Fazekas István

MARKOV-LÁNCOK ÉS ALKALMAZÁSAIK

mobiDIÁK könyvtár

Fazekas István

MARKOV-LÁNCOK ÉS ALKALMAZÁSAIK

mobiDIÁK könyvtár

SOROZATSZERKESZTŐ

Fazekas István

Fazekas István

MARKOV-LÁNCOK ÉS ALKALMAZÁSAIK

Egyetemi jegyzet
Programtervező és alkalmazott matematikusok részére
Fejlesztés alatt álló változat!

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar

Lektor

Ispány Márton
Debreceni Egyetem
Lektorálás alatt!

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
4010 Debrecen, Pf. 12
http://mobidiak.inf.unideb.hu

A mű *A mobiDIÁK önszervező mobil portál* (IKTA, OMFB-00373/2003) és a *GNU Iterátor, a legújabb generációs portál szoftver* (ITEM, 50/2003) projektek keretében készült.

Tartalomjegyzék

I. fejezet
Diszkrét paraméterű Markov-láncok

1. A Markov-lánc fogalma. Átmenetvalószínűségek

1.1. A Markov-lánc definíciója

Ebben a fejezetben olyan $(\xi_t,\ t \in T)$ sztochasztikus folyamatokat vizsgálunk, melyeknek mind a paramétertartománya, mind az állapottere megszámlálható. Általában paramétertartományként a $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ halmazt tekintjük, míg az állapotteret I-vel, az állapotokat magukat pedig i, j, k, l betűvel, illetve ezek indexelt változataival jelöljük. Megjegyezzük, hogy a lánc szó az állapottér megszámlálható voltára utal. A $(\xi_t,\ t \in T)$ folyamatot *Markov-tulajdonságúnak* nevezzük, ha a folyamat múltja csak a jelenbeli állapoton keresztül hat a folyamat jövőjére.

1.1. példa (véletlen bolyongás a számegyenesen). Egy részecske ugrál a számegyenes egész koordinátájú pontjaiban; ξ_t jelöli a részecske helyzetét a t időpillanatban. A $t = 0$ pillanatban az origóban tartózkodik, és minden egyes $t = 1, 2, \dots$ pillanatban 1 lépést tesz vagy jobbra, vagy balra véletlenszerűen. A lépés irányát minden esetben pénzfeldobással határozzuk meg; fej esetén jobbra, írás esetén balra lép. Ha szabályos érmét használunk, akkor a *szimmetrikus bolyongást* kapjuk (azaz $p = \frac{1}{2}$, illetve $q = \frac{1}{2}$ valószínűséggel lép jobbra, illetve balra), míg szabálytalan pénzérmét használva a *nem szimmetrikus bolyongást* kapjuk. Amennyiben ismerjük a részecske t időpontbeli helyzetét, akkor a részecske $t + 1$ időpontbeli helyzetére semmilyen további adalékkal nem szolgál a részecske $t - 1,\ t - 2, \dots$ időpontbeli helyzetének ismerete.

1.1. definíció. A $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ diszkrét valószínűségi változókból álló sorozatot diszkrét idejű *Markov-láncnak* nevezzük, ha

$$\mathbb{P}\left(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1},\ \xi_{n-2} = i_{n-2}, \dots, \xi_0 = i_0\right) = \mathbb{P}\left(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}\right) \tag{1.1}$$

teljesül minden n-re és minden olyan $i_0, i_1, \dots, i_n$ állapotokra, melyekre a feltételben szereplő események valószínűsége pozitív.

Az (1.1) ún. *Markov-tulajdonság* fejezi ki azt, hogy a folyamat jövője csak a jelenen keresztül függ a múlttól. Ez a tulajdonság egy kissé általánosabb formában is teljesül. Ebben a fejezetben a feltételekben szereplő események mindig pozitív valószínűségűek, erre a továbbiakban külön nem utalunk.

1.1. állítás. *$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ akkor és csak akkor Markov-lánc, ha az alábbi ekvivalens tulajdonságok valamelyike teljesül:*

1.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\xi_{t_n} = i_n \mid \xi_{t_{n-1}} = i_{n-1},\ \xi_{t_{n-2}} = i_{n-2}, \dots, \xi_{t_1} = i_1\right) &= \\ = \mathbb{P}\left(\xi_{t_n} = i_n \mid \xi_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right)\end{aligned} \tag{1.2}$$

minden $n \geq 2$-re és minden $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ időpontokra és $i_1, \dots i_n$ állapotra.

