a}{1+r}. \end{aligned}$$

□

**6.2.4. Következmény. (Put-Call paritás)** *A d.i.b.-$(B,S)_N$ piacon az európai eladási opció ésszerű ára $K$ $(K > 0)$ lejárati ár és $(K - S_N)^+$ kifizetési függvény esetén*

$$\mathcal{C}^{put}_{N,K} = \mathcal{C}^{call}_{N,K} - S_0 + \frac{K}{\prod_{n=1}^{N}(1+r_n)},$$

*ahol $\mathcal{C}^{call}_{N,K}$ a megfelelő vételi opció ésszerű ára (ugyanolyan lejárati ár és kifizetési függvény esetén).*

**Bizonyítás.**

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{put}_{N,K} &:= \frac{1}{\prod_{n=1}^{N}(1+r_n)} \mathbb{E}^* \max(0, K - S_N) \\ &= \frac{1}{\prod_{n=1}^{N}(1+r_n)} \mathbb{E}^* \big(\max(S_N - K, 0) - S_N + K\big) \\ &= \mathcal{C}^{call}_{N,K} - \frac{1}{\prod_{n=1}^{N}(1+r_n)} \mathbb{E}^* S_N + K(1+r)^{-N} \\ &= \mathcal{C}^{call}_{N,K} - S_0 + \frac{K}{\prod_{n=1}^{N}(1+r_n)}\,, \end{aligned}$$



mivel a $\rho_1, \dots, \rho_N$ valószínűségi változók függetlensége miatt nyílvánvaló, hogy $\mathbb{E}^* S_N = S_0 \prod_{n=1}^{N}(1+r_n)$, ahol $\mathbb{P}^*$ a piacon egyértelműen létező ekvivalens martingál-mérték. □

## 6.3. Gyakorlati árazási példa

Ebben a részben egy egyszerű példán keresztül kívánjuk megmutatni, hogy hogyan alkalmazhatjuk a korábban ismertetett módszereket a megértés segítése érdekében.

Tekintsünk most egy valuta opciós ügyletet (azaz egy külföldi valutára vonatkozó opciót) egy diszkrét idejű $(B,S)_1$ piacon. Legyen az alapul szolgáló pénznem a német márka, így tehát az árakat ennek egységében fejezzük ki, az aktuális kamatláb 5% és legyen az amerikai dollár a szóbanforgó valuta, melynek jelenlegi átváltási rátája a márkával szemben $1,7$.

Most tekintsünk egy 100 US \$-ra vonatkozó európai vételi opciós ügyletet, melynek érvényesítési ára 170 DM és lejárati ideje pedig éppen egy év. Tegyük fel, hogy a dollár átváltási árfolyama egy év múlva két értéket vehet fel: vagy $1,53$ vagy $2,21$. Tehát az egyik esetben 10% lenne a dollár árfolyamcsökkenése a márkával szemben, míg a másik eset 30%-os emelkedést jelentene.

Ebben a példában tehát a kötvény szerepét a német márka játsza és a részvény egy egységének pedig 100 US \$ felel meg. A fenti feltevéseinket az alábbi formában is írhatjuk (ld. 2.1.6. Definíció):

$$B_0 = 1, \quad r_1 = 0,05, \quad B_1 = 1,05$$

$$S_0 = 170, \quad \text{and} \quad S_1 = (1+\rho_1)S_0,$$

ahol $\rho_1$ vagy az $a_1 = -0,1$ vagy a $b_1 = 0,3$ értéket veheti majd fel a lejáratkor. Továbbá $K = 170$ és

$$p^* = \mathbb{P}^*(\rho_1 = b_1) = \frac{r_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{0,05 + 0,1}{0,3 + 0,1} = 0,375.$$

A kifizetési függvény esetünkben $\max(S_1 - K, 0)$ és ennélfogva az opció ésszerű ára (ld. 6.2.2. Következmény vagy 6.2.1. Tétel):

$$C = \frac{1}{1,05}(51 \cdot p^* + 0 \cdot (1-p^*)) = \frac{51 \cdot 0,375}{1,05} = 18,21.$$

Most megadjuk azt a stratégiát, amelyet az eladónak kell követni annak érdekében, hogy kötelezettségeinek eleget tudjon tenni. A 4.0.5. Lemma (4.4) sora alapján

$$\alpha_1 := \frac{51/1,05 - 18,21}{0,3 - 0,05} = 121,42$$

vagy akár ugyanezen lemma (4.5) sorából

$$\alpha_1 = \frac{0 - 18,21}{-0,1 - 0,05} = 121,42.$$

Ekkor a 6.2.1. Tétel szerint

$$\gamma_1 := \frac{\alpha_1 B_1}{S_0} = 0,75,$$

$$\beta_1 := \frac{C - \gamma_1 S_1}{B_0} = -109,28,$$

$$\pi_0 := (C, 0), \quad \text{és} \quad \pi_1 := (-109,28, 0,75).$$

A 0 időpillanatban az eladó megkapja a $C$ összeget az opcióért és ekkor a fenti stratégiának megfelelően kölcsönt kell felvennie 109, 28 DM összegben. Így $109,28 + 18,21$ DM birtokában vásárol 75 US dollárt.