2.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\xi_{t_\nu} = i_\nu,\ n \leq \nu \leq n+m \mid \xi_{t_\nu} = i_\nu,\ 1 \leq \nu \leq n-1\right) &= \\ = \mathbb{P}\left(\xi_{t_\nu} = i_\nu,\ n \leq \nu \leq n+m \mid \xi_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right)\end{aligned} \tag{1.3}$$

minden $m \geq 0$, $n \geq 2$ egészre, $0 \leq t_1 < \cdots < t_{n+m}$ időpontokra és $i_1, \ldots, i_{n+m}$ állapotokra.

3.

$$\mathbb{P}\left(A \mid \xi_{t_\nu} = i_\nu,\, 1 \leq \nu \leq n-1\right) = \mathbb{P}\left(A \mid \xi_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right) \tag{1.4}$$

minden $n \geq 2$ egészre és minden $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ időpontra és $i_1, \ldots i_{n-1}$ állapotra és $A \in \sigma\left\{\xi_t \mid t > t_{n-1}\right\}$ jövőbeni eseményre.

Bizonyítás. Az (1.4)$\Longrightarrow$(1.3)$\Longrightarrow$(1.2)$\Longrightarrow$(1.1) implikációsorozat nyilvánvaló, lévén ezek a tulajdonságok egymás speciális esetei.

(1.1)$\Longrightarrow$(1.2): a feltételes valószínűség definíciója alapján (1.1)-ből

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\xi_n = i_n, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_0 = i_0\right) = \\ &\quad = \mathbb{P}\left(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_0 = i_0\right). \end{aligned} \tag{1.5}$$

A $0, 1, \ldots, n-2$ időpontok közül tetszőleges sokat kiválasztva, és ezek esetén minden állapotra összegezve (1.5) mindkét oldalát, majd visszaalakítva feltételes valószínűséggé,

$$\mathbb{P}\left(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_{n-s_1} = i_{n-s_1}, \ldots\right) = \mathbb{P}\left(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}\right) \tag{1.6}$$

adódik. Azaz (1.1) bal oldalán tetszőleges sok időpont „eltüntethető” $0, 1, \ldots, n-2$ közül. Azonban a jelen és a jövő között az ugrás még egy egységnyi ($n-1$-ről n-re). „Csempésszük be” (1.2) bal oldalára a t_{n-1} és t_n közötti összes időpontot a teljes valószínűség tétele segítségével, használjuk a feltételes valószínűség ismert tulajdonságait (amivel elérjük, hogy a feltételes valószínűségekben a jelen és a jövő között mindig egy egységnyi időugrás legyen), majd „tüntessük el” a t_{n-1} előtti időpontokat (1.6) alkalmazásával:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\xi_{t_n} = i_n \mid \xi_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, \xi_{t_1} = i_1\right) = \\ &= \sum_{j_1 \in I} \cdots \sum_{j_s \in I} \frac{\mathbb{P}\left(\xi_{t_n} = i_n, \xi_{t_n-1} = j_1, \ldots, \xi_{t_{n-1}+1} = j_s, \xi_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, \xi_{t_1} = i_1\right)}{\mathbb{P}\left(\xi_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, \xi_{t_1} = i_1\right)} = \\ &= \sum_{j_1 \in I} \cdots \sum_{j_s \in I} \mathbb{P}\left(\xi_{t_n} = i_n \mid \xi_{t_n-1} = j_1, \ldots, \xi_{t_{n-1}+1} = j_s, \xi_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, \xi_{t_1} = i_1\right) \times \\ &\qquad \times \ldots \times \mathbb{P}\left(\xi_{t_{n-1}+1} = j_s \mid \xi_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, \xi_{t_1} = i_1\right) = \\ &= \sum_{j_1 \in I} \cdots \sum_{j_s \in I} \mathbb{P}\left(\xi_{t_n} = i_n \mid \xi_{t_n-1} = j_1, \ldots, \xi_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right) \times \ldots \times \\ &\qquad \times \mathbb{P}\left(\xi_{t_{n-1}+1} = j_s \mid \xi_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right). \end{aligned} \tag{1.7}$$

A legutolsó átalakítás kivételével a többit visszafelé elvégezve (1.7)-ben, kapjuk (1.2)-t.

(1.2)$\Longrightarrow$(1.3): $m = 0$ esetén (1.3) éppen (1.2)-re redukálódik. Alkalmazzunk teljes indukciót m-re!