A lejárati $T$ időpontban $109,28 \cdot 1,05 = 114,75$ DM az eladó adóssága, amelyet vissza kell fizetnie a banknak. Nyílván két eset állhat elő. Ha a dollár átváltási rátája emelkedett ($\rho_1 = b_1$), akkor az eladó tőkéjének összege

$$X_1^\pi = -114,75 + 0,75 \cdot 221 = 51,$$

azaz 51 márkája marad azután, hogy visszafizette a kölcsönt a banknak. Ez pedig éppen az az összeg, melyet az opció vásárlójának kell fizetnie. (Másképpen fogalmazva ez az az összeg, amelyet veszteségként realizál az eladó, ha a vevő él az opciós jogával.) Ha azonban a dollár átváltási rátája csökkent ($\rho_1 = a_1$), akkor a vevő által birtokolt dollármennyiség pontosan elég lesz a kölcsön visszafizetésére, hiszen

$$X_1^\pi = -114,75 + 0,75 \cdot 153 = 0.$$

Ezen esetben nyílvánvaló, hogy az opciós jogával nem fog élni a vevő.

Láttuk tehát, hogy mindkét esetben eleget tud tenni kötelezettségeinek az opció kibocsátója.

# 7. Fejezet

# Folytonos idejű modellek

Eddig a feltételes követelések értékelésének problémáját és egyéb kapcsolódó kérdéseket diszkrét idejű modellekben vizsgáltuk. Ahhoz, hogy ugyanezekre a problémákra meg tudjunk válaszolni, a folytonos idejű modellek matematikai felépítésével kezdünk foglalkozni, mely a diszkrét idejű eset analógiájára történik. Megpróbáljuk megtartani az eddig használt terminológiát és szerkezetet amennyire ez csak lehetséges, ezért az ezután következő fogalmakhoz csak akkor fűzünk megjegyzést, ha az eltérés jelentős. Mindazonáltal megjegyezzük, hogy az eszközeink megfelelői időnként extra technikai feltételeket kívánnak meg már csak azért is, hogy azok egyáltalán jól-definiáltak legyenek.

## 7.1. A folytonos idejű piacok

A „*folytonos idejű*" jelző itt arra utal, hogy véve megint egy $[0,T]$ időintervallumot, ahol 0 a jelenlegi időpont és $T$ a jövőbeli lejárati idő ($T \in \mathbb{R}^+$), a $[0,T]$ időintervallum minden $t$ pillanata kereskedési időpont. Ez azt jelenti, hogy az árak tetszőleges időpontban változhatnak $T$-ig, és hogy a kereskedés szintén megengedett tetszőleges $t \in [0,T]$ időpontban. Tehát minden folyamat (mint például az ár, az érték vagy a portfólió folyamata) az egész $[0,T]$ intervallumon van definiálva.

Megtartjuk a piacra tett főbb feltételeket: két pénzügyi eszközzel lehet kereskedni (a determinisztikus, azaz véletlentől nem függő kötvénnyel és a véletlentől függő értékű részvénnyel), nincsenek tranzakciós költségek, és megengedett kölcsön felvétele és kölcsön adása kockázatmentes kamatlábbal. A $B$, $S$, $\beta$, $\gamma$, $\pi$, $X^\pi$ és $M^\pi$ jelölések ugyanazokat az árakat, illetve aktívákat jelölik mint eddig, és a $t$ ($t \in [0,T]$) index ezen folyamatok időparaméterét jelöli.

Feltehetjük a következő kérdést: „Hogyan karakterizálható egy stratégia önfinanszírozó jellege?" Ehhez először képzeljük el, hogy a befektető a portfólióját csak $k$ alkalommal változtathatja meg a $T$ időpontig, mondjuk a $0 <$





$t_1 < t_2 < \ldots < t_k < T$ időpontokban, és legyen $t_0 := 0$, $t_{k+1} := T$. Ekkor a $\pi := \{\pi_t = (\beta_t, \gamma_t) \mid t \in [0,T]\}$ stratégiája

$$\beta_t = \sum_{i=0}^{k} 1_{(t_i,t_{i+1}]}(t)\ \beta_{t_{i+1}} \quad \text{és} \quad \gamma_t = \sum_{i=0}^{k} 1_{(t_i,t_{i+1}]}(t)\ \gamma_{t_{i+1}}$$

alakú, ezért a tőkenyeresége $[0,T]$-ben:

$$\sum_{i=0}^{k}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\beta_{t_{i+1}} + \sum_{i=0}^{k}(S_{t_{i+1}} - S_{t_i})\gamma_{t_{i+1}}$$
$$= \int_0^T \beta_t dB_t + \int_0^T \gamma_t dS_t.$$

Ezért indokolt egy $\pi$ stratégiát akkor nevezni önfinanszírozónak, ha

$$X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t = X_0^\pi + \int_0^t \beta_t dB_t + \int_0^t \gamma_t dS_t$$

teljesül minden $t$ időpontban, ahol bizonyos feltételek mellett a fenti sztochasztikus integrálok értelmesek.