(1.3)$\Longrightarrow$(1.4): Az (1.4) egyenlőség mindkét oldalán valószínűségi mérték áll. (1.3) szerint a két valószínűség megegyezik az $A = \{\xi_{t_\nu} = i_\nu : n \leq \nu \leq n+m\}$ alakú eseményeken, így az $A \in \sigma\left\{\xi_{t_n}, \xi_{t_{n+1}}, \ldots, \xi_{t_{n+m}}\right\}$ eseményeken is. Ez utóbbi típusú események összessége (az összes t_{n-1}-nél nagyobb $t_n, \ldots, t_{n+m}$ időpontokra tekintve) halmazalgebrát alkot, amely generálja $\sigma\left\{\xi_t \mid t > t_{n-1}\right\}$-et. Mivel egy valószínűségi mérték halmazalgebrán felvett értékei egyértelműen meghatározzák a generált σ-algebrán felvett értékeit, így készen vagyunk. $\square$

1.2. állítás. *Az alábbiak ekvivalensek.*

(1) $\xi_0, \xi_1, \ldots$ *Markov-lánc.*

(2) *Teljesül a kétoldali Markov-tulajdonság (azaz a folyamat múltja és jövője a jelenre nézve feltételesen független):*

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\xi_{t_\nu} = i_\nu, 1 \le \nu \le n+m, \nu \ne n-1 \mid \xi_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\xi_{t_\nu} = i_\nu, 1 \le \nu \le n-2 \mid \xi_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right) \times \\ &\times \mathbb{P}\left(\xi_{t_\nu} = i_\nu, n \le \nu \le n+m \mid \xi_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right) \end{aligned} \tag{1.8}$$

minden $m, n \ge 1$, $0 \le t_1 < \cdots < t_{n+m}$, $m \ge 0$, $n > 2$, $i_1, \ldots, i_{n+m} \in I$ *esetén.*

(3) *Teljesül a fordított Markov-tulajdonság:*

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\xi_{t_n} = i_n \mid \xi_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, \xi_{t_1} = i_1\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\xi_{t_n} = i_n \mid \xi_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

minden $n \ge 2$*-re,* $0 \le t_n < \cdots < t_1$ *időpontokra és* $i_1, \ldots, i_n$ *állapotokra.*

Bizonyítás. (1)$\Longleftrightarrow$(2): (1.3) alakja

$$\mathbb{P}(A|BC) = \mathbb{P}(A|B),$$

míg (1.8) alakja

$$\mathbb{P}(AC|B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(C|B),$$

ahol A, B, C a megfelelő jövő-, jelen- ill. múltbeli események. Ezen két egyenlőség ekvivalenciája nyilvánvaló.

(2)$\Longleftrightarrow$(3): (1.8)-ban a múlt és a jövő szerepe felcserélhető. Tehát (2)$\Longleftrightarrow$(3) igazolása ugyanaz, mint (2)$\Longleftrightarrow$(1) igazolása. $\square$

1.2. Átmenetvalószínűségek

1.2. definíció. A $\xi_0, \xi_1, \ldots$ Markov-lánc esetén a

$$p_{ij}^{(n)}(t) = \mathbb{P}\left(\xi_{t+n} = j \mid \xi_t = i\right), \quad i, j \in I, \tag{1.10}$$

mennyiségeket a lánc n-lépéses *átmenetvalószínűségeinek* nevezzük. A $p_{ij}(t) = p_{ij}^{(1)}(t)$ egylépéses átmenetvalószínűségeket egyszerűen átmenetvalószínűségeknek fogjuk nevezni. Ha $p_{ij} = p_{ij}(t)$ a kiinduló t időponttól független, akkor a láncot *homogénnek* nevezzük.

Figyelem! A továbbiakban – ha az ellenkezőjét nem jelezzük – homogén Markov-láncok szerepelnek.

A $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$ mátrixot a lánc *átmeneti mátrixának* nevezzük. (Emlékeztetünk, hogy az I fázisteret mindig tekinthetjük az egész számok egy részhalmazának.) P véges négyzetes vagy (esetleg mindkét irányban) „$\infty \times \infty$” típusú mátrix.

P sztochasztikus mátrix, azaz elemei nemnegatívak és a sorösszegek 1-gyel egyenlőek. (Ha még az oszlopösszegek is 1-gyel egyenlőek, akkor duplán sztochasztikusnak

nevezzük a mátrixot.) A $q_i = \mathbb{P}(\xi_0 = i)$, $i \in I$, diszkrét eloszlást a lánc *kezdeti eloszlásának* nevezzük.

1.2. példa (bolyongások).

1. A mindkét irányban *korlátlan bolyongás* átmeneti valószínűségei: $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q$, $p_{ij} = 0$, ha $j \neq i+1, i-1$. (A bolyongó pont p valószínűséggel lép jobbra, q valószínűséggel balra, $p + q = 1$.)

2. *Ciklikus bolyongás* n ponton. A részecske egy kör kerületén elhelyezkedő, $1, 2, \ldots, n$-nel jelölt pontokon bolyong. Legyen $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = 1$.

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & \text{ha } j \equiv i+1 \pmod{n}, \\ q, & \text{ha } j \equiv i-1 \pmod{n}, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

3. A bolyongás útjába elnyelő vagy visszaverő határfalakat helyezhetünk el jobbról és/vagy balról. Ha például a 0-ba visszaverő, az $n(> 0)$-ba elnyelő határfalat helyezünk el, akkor p_{ij} ugyanaz, mint a korlátlan bolyongás esetén, ha $i = 2, \ldots, n-1$; azonban $p_{11} = q$, $p_{12} = p$, $p_{nn} = 1$ (a többi érték 0).