**7.1.1. Definíció. (Folytonos idejű $(B,S)_T$ piac)**
*Egy $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t), B = (B_t), S = (S_t), T\}$ halmazt folytonos idejű $(B,S)_T$ piacnak nevezünk, ha*

- $T \in \mathbb{R}^+$,
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *valószínűségi mező ellátva az $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t \mid t \in [0,T]\}$ standard filtrációval,*
- $B = \{B_t \mid t \in [0,T]\}$ *a kötvény árfolyamata, egy determinisztikus függvény, mely korlátos változású a $[0,T]$ intervallumon,*
- $S = \{S_t \mid t \in [0,T]\}$ *a részvény árfolyamata, mely egy pozitív értékű, jobbról folytonos, balról határérrtékkel rendelkező, $\mathbb{F}$-hez adaptált sztochasztikus folyamat.*

**7.1.2. Definíció. (Black-Scholes piac)**
*A folytonos idejű $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t), B = (B_t), S = (S_t), T\}$ $(B,S)_T$ piacot Black-Scholes piacnak nevezzük, ha*

- $B_t = B_0 e^{rt}$ *ha $t \in [0,T]$, ahol $B_0 > 0$ és $r \geq 0$,*

- *az $S = \{S_t | t \in [0,T]\}$ részvény árfolyamatot az*

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s, \quad t \in [0,T] \tag{7.1}$$

*sztochasztikus integrálegyenlet határozza meg, ahol $W = \{W_t | t \in [0,T]\}$ standard Brown-mozgás (vagyis Wiener-folyamat) az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$-en, és az $\mathbb{F}$ filtrációt a $W$ generálja, azaz*

$$\mathcal{F}_t = \sigma\big\{\sigma\{W_s \mid 0 \le s \le t\} \cup \{A \in \mathcal{F} \mid \mathbb{P}(A) = 0\}\big\},$$

- *$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $S_0 > 0$ konstansok.*

**7.1.3. Megjegyzés.** A (7.1) sztochasztikus integrálegyenlet formálisan írható differenciálegyenlet alakjában is:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad t \in [0,T], \tag{7.2}$$

de a (7.2) egyenlet precíz értelmezése a (7.1) egyenlettel történik.

Azt mondjuk, hogy az $S = \{S_t \mid t \in [0,T]\}$ folytonos folyamat erős megoldása a (7.1) egyenletnek, ha

- adaptált az $\mathbb{F}$ filtrációhoz,
- $\int_0^t S_s^2 ds < \infty$ $\mathbb{P}$-m.m. minden $t \in [0,T]$ esetén, és
- $S$-re $\mathbb{P}$-m.m. teljesül a (7.1) egyenlet minden $t \in [0,T]$ esetén.

Megmutatjuk, hogy az

$$S_t := S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right), \quad t \in [0,T],$$

folyamat egyértelmű megoldása (7.1)-nek. Valóban, az Itô-formulával (lásd [Rogers and Williams], VI.39) azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} S_t - S_0 &= \int_0^t \sigma S_s dW_s + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) S_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 S_s d[W]_s \\ &= \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s, \quad t \in [0,T], \end{aligned}$$

ahol $[W]$ a $W$ kvadratikus variációs folyamatát jelöli. Az egyértelműség közvetlenül következik abból, hogy a (7.1)-ban szereplő együtthatófüggvények (vagyis az $f_1(x) = \mu x$ és $f_2(x) = \sigma x$ függvények) lineárisak (ezért nyilván teljesítik



a Lipschitz-feltételt, lásd [Chung and Williams 90], 10.2 fejezet). Itt az erős megoldást abban az értelemben értjük, ahogy azt [Chung and Williams 90] tárgyalja, viszont megemlítjük, hogy a fogalomnak egyéb értelmezései is találhatóak a szakirodalomban, melyek nem feltétlenül ekvivalensek azzal, amit mi használunk.

**7.1.4. Definíció.** *Azt mondjuk, hogy az f.i.-$(B,S)_T$ piacon $\mathbb{P}^*$ ekvivalens martingál-mérték (EMM), ha*

- *$\mathbb{P}^*$ valószínűségi mérték $(\Omega, \mathcal{F})$-en,*
- *$\mathbb{P}$ és $\mathbb{P}^*$ ekvivalensek, és*
- *az $\{S_t/B_t \mid t \in [0,T]\}$ folyamat martingál a $\mathbb{P}^*$-re nézve.*

**7.1.5. Jelölés.** *Egy folytonos idejű $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t), B = (B_t), S = (S_t), T\}$ piacot az egyszerűség kedvéért f.i.-$(B,S)_T$-vel fogunk jelölni és nem írjuk ki a hozzá tartozó valószínűségi mezőt és filtrációt, ha az nem okoz félreértést. Speciálisan, ha létezik EMM rajta, akkor az f.i.-$(B,S)_T^*$ jelölést fogjuk használni. A Black-Scholes $(B,S)_T$ piac alatt azt értjük, hogy a piac teljesíti a 7.1.2. Definíció követelményeit. Az elméletünkben szereplő összes valószínűségi mérték ekvivalens $\mathbb{P}$-vel, ezért elegendő $\mathbb{P}$-m.m. vagy $\mathbb{P}^*$-m.m. stb. helyett a m.m. jelölést használnunk.*

**7.1.6. Megjegyzés.** A parciális integrálás képlete alapján:

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t X_{s-} dY_s + \int_0^t Y_{s-} dX_s + [X,Y]_t, \quad t \in [0,T],$$

mely érvényes $X = \{X_t \mid t \in [0,T]\}$ és $Y = \{Y_t \mid t \in [0,T]\}$ RCLL szemimartingálokra (lásd [Rogers and Williams], VI. 38). Ezért szemimartingálok szorzata is szemimartingál. Továbbá, a szemimartingál tulajdonság invariáns ekvivalens mértékcserével szemben.

Mivel $B$ korlátos változású és $S/B$ martingál egy $\mathbb{P}^*$ EMM-re nézve egy f.i.-$(B,S)_T$ piacon, így egy EMM létezése maga után vonja, hogy $S$ szemimartingál a $\mathbb{P}$ piaci mértékre nézve. Ez a tény teszi lehetővé azt, hogy az önfinanszírozó stratégia fogalmát egyszerűen tudjuk definiálni. Megjegyezzük, hogy az alábbi (7.3) önfinanszírozási feltételben szereplő sztochasztikus integrálok léteznek. Úgy is lehetne definiálni az önfinanszírozó stratégia fogalmát, hogy nem használjuk az EMM-et, viszont megkövetelnénk bizonyos integrálhatósági feltételeket a stratégiára vonatkozóan. Viszont az árazási problémáknál mindig szükségünk van az EMM létezésére, ezért választottuk az előbbi utat.

## 7.2. Stratégiák

**7.2.1. Definíció.** *Egy f.i.-$(B,S)_T$ piacon legyenek a $\beta = \{\beta_t \mid t \in [0,T]\}$ és $\gamma = \{\gamma_t \mid t \in [0,T]\}$ folyamatok prediktálható RCLL folyamatok úgy, hogy a kezdeti értékek a $\beta_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}$ konstansok. Ekkor a $\pi = \{\pi_t := (\beta_t, \gamma_t) \mid t \in [0,T]\}$ folyamatot stratégiának nevezzük. A $\pi$ értékfolyamata*

$$X^\pi = \{X_t^\pi := \beta_t B_t + \gamma_t S_t \mid t \in [0,T]\},$$

*a diszkontált értékfolyamata pedig*

$$M^\pi = \left\{ M_t^\pi := \frac{X_t^\pi}{B_t} \mid t \in [0,T] \right\}.$$

*A $\pi_t := (\beta_t, \gamma_t)$ vektort a $\pi$ stratégiához tartozó, $t$ ($t \in [0,T]$) időpontbeli portfóliónak nevezzük.*

*Ha létezik egy ekvivalens martingál-mérték a piacon, akkor azt mondjuk, hogy a $\pi = \{\pi_t := (\beta_t, \gamma_t) \mid t \in [0,T]\}$ stratégia önfinanszírozó, ha $\beta$ és $\gamma$ korlátos változásúak, és minden $t \in [0,T]$ esetén*

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \beta_s dB_s + \int_0^t \gamma_{s-} dS_s \qquad \mathbb{P}\text{-m.m.} \tag{7.3}$$

**7.2.2. Lemma.** *Tegyük fel, hogy az f.i.-$(B,S)_T^*$ piacon $\pi = \{\pi_t := (\beta_t, \gamma_t) \mid t \in [0,T]\}$ olyan stratégia, melynél $\beta$ és $\gamma$ korlátos változásúak. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

**(1)** *$\pi$ önfinanszírozó,*

**(2)** $X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \beta_{s-} dB_s + \int_0^t \gamma_{s-} dS_s, \quad t \in [0,T]$,

**(3)** $\int_0^t B_{s-} d\beta_s + \int_0^t S_{s-} d\gamma_s + \sum_{0<s\le t} \Delta\gamma_s \Delta S_s = 0, \quad t \in [0,T]$.

*Speciálisan, ha az $S$ árfolyamat folytonos, akkor* **(3)** *helyett írható*

**(4)** $\int_0^t B_s d\beta_s + \int_0^t S_s d\gamma_s = 0, \quad t \in [0,T]$.

**Bizonyítás.** Parciális integrálással

$$B_t\beta_t - B_0\beta_0 = \int_0^t \beta_{s-} dB_s + \int_0^t B_{s-} d\beta_s + [\beta, B]_t, \quad t \in [0,T], \tag{7.4}$$

$$S_t\gamma_t - S_0\gamma_0 = \int_0^t \gamma_{s-} dS_s + \int_0^t S_{s-} d\gamma_s + [\gamma, S]_t, \quad t \in [0,T], \tag{7.5}$$



ahol

$$[\beta, B]_t = 0 \quad \text{és} \quad [\gamma, S]_t = \sum_{0<s\le t} \Delta\gamma_s \Delta S_s, \quad t \in [0,T]$$

hiszen $\beta$ és $\gamma$ korlátos változásúak. A (7.4) és (7.5) egyenletekből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} X_t^\pi - X_0^\pi = \int_0^t \beta_{s-} dB_s + \int_0^t \gamma_{s-} dS_s + \int_0^t B_{s-} d\beta_s + \int_0^t S_{s-} d\gamma_s \\ + \sum_{0<s\le t} \Delta\beta_s \Delta B_s + \sum_{0<s\le t} \Delta\gamma_s \Delta S_s, \end{aligned}$$

amit a (7.3) önfinanszírozási feltétellel kombinálva kapjuk az állítást. □

**7.2.3. Lemma.** *Egy f.i.-$(B,S)_T^*$ piacon egy $\pi = \{\pi_t := (\beta_t, \gamma_t) \mid t \in [0,T]\}$ önfinanszírozó stratégia diszkontált értékfolyamatára érvényes a következő integrálelőállítás:*

$$M_t^\pi = M_0^\pi + \int_0^t \gamma_{s-} d\frac{S_s}{B_s}, \quad t \in [0,T]. \tag{7.6}$$

**Bizonyítás.** Megjegyezzük, hogy mivel a kötvényár folyamata folytonos és korlátos változású, így tetszőleges $t \in [0,T]$ esetén

$$\left[\frac{1}{B}, X^\pi\right]_t = 0 \quad \text{és} \quad \left[\frac{1}{B}, S\right]_t = 0. \tag{7.7}$$