1.3. definíció. A $(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n})$ n-dimenziós valószínűségi változók eloszlásait (ahol $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T, n = 1, 2, \ldots$) a Markov-lánc *végesdimenziós eloszlásainak* nevezzük.

Azaz a végesdimenziós eloszlások tartalmazzák az összes ξ_t valószínűségi változó eloszlását, az összes ξ_t, ξ_s együttes eloszlását stb.

Diszkrét valószínűségi változókról lévén szó, a végesdimenziós eloszlások megadása ekvivalens a

$$\mathbb{P}(\xi_{t_1} = i_1, \ldots, \xi_{t_n} = i_n) \tag{1.11}$$

$0 \leq t_1 < \cdots < t_n$, $i_1, \ldots, i_n \in I, n \geq 1$ számok megadásával. Sőt, ezek a számok megkaphatóak az alábbi állításban szereplő még egyszerűbb típusú mennyiségek alkalmas összegeiként.

1.3. állítás. *A $\xi_0, \xi_1, \ldots$ sorozat akkor és csak akkor (homogén) Markov-lánc, ha létezik olyan $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$ sztochasztikus mátrix és $\boldsymbol{q} = (q_i)_{i \in I}$ diszkrét eloszlás, hogy*

$$\mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n) = q_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} \tag{1.12}$$

minden $i_0, \ldots, i_n \in I$ és $n \geq 0$-ra.

Bizonyítás. **(1)** Ha $\xi_0, \xi_1, \ldots$ homogén Markov-lánc, akkor P-t az átmeneti mátrixnak, $\boldsymbol{q}$-t a kezdeti eloszlásnak választva, (1.1) és az 1. feladat alkalmazásával adódik (1.12).

(2) Megfordítva, a feltételes valószínűség definíciója alapján (1.12)-ből

$$\mathbb{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_0 = i_0) = p_{i_{n-1} i_n}. \tag{1.13}$$

Ebből

$$\mathbb{P}(\xi_n = i_n, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_0 = i_0) = p_{i_{n-1} i_n} \mathbb{P}(\xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_0 = i_0). \tag{1.14}$$

Ebben az egyenlőségben összegezve $i_0, \ldots, i_{n-2} \in I$-re

$$\mathbb{P}(\xi_n = i_n, \xi_{n-1} = i_{n-1}) = p_{i_{n-1} i_n} \mathbb{P}(\xi_{n-1} = i_{n-1}) \tag{1.15}$$

adódik, ami (1.13)-mal együtt bizonyítja az állításunkat. $\square$

1.1. tétel (a Markov-láncok egzisztenciatétele). *Legyen adott egy $\boldsymbol{q}$ diszkrét eloszlás és egy P sztochasztikus mátrix. Ekkor létezik olyan homogén Markov-lánc, melynek $\boldsymbol{q}$ a kezdeti eloszlása és P az átmeneti mátrixa.*

Bizonyítás. (1.12) alapján megadhatók a végesdimenziós eloszlások. Alkalmazható a Kolmogorov-féle alaptétel (lásd Függelék), mivel teljesülnek a kompatibilitási feltételek (ezt P sztochasztikus mátrix volta garantálja). Tehát létezik a fenti végesdimenziós eloszlásokal rendelkező sztochasztikus folyamat, mely az 1.3. állítás alapján éppen a kívánt Markov-lánc. □

1.3. A Chapman-Kolmogorov-egyenletek

1.2. tétel. *Ha az egylépéses átmeneti valószínűségek t-től függetlenek, azaz $p_{ij}^{(1)}(t) = p_{ij}$ minden $i, j \in I$ és $t = 0, 1, 2, \ldots$-re, akkor az n-lépéses átmeneti valószínűségek is függetlenek t-től: $p_{ij}^{(n)}(t) = p_{ij}^{(n)}$ minden $i, j \in I,\ n, t = 0, 1, 2, \ldots$ esetén. Továbbá*

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \tag{1.16}$$

minden $i, j \in I$ és $n, m = 0, 1, 2, \ldots$ esetén.

Bizonyítás. Lévén $\{\xi_{t+n} = k\}$, $k \in I$, teljes eseményrendszer

$$\mathbb{P}\left(\xi_{t+n+m} = j \mid \xi_t = i\right) = \sum_{k \in I} \mathbb{P}\left(\xi_{t+n+m} = j \mid \xi_{t+n} = k, \xi_t = i\right) \mathbb{P}\left(\xi_{t+n} = k \mid \xi_t = i\right).$$

Ebből a Markov-tulajdonság alapján

$$p_{ij}^{(n+m)}(t) = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)}(t)\, p_{kj}^{(m)}(t+n). \tag{1.17}$$

Ebben a képletben $m = 1$-et választva, n szerinti teljes indukcióval adódik $p_{ij}^{(n)}(t)$-nek t-től való függetlensége. Így (1.17) éppen (1.16)-ot adja. □

1.1. megjegyzés. Az n-lépéses átmeneti valószínűségekből álló $P^{(n)}$ mátrixot a lánc *n-lépéses átmeneti mátrixának* nevezzük. ($P^{(0)}$-t az egységmátrixnak választjuk.) Ekkor (1.16) mátrixos alakja: $P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$.

Az (1.16) egyenleteket nevezzük Chapman-Kolmogorov-egyenleteknek. (1.16) jelentése: i-ből j-be $n + m$ lépéssel úgy mehetünk el, hogy n lépéssel elmegyünk valamely közbülső k állapotba, onnan m lépéssel j-be.

1.4. definíció. A ξ_n eloszlását a lánc *abszolút valószínűségeinek* nevezzük:

$$q_i^{(n)} = \mathbb{P}\left(\xi_n = i\right), \quad i \in I.$$

Jelölje $\boldsymbol{q}^{(n)} = \left(q_i^{(n)}\right)_{i \in I}$ az abszolút valószínűségekből álló sorvektort. Ekkor a teljes valószínűség tételéből:

$$\boldsymbol{q}^{(n)} = \boldsymbol{q} P^{(n)},$$

ahol $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^{(0)}$ a lánc kezdeti eloszlását tartalmazó sorvektor.

Feladatok

1. Idézzük fel a

$$\mathbb{P}(A_nA_{n-1}\cdots A_1) = \mathbb{P}(A_n \mid A_{n-1}\cdots A_1)\cdot\mathbb{P}(A_{n-1}\mid A_{n-2}\cdots A_1)\cdots\mathbb{P}(A_2\mid A_1)\mathbb{P}(A_1)$$

összefüggés bizonyítását!

2. Fejtsük ki részletesen az 1.1. állítás bizonyítását!

3. Végezzük el az (1.2)$\Longrightarrow$(1.3) bizonyításához szükséges teljes indukciót! (Tartsuk emlékezetünkben, hogy (1.2) lényege, hogy a feltételből tetszőleges számú múltbeli időpillanatot törölhetünk!)

4. Részletezzük az 1.2. állítás bizonyítását!

5*. Igazoljuk, hogy az alábbi ekvivalens a Markov-tulajdonsággal:

$$\mathbb{P}(A \mid \xi_{t_n} = i_n, C) = \mathbb{P}(A \mid \xi_{t_n} = i_n)$$

minden t_n időpont, $i_n \in I$, $A \in \sigma\{\xi_t,\, t > t_n\}$ és $C \in \sigma\{\xi_t,\, t < t_n\}$ esetén. (Lásd (1.3)$\Longrightarrow$(1.4) bizonyítását.) Tehát a jövőbeni A és a múltbeli C esemény általános lehet, de a jelenbeli csupán $B = \{\xi_{t_n} = i_n\}$ alakú.
Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a megfelelő állítást a kétoldali és a fordított Markov-tulajdonság esetén is!

6. Írjuk fel a különböző típusú bolyongások átmeneti mátrixát!

7.** Fejtsük ki részletesen az 1.1. tétel bizonyítását!

8. Igazoljuk, hogy $P^{(n)} = P^n$ (azaz az n-lépéses átmeneti mátrix az egylépéses n-edik hatványa)!

9. Igazoljuk, hogy $\boldsymbol{q}^{(n)} = \boldsymbol{q}^{(0)}P^{(n)}$.

10*. Jelölje ξ_n, $n = 0, 1, \ldots$ a nem szimmetrikus $\left(p \neq \frac{1}{2}\right)$ korlátlan bolyongást. Igazoljuk, hogy $\mathbb{P}(\xi_n = 0 \text{ végtelen sok } n\text{-re}) = 0$.

Útmutatás. Számítsuk ki $\mathbb{P}(\xi_{2n} = 0)$-t, alkalmazzuk a Stirling-formulát, majd a Borel-Cantelli-lemmát! A Stirling-formula: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

11.** Igazoljuk, hogy a szimmetrikus korlátlan bolyongás esetén

$$\mathbb{P}(\xi_n = 0 \text{ végtelen sok } n\text{-re}) = 1.$$

Útmutatás. A centrális határeloszlás-tételből

$$\mathbb{P}\left(\limsup \frac{\xi_n}{\sqrt{n}} > c\right) \geq \limsup \mathbb{P}\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{n}} > c\right) > 0 \quad \forall c > 0\text{-ra}.$$

Így a Kolmogorov-féle 0 vagy 1 törvényből

$$\mathbb{P}\left(\limsup \frac{\xi_n}{\sqrt{n}} > c, \liminf \frac{\xi_n}{\sqrt{n}} < -c\right) = 1.$$

Egy másik módszer az iteráltlogaritmus-tétel közvetlen alkalmazása.