Ezért tetszőleges $t \in [0,T]$ esetén

$$\frac{S_t}{B_t} - \frac{S_0}{B_0} = \int_0^t \frac{1}{B_s} dS_s + \int_0^t S_{s-} d\frac{1}{B_s}, \tag{7.8}$$

$$\frac{X_t^\pi}{B_t} - \frac{X_0^\pi}{B_0} = \int_0^t \frac{1}{B_s} dX_s^\pi + \int_0^t X_{s-}^\pi d\frac{1}{B_s}. \tag{7.9}$$

Továbbá,

$$X_{t-}^\pi = \beta_{t-} B_{t-} + \gamma_{t-} S_{t-} \quad \text{ha } t \in (0,T]. \tag{7.10}$$

Végül, (7.7), (7.8), (7.9) és (7.10) segítségével

$$
\begin{aligned}
M_t^\pi - M_0^\pi &= \frac{X_t^\pi}{B_t} - \frac{X_0^\pi}{B_0} \\
&= \int_0^t \frac{1}{B_s} dX_s^\pi + \int_0^t X_{s-}^\pi d\frac{1}{B_s} = \int_0^t \frac{1}{B_s} d(X_s^\pi - X_0^\pi) + \int_0^t X_{s-}^\pi d\frac{1}{B_s} \\
&= \int_0^t \frac{1}{B_s}\beta_{s-} dB_s + \int_0^t \frac{1}{B_s}\gamma_{s-} dS_s + \int_0^t (\beta_{s-}B_s + \gamma_{s-}S_{s-}) d\frac{1}{B_s} \\
&= \int_0^t \frac{1}{B_s}\beta_{s-} dB_s + \int_0^t \beta_{s-}B_s d\frac{1}{B_s} + \int_0^t \frac{1}{B_s}\gamma_{s-} dS_s + \int_0^t \gamma_{s-}S_{s-} d\frac{1}{B_s} \\
&= \int_0^t \beta_{s-} d(B_s \frac{1}{B_s}) + \int_0^t \gamma_{s-} d\frac{S_s}{B_s} = \int_0^t \gamma_{s-} d\frac{S_s}{B_s}
\end{aligned}
$$

minden $t \in [0, T]$ esetén. □

## 7.3. Fedezeti portfóliók és árazás

**7.3.1. Definíció.** *Legyen $x \in \mathbb{R}$ és legyen $\xi$ egy ($\mathcal{F}$-mérhető) valószínűségi változó egy f.i.-$(B,S)_T^*$ piacon. Ekkor a $\pi$ stratégiát $(x,\xi)$-fedezetnek (vagy fedezeti stratégiának) nevezzük, ha*

$$X_0^\pi = x \quad \text{és} \quad X_T^\pi \geq \xi \text{ m.m..}$$

*Ha teljesül $X_T^\pi(\omega) = \xi(\omega)$ minden $\omega \in \Omega$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy $\pi$ minimális $(x,\xi)$-fedezet. Az összes önfinanszírozó $(x,\xi)$-fedezeti stratégiák halmazát $\Pi(x,\xi)$-el fogjuk jelölni, a*

$$\mathbb{C}_{T,\xi} := \inf\{x > 0 \mid \Pi(x,\xi) \neq \emptyset\}$$

*értéket a $T$ időre legalább $\xi(\omega)$ ($\forall\omega \in \Omega$) tőkét biztosító tőkének (befektetési költségnek) nevezzük.*

**7.3.2. Lemma.** *Tegyük fel, hogy egy f.i.-$(B,S)_T$ piacon létezik $\mathbb{P}^*$ EMM. Legyen $\xi$ egy ($\mathcal{F}$-mérhető) nemnegatív valószínűségi változó, és legyen $\pi = \{\pi_t := (\beta_t, \gamma_t) \mid t \in [0,T]\}$ egy $(x,\xi)$-fedezeti stratégia valamely $x \in \mathbb{R}$ értékkel.*

*Ekkor $\{M_t^\pi \mid t \in [0,T]\}$ szupermartingál $\mathbb{P}^*$-ra nézve, és tetszőleges $t \in [0,T]$ esetén $M_t^\pi \geq 0$, $X_t^\pi \geq 0$ m.m., speciálisan, $x = X_0^\pi \geq 0$.*



**Bizonyítás.** A 7.2.3. Lemmában szereplő (7.6) integrálelőállítás alapján az $\{M_t^\pi \mid t \in [0,T]\}$ egy lokális martingál $\mathbb{P}^*$-ra nézve. Legyen $(\tau_n)_{n=0}^\infty$ egy megállítási pillanatokból álló lokalizáló sorozata $M^\pi$-nek. Ekkor majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén létezik olyan $n(\omega) \in \mathbb{N}$, hogy $\tau(\omega)_{n(\omega)} = T(\omega)$. Kombinálva ezt azzal a ténnyel, hogy

$$0 \leq \xi \leq X_T^\pi = B_T M_T^\pi \quad \text{m.m.}$$

és hogy

$$\mathbb{E}^*\left(M_{T\wedge\tau_n}^\pi \mid \mathcal{F}_s\right) = M_{s\wedge\tau_n}^\pi,$$

azt kapjuk, hogy tetszőleges $t \in [0,T]$ esetén $M_t^\pi \geq 0$ m.m., és így $X_t^\pi = B_t M_t^\pi \geq 0$ m.m.. Végül a Fatou-lemma feltételes valószínűségre érvényes változatával azt kapjuk, hogy tetszőleges $s < t$, $s,t \in [0,T]$ esetén