12. Igazoljuk, hogy független (azonos eloszlású), egész értékeket felvevő valószínűségi változók részletösszegei (homogén) Markov-láncot alkotnak!

2. Az állapotok osztályozása

Egy Markov-lánc működésének időbeni lefolyását vizsgálva, az egyes állapotokra különböző típusú viselkedések lehetnek jellemzőek. Az egymással szoros kapcsolatban lévő állapotok viselkedése hasonló, így kézenfekvő ezek egy osztályba sorolása. Azon állapotokat fogjuk egy osztályba sorolni, melyek egymásból kölcsönösen elérhetőek valahány lépéssel.

2.1. definíció. A j állapotot az i állapotból *elérhetőnek* nevezzük (jelölésben $i \rightharpoonup j$), ha valamely $n > 0$-ra $p_{ij}^{(n)} > 0$. Az i és j állapotokat *kölcsönösen elérhetőeknek* nevezzük (jelölésben $i \rightleftharpoons j$), ha $i \rightharpoonup j$ és $j \rightharpoonup i$.

A $\rightharpoonup$ reláció tranzitív. Ugyanis $i \rightharpoonup j$, $j \rightharpoonup k$ esetén létezik n, m pozitív egész, hogy $p_{ij}^{(n)} > 0$, $p_{jk}^{(m)} > 0$. Viszont a Chapman-Kolmogorov-egyenletek alapján

$$p_{ik}^{(n+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0,$$

így $i \rightharpoonup k$. A $\rightleftharpoons$ reláció nyilván szimmetrikus is, azonban nem feltétlenül reflexív.

Tekintsük az állapottér azon elemeit, melyek semmilyen állapotból (még önmagukból) sem érhetőek el kölcsönösen. Ezek az állapotok egyenként alkossanak egy-egy külön osztályt. A többi állapoton $\rightharpoonup$ már reflexív, így ekvivalencia reláció. A $\rightleftharpoons$ szerinti osztályozásnál tehát az egymásból kölcsönösen elérhető állapotok kerülnek egy osztályba.

2.2. definíció. Az állapotok valamely tulajdonságát *osztálytulajdonságnak* nevezzük, ha egy osztályon belül vagy minden állapot rendelkezik vele, vagy egyik sem.

Az állapotok osztályba sorolását – konkrét átmeneti mátrix esetén – megkönnyíti az állapotok közötti átmenetek nyilakkal történő szemléltetése.

2.3. definíció. Egy i állapotot *lényegesnek* nevezünk, ha az i-ből elérhető állapotokból vissza lehet térni i-be (azaz $i \rightharpoonup j$ maga után vonja, hogy $j \rightharpoonup i$). Ellenkező esetben i-t *lényegtelennek* nevezzük.

2.1. állítás. *A „lényeges" és a „lényegtelen" tulajdonságok osztálytulajdonságok.*

BIZONYÍTÁS. Elegendő belátni, hogy lényeges állapotból csak lényeges állapot érhető el. Legyen tehát i lényeges és $i \rightharpoonup j$. Legyen k a j-ből elérhető tetszőleges állapot: $j \rightharpoonup k$. Mivel i lényeges és $i \rightharpoonup j \rightharpoonup k$, így $k \rightharpoonup i$. De ekkor k-ból visszatérhetünk j-be a $k \rightharpoonup i \rightharpoonup j$ úton, azaz j tényleg lényeges állapot. □

Ha egy Markov-lánc állapotait úgy rendezzük sorba, hogy a lényeges állapotok kerüljenek előre, és ezen belül az egy osztályba tartozóak egymás mellé, akkor az átmeneti mátrixa a következő alakú lesz:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R \end{pmatrix}.$$

Itt P_i az i-edik lényeges osztályhoz tartozó (sztochasztikus) mátrix, P_i-k a P főátlója mentén helyezkednek el, míg R a lényegtelen állapotokhoz tartozó blokk.

Állapotok egy halmazát zártnak nevezzük, ha nem lehet belőle kijutni. Formálisan az alábbi definíciót adjuk.

2.4. definíció. Állapotok egy A halmazát *zártnak* nevezzük, ha bármely $i \in A$ esetén

$$\sum_{j \in A} p_{ij} = 1.$$

Egy zárt halmazt *minimálisnak* mondunk, ha nincs valódi zárt részhalmaza.

A zártság definíciójából azonnal látható, hogy zárt osztályból nemcsak egy lépéssel, hanem akárhány lépéssel sem lehet kijutni. Az egész állapottér nyilván zárt halmaz. Egy lényeges osztály pedig minimális zárt halmaz.

2.5. definíció. Egy Markov-láncot *irreducubilisnek* nevezünk, ha a teljes állapottér minimális zárt halmaz.

2.1. tétel. *Egy Markov-lánc akkor és csak akkor irreducibilis, ha az egész állapottere egyetlen lényeges osztályt alkot (azaz minden állapot elérhető minden állapotból).*

BIZONYÍTÁS. Egy lényeges osztály nyilván minimális zárt halmaz. Másrészt, lényegtelen állapot nem lehet minimális zárt osztálynak eleme, hiszen egy i lényegtelen állapotból ki lehet úgy jutni, hogy nem lehet visszatérni. Legyen ilyen i-ből elérhető a j állapot. A j-ből elérhető állapotok zárt halmazt alkotnak, de ebben nincs benne i (lásd 3. feladat). □

2.1. példa. A korlátlan véletlen bolyongás ($0 < p < 1$ esetén) irreducibilis Markov-lánc. Figyeljük meg, hogy ebben a láncban bármely állapotba csak páros számú lépéssel tudunk visszatérni. Azt fogjuk mondani, hogy a lánc periódusa 2.

2.6. definíció. Az i állapot *periódusának* azon n számok legnagyobb közös osztóját nevezzük, amelyekre $p_{ii}^{(n)} > 0$. Az i periódusát d_i-vel jelöljük. $d_i = 1$ esetén az i állapotot *aperiodikusnak* nevezzük.

2.2. tétel. *A „d-periódus” osztálytulajdonság.*

BIZONYÍTÁS. Legyen i és j egyazon osztályban, így létezik m, n, hogy $p_{ij}^{(m)} > 0$, $p_{ji}^{(n)} > 0$. Legyen s tetszőleges pozitív egész, melyre $p_{ii}^{(s)} > 0$. Ekkor $p_{ii}^{(2s)} > 0$ is igaz. Másrészt

$$p_{jj}^{(n+s+m)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(s)} p_{ij}^{(m)} > 0$$

alapján

$$p_{jj}^{(n+s+m)} > 0.$$

Hasonlóan

$$p_{jj}^{(n+2s+m)} > 0$$

is igaz. Ezekből $d_j \mid n+s+m$ és $d_j \mid n+2s+m$, amiből $d_j \mid s$. Így d_j osztója az összes olyan s-nek, melyre $p_{ii}^{(s)} > 0$, azaz d_j osztója az ilyen s-ek legnagyobb közös osztójának is, tehát $d_j \mid d_i$. Másrészt i és j szerepének felcserélésével $d_i \mid d_j$. Tehát $d_i = d_j$. □

A korlátlan véletlen bolyongás esetén páros sorszámú állapotból mindig páratlan sorszámúra ugrunk, majd újra párosra. Hasonló szabályszerűség érvényes minden periodikus osztályban. Ennek leírása a periodikus osztály alkalmas csoportokra bontásával érhető el.

2.3. tétel. *Legyen A egy d periódusú lényeges osztály. Ekkor A diszjunkt $G_0, G_1, \dots, G_{d-1}$ csoportokra bontható úgy, hogy a lánc egy lépéssel G_k-ból G_{k+1}-be jut* $(\mathrm{mod}\ d)$. *Ez a felbontás „lényegében" egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $i \in A$ rögzített. Jelölje G_k, $k = 0, 1, \dots, d-1$, azon állapotok halmazát, amelyek i-ből k lépéssel elérhetőek $(\mathrm{mod}\ d)$. Ekkor a $G_0, \dots, G_{d-1}$ halmazok diszjunktak és uniójuk éppen A. Ha egy állapot G_k-ból egy lépéssel elérhető, akkor ez az állapot i-ből $(k+1)$ lépéssel érhető el $(\mathrm{mod}\ d)$, azaz G_{k+1}-ben van. Az a tény, hogy egy lépéssel a lánc G_k-ból G_{k+1}-be jut, azt is maga után vonja, hogy a csoportok függetlenek az i kezdőállapot rögzítésétől; i kijelölése csak a kezdőindexet határozza meg (a G-k közötti „körben járásban"). □

A fenti esetben az átmeneti mátrix alakja:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_2 & 0 & \cdots \\ & & & \ddots & \\ & & & 0 & P_{d-1} \\ P_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Feladatok

1. Osztályozzuk a különböző típusú bolyongások állapotait, és határozzuk meg a periódusukat!

2. Legyen egy Markov-lánc átmeneti mátrixa

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Ábrázoljuk az állapotok közötti átmeneteket diagramon! Milyen p_i-k esetén lesz a lánc irreducibilis, illetve aperiodikus?