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^*(M_t^\pi \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}^*\left(\liminf_{n\to\infty} M_{t\wedge\tau_n}^\pi \mid \mathcal{F}_s\right) &\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}^*\left(M_{t\wedge\tau_n}^\pi \mid \mathcal{F}_s\right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} M_{s\wedge\tau_n}^\pi = M_s^\pi,
\end{aligned}
$$

azaz $\{M_t^\pi \mid t \in [0,T]\}$ valóban szupermartingál. □

**7.3.3. Következmény.** *Ha egy f.i.-$(B,S)_T$ piacon létezik EMM, akkor a piac kizárja az arbitrázs lehetőségét:*

*nincs olyan $\pi$ önfinanszírozó stratégia, hogy $X_0^\pi \leq 0$, $X_t^\pi \geq 0$ ha $t \in [0,T]$ és*

$$\mathbb{P}(X_T^\pi > 0) > 0.$$

**Bizonyítás.** Ha $\pi$ egy olyan önfinanszírozó stratégia, hogy $\mathbb{P}(X_t^\pi > 0) > 0$ ha $t \in [0,T]$, akkor a 7.3.2. Lemma alapján

$$X_0^\pi \geq \frac{B_0}{B_T}\mathbb{E}^* X_T^\pi > 0.$$

□

**7.3.4. Következmény.** *Legyen $\pi$ egy önfinanszírozó $(x,\xi)$-fedezeti stratégia egy f.i.-$(B,S)_T$ piacon, amelyen $\mathbb{P}^*$ egy EMM, ahol $x \in \mathbb{R}$ és $\xi$ nemnegatív ($\mathcal{F}$-mérhető) valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}^*|\xi| < \infty$. Ekkor*

$$x \geq \frac{B_0}{B_T}\mathbb{E}^*\xi, \tag{7.11}$$

*és ha $\pi$ egy megengedhető minimális $(x,\xi)$-fedezeti stratégia, akkor (7.11)-ben egyenlőség áll fenn.*

**Bizonyítás.** A 7.3.2. Lemma alapján

$$\frac{B_0}{B_T}\mathbb{E}^*\xi \le \frac{B_0}{B_T}\mathbb{E}^* X_T^\pi = B_0\mathbb{E}^* M_T^\pi \le B_0 M_0^\pi = x, \tag{7.12}$$

és (7.12)-ben egyenlőség teljesül, ha $\pi$ minimális és megengedhető. □

**7.3.5. Definíció.** *A f.i.-$(B,S)_T^*$ piacot teljesnek nevezzük, ha tetszőleges $\xi$ ($\mathcal{F}$-mérhető) valószínűségi változóhoz létezik olyan $\pi$ önfinanszírozó stratégia, hogy $X_T^\pi = \xi$ m.m..*

**7.3.6. Tétel. (Feltételes követelések árazása)** *Legyen f.i.-$(B,S)_T$ egy teljes piac, amelyen $\mathbb{P}^*$ egy EMM, és legyen $\xi$ egy olyan ($\mathcal{F}$-mérhető) valószínűségi változó a piacon, melyre $\mathbb{E}^*|\xi| < \infty$. Ekkor*

$$\mathbb{C}_{T,\xi} = \frac{B_0}{B_T}\mathbb{E}^*\xi.$$

**Bizonyítás.** A 7.3.4. Következmény alapján teljesül

$$\mathbb{C}_{T,\xi} \ge \frac{B_0}{B_T}\mathbb{E}^*\xi.$$

Továbbá a piac teljessége miatt létezik olyan $\pi$ önfinanszírozó stratégia, hogy

$$X_T^\pi = \xi \quad \text{és} \quad X_0^\pi = \frac{B_0}{B_T}\mathbb{E}^*\xi.$$

Tehát $\Pi(X_0^\pi,\xi) \ne \emptyset$ és $X_0^\pi \ge \mathbb{C}_{T,\xi}$ alapján kész a bizonyítás. □

# 8. Fejezet

# Függelék

Ebben a jegyzetben használjuk a sztochasztikus kalkulus jónéhány eszközét, ezért hasznosnak tartottuk összegyűjteni a legfontosabb definíciókat, jelöléseket, és néhány kapcsolódó megjegyzést.

Legyen $I$ a $[0,T]$ vagy a $[0,\infty)$ intervallum. Legyen $(\Omega,\mathcal{F})$ mérhető tér.

Ekkor $\mathcal{F}$ bizonyos rész-$\sigma$-algebráiból álló $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t \mid t\in I\}$ monoton növekvő (azaz $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$, ha $s<t,\ s,t\in I$) seregét *filtráció*nak nevezzük.

Olyan $\tau:\Omega\mapsto[0,+\infty]$ valószínűségi változót nevezünk *megállítási időpont*nak $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F})$-en, melyre $\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t$ teljesül minden $t\in I$ esetén.

Ha $\mathbb{P}$ valószínűségi mérték $(\Omega,\mathcal{F})$-en, akkor az $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},\mathbb{F})$ négyest *filtrált valószínűségi mező*nek nevezzük.

Legyen $\mathbb{G}=\{\mathcal{G}_t \mid t\in I\}$ egy filtráció $(\Omega,\mathcal{F})$-en. Az $\Omega\times I$ halmaz valamely részhalmazát prediktálható téglalapnak nevezzük, ha $\{0\}\times G_0$ vagy $(s,t]\times G$ alakban áll elő, ahol $G_0\in\mathcal{G}_0$ és $0\le s<t,\ s,t\in I$, valamint $G\in\mathcal{G}_s$. A prediktálható téglalapok által generált $\sigma$-algebrát prediktálható $\sigma$-algebrának nevezzük.

A $\mathbb{G}$ filtrációt *standard*nak nevezzük, ha

- $\mathbb{G}$ jobbról folytonos, ami alatt azt értjük, hogy $\mathcal{G}_t=\bigcap_{\substack{s>t\\ s\in I}}\mathcal{G}_s$ ha $t\in I$, $t\ne T$, és
- $\mathcal{G}_0$ tartalmazza az összes $\mathcal{F}$-beli $\mathbb{P}$-null halmazt.

*Folyamat*nak $(\Omega,\mathcal{F})$-en valószínűségi változókból álló $X=\{X_t \mid t\in I\}$ sereget értünk, ahol $X_t$ $\mathcal{F}$-mérhető minden $t\in I$ esetén. Ezért egy folyamatot úgy is tekinthetünk, mint egy leképezést az $\Omega\times I$ halmazból $\mathbb{R}$-be, vagyis az $(\omega,t)\in\Omega\times I$ képe $X_t(\omega)$. Időnként használni fogjuk az $X$ jelölést is a folyamatra, ha világos, hogy mi az $I$ indexhalmaz. Rögzítve egy $\omega\in\Omega$ elemi eseményt, az $\{X_t(\omega)\mid t\in I\}$ halmazt az $X$ *trajektóriá*jának nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $X$ folyamat (balról, jobbról) *folytonos*, ha a trajektóriái azok,





ami alatt azt értjük, hogy az $X_{(\cdot)}(\omega):I\mapsto\mathbb{R},\ \omega\in\Omega$ függvény (balról, jobbról) folytonos. Azt mondjuk, hogy az $X$ folyamat *adaptált* az $\mathbb{F}$ filtrációhoz, ha $X_t$ $\mathcal{F}_t$-mérhető minden $t\in I$ esetén. Azt mondjuk, hogy egy $I$-n értelmezett valós függvény *determinisztikus folyamat*. Azt mondjuk, hogy az $X$ folyamatnak létezik *baloldali (jobboldali) határértéke*, ha a trajektóriáinak létezik baloldali (jobboldali) határértéke minden $\omega\in\Omega$ esetén, és ekkor $X_{t-}$ (illetve $X_{t+}$) jelöli a baloldali (jobboldali) határértéket a $t\in I$ időpontban. Továbbá $\Delta X_t:=X_t-X_{t-}$, ha $X_{t-}$ létezik. RCLL (LCRL) folyamat alatt jobbról (balról) folytonos és balról (jobbról) határértékkel rendelkező folyamatot értünk.

Tekintsünk egy $M=\{M_t \mid t\in I\}$ *integrálható* folyamatot $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},\mathbb{F})$-en, ami alatt azt értjük, hogy $\mathbb{E}|M_t|<\infty$ minden $t\in I$ esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy $M$

- *szupermartingál*, ha $\mathbb{E}(M_t\mid\mathcal{F}_s)\le M_s$ minden $s<t,\ s,t\in I$ esetén;
- *szubmartingál*, ha $\mathbb{E}(M_t\mid\mathcal{F}_s)\ge M_s$ minden $s<t,\ s,t\in I$ esetén;
- *martingál*, ha $M$ egyszerre szupermartingál és szubmartingál is;
- *$L_p$-martingál*, ahol $p\in(0,\infty)$, ha $M$ martingál és $p$-integrálható: $\mathbb{E}|M_t|^p<\infty$ minden $t\in I$ esetén.

Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{G})$-en értelmezett folyamat prediktálható, ha mérhető a prediktálható $\sigma$-algebrára vonatkozóan (itt a folyamatot úgy tekintjük, mint egy $\Omega\times I$-n értelmezett valós függvényt). Egy adaptált $L=\{L_t \mid t\in\Gamma\}$ folyamatot $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},\mathbb{G})$-n *lokális $(L_p)$-martingál*nak ($p\in(0,\infty)$ nevezünk, ha létezik megállítási pillanatoknak egy olyan $(\tau_k)_{k=0}^{\infty}$ sorozata, melyet *lokalizáló sorozat*nak nevezünk, melyre

$$\tau_n\to\infty\quad\text{m.m. amennyiben } n\to\infty\qquad \text{ha } I=[0,\infty),$$

vagy

$$\mathbb{P}(\tau_n=T)\to 1\quad\text{amennyiben } n\to\infty\qquad \text{ha } I=[0,T],$$

és tetszőleges $k\in\mathbb{N}$ esetén $\left\{M_{t\wedge\tau_k}\mid t\in I\right\}$ $(L_p)$-martingált alkot.

Egy adaptált folyamatot $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{G})$-n *lokálisan korlátos változású*nak vagy *véges változású*nak nevezünk, ha a folyamat trajektóriái tetszőleges $t\in I$ esetén véges változásúak a $[0,t]$ intervallumon.

Az $Y=\{Y_t \mid t\in I\}$ folyamat $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},\mathbb{G})$-n *szemimartingál*, ha adaptált, és előállítható

$$Y_t=Z_t+A_t,\qquad t\in I$$

alakban, ahol $Z = \{Z_t \mid t \in I\}$ lokális martingál és $A = \{A_t \mid t \in I\}$ véges változású folyamat.

Ahogy az a szakiridalomban szokásos, $[\cdot, \cdot]$ jelöli két folyamat kölcsönös variációját, melyet kvadratikus variációnak is neveznek, amennyiben a két folyamat megegyezik.

# 9. Fejezet

# Bibliográfiai megjegyzések

Az utóbbi évtizedekben az ökonometria egyik legfontosabb és legkedveltebb területét képezi az opcióelmélet. Így nem véletlen, hogy számos könyvben és tudományos cikkben találhatunk ezzel kapcsolatos eredményeket, melyek között mind matematikai, mind közgazdasági publikációkat is találhatunk.

Mindenekelőtt megemlítünk két munkát, melyek úttörőszerepet jelentettek az elmélet kifejlődésében. Az egyik [Bachelier 1900], amely sokáig nem kapott megfelelő figyelmet az irodalomban, a másik pedig [Samuelson 65].

Már korábban említettük, hogy az árazás tekintetében áttörést jelentett a híres [Black and Scholes 73] munka, bár matematikailag még hagyott tisztázatlan kérdéseket. A diszkrét idejű megközelítés híres eredményeit tartalmazza [Cox, Ross and Rubinstein 79], míg az ekvivalens martingálmérték ötletének precíz alkalmazása először [Harrison and Pliska 81]-ban található meg.

Ugyanezen árazási problémára ad egy nem valószínűségszámítási megközelítést és tárgyalást [Dzhaparidze and Zuijlen 96].

A jegyzet írásakor a tágyalásmód és a használt jelölések tekintetében leginkább a kiváló [Shiryaev 94], [Shiryaev, Kabanov, Kramkov, Mel'nikov I. 94], [Shiryaev, Kabanov, Kramkov, Mel'nikov II. 94] és [Harrison and Pliska 81] munkákra támaszkodtunk tágyalásmód és jelölések tekintetében egyaránt.

Ugyanakkor megemlítünk még további kiváló írásokat, melyekben az érdeklődő olvasó számos hasznos ismeretet szerezhet opcókról és rokon területek problémáiról. Az értékpapírpiacokról, arbitrázsról, portfólióval kapcsolatos kérdésekről találhat az olvasó hasznos ismereteket [Duffie 92]-ban. Míg ajánljuk [Hull 93] nagyszerű könyvét azoknak, akik a származtatott értékpapírok, piacok, s árazási problémák egy közgazdasági jellegű megközelítését, aspektusait kívánják tanulmányozni.

Végül ismertetünk néhány olyan munkát is, melyek nagy segítséget nyújtanak a szükséges matematikai ismeretek megszerzéséhez leginkább a sztochasztikus folyamatok, martingálok és sztochasztikus integrálok témakörében:





[Liptser and Shiryayev 1989], [Rogers and Williams], [Chung and Williams 90]. Az előbbiek igen általánosan tárgyalják a sztochasztikus integrálok fogalmát, míg a harmadik könyvet ajánljuk a témakörrel még ismerkedők számára bevezetésként. Mindhárom munkában több alkalmazást is találhat az olvasó nemcsak a pénzügy területéről.

# Irodalomjegyzék

[Bachelier 1900] Bachelier, L.: *"Théorie de la spéculation"* Ann. EcoleNorm. Sup., 17, 1900, pp. 21-81. (Reprinted in "The random Character of Stock Market Prices", ed. by Coothner, P. H., MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1967, pp. 17-78.)

[Black and Scholes 73] Black, F. and Scholes, M.: *"The pricing of options and corporate liabilities"* J. Polit. Econ., 3, 1973, pp.637-659.

[Cox, Ross and Rubinstein 79] Cox, J. C., Ross, R. A., Rubinstein, M.: *"Option pricing: a simplified approach"* J. Finan. Econ., 3, 1979, pp. 229-263.

[Chung and Williams 90] Chung, K. L. and Williams, R. J.: *"Introduction to Stochastic Integration"* 2nd ed., Birkhäuser, Boston, 1990.

[Duffie 92] Duffie, D.: *"Dynamic Asset Pricing Theory"* Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey 1992.

[Dzhaparidze and Zuijlen 96] Dzhaparidze, K., van Zuijlen, M.: *"Option pricing in a binary securities market"* (preprint), 1996.

[Harrison and Pliska 81] Harrison, J. M. and Pliska, S. R.: *"Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading"* Stoch. Prob. Appl., 11, 1981, pp. 215-260.

[Hull 93] Hull, John C.: *"Options, Futures, and Other Derivative Securities"* 2nd ed., Prentice-Hall International, 1993.

[Liptser and Shiryayev 1989] Liptser, R. Sh. and Shiryayev, A. N.: *"Theory of Martingales"* (translation), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1989

[Rogers and Williams] Rogers, L.C.G. and Williams, D.: *"Diffusions, Markov Processes, and Martingales"*, vol. 1-2., John Wiley & Sons, 1990





[Samuelson 65] Samuelson, P. A.: *"Rational theory of warrant pricing"* Industrial Management Review, 6, 1965, pp. 13-31.

[Shiryaev 94] Shiryaev, A. N.: *"On some basic concepts and some basic stochastic models used in finance* I. *Discrete time"* Theory Probab. Appl., 39, 1994, pp. 1-13.

[Shiryaev, Kabanov, Kramkov, Mel'nikov I. 94] Shiryaev, A. N., Kabanov, Yu. M., Kramkov, D. O., Mel'nikov, A. V.: *"Towards the theory of pricing of options of both European and American types.* I. *Discrete time"* Theory Probab. Appl., 39, 1994, pp. 14-60.

[Shiryaev, Kabanov, Kramkov, Mel'nikov II. 94] Shiryaev, A. N., Kabanov, Yu. M., Kramkov, D. O., Mel'nikov, A. V.: *"Towards the theory of pricing of options of both European and American types.* II. *Continuous time"* Theory Probab. Appl., 39, 1994, pp. 61-102.