3. Bizonyítsuk be, hogy egy rögzített állapotból elérhető összes állapot zárt halmazt alkot!

4. Bizonyítsuk be, hogy véges sok lényegtelen osztály uniója nem lehet zárt! Adjunk példát arra, hogy végtelen sok lényegtelen osztály uniója lehet zárt!

5. Részletezzük a 2.3 tétel bizonyítását! Igaz-e a tétel lényegtelen osztályok esetén?

6. Egy d periódusú irreducibilis lánc állapotait rendezzük sorba a $G_0, G_1, \dots, G_{d-1}$ csoportoknak megfelelően. Milyen alakú lesz az átmeneti mátrix?

7*. Bizonyítsuk be, hogy egy véges állapotterű irreducibilis Markov-lánc akkor és csak akkor aperiodikus, ha létezik n pozitív egész, hogy $p_{ij}^{(n)} > 0$ minden i, j

állapotra! (Útmutatás. Relatív prímekből bármely egész szám előállítható egész együtthatós lineáris kombinációként.)

8. Legyen

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

egy sztochasztikus mátrix. Lássuk be, hogy

$$P^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}.$$

Vizsgáljuk P^n viselkedését $n \to \infty$ esetén!

3. Az erős Markov-tulajdonság

Legyen $\xi_0, \xi_1, \ldots$ Markov-lánc, τ pedig egy véletlen idő, azaz olyan valószínűségi változó, melynek értékei: $0, 1, 2, \ldots, \infty$. Jelölje $\sigma\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ a $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ által generált σ-algebrát. Azaz a $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$-nel „kapcsolatos" események összességét.

3.1. definíció. τ-t *megállási időnek (Markov-pillanatnak)* nevezzük, ha

$$\{\tau = n\} \in \sigma\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Azaz azt, hogy a $\{\tau = n\}$ esemény bekövetkezik-e, el tudjuk dönteni a $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ megfigyelése alapján. Más szóval τ nem függ a jövőtől.

3.2. definíció. Legyen τ megállási idő. $\mathcal{F}_\tau$ jelöli a τ *előtti eseményeket*:

$$A \in \mathcal{F}_\tau \iff A \cap \{\tau = n\} \in \sigma\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}, \quad \forall n.$$

Vagyis, ha $\tau = n$, akkor $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ (megfigyelése) alapján meg tudjuk állapítani, hogy A bekövetkezett-e.

3.1. példa. Egy állapot *első elérési ideje* Markov-pillanat. Legyen $T = T_i(1)$, az i első elérési (visszatérési) ideje.

$$\{T = n\} = \{\xi_1 \neq i, \xi_2 \neq i, \ldots, \xi_{n-1} \neq i, \xi_n = i\}, \quad \forall n.$$

A $\{T = n\}$ esemény nyilván a T előtti esemény.

Az erős Markov-tulajdonság azt jelenti, hogy Markov-pillanatokra is teljesül a Markov-tulajdonság, nem csak determinisztikus időpontokra.

3.1. állítás. *Legyen $\xi_0, \xi_1, \ldots$ homogén Markov-lánc, τ Markov-pillanat, A a τ előtti esemény. Ekkor*

$$\mathbb{P}(A \cap \{\xi_\tau = i_0, \xi_{\tau+1} = i_1, \ldots, \xi_{\tau+k} = i_k\}) = \mathbb{P}(A \cap \{\xi_\tau = i_0\}) p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{k-1} i_k}. \quad (3.1)$$

Bizonyítás. A fenti egyenlőség bal oldala:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap \{\tau = n, \xi_n = i_0, \xi_{n+1} = i_1, \dots, \xi_{n+k} = i_k\}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap \{\tau = n, \xi_n = i_0\})\mathbb{P}(\xi_{n+1} = i_1, \dots, \xi_{n+k} = i_k | \underbrace{A \cap \{\tau = n, \xi_n = i_0\}}_{A \cap \{\tau=n\} \cap \{\xi_n = i_0\}})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap \{\tau = n, \xi_n = i_0\}) \underbrace{\mathbb{P}(\xi_{n+1} = i_1, \dots, \xi_{n+k} = i_k \mid \xi_n = i_0)}_{p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{k-1} i_k}} =$$

$$= \mathbb{P}(A \cap \{\xi_\tau = i_0\}) p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{k-1} i_k}.$$

□

3.1. megjegyzés. Fenn a Markov-tulajdonságot $\mathbb{P}(B \mid \{\xi_n = i_0\}\, C) = \mathbb{P}(B \mid \xi_n = i_0)$ alakban használtuk, ahol B jövőbeli, C pedig olyan múltbeli esemény, mely a jelentől is függ: $C \in \sigma\{\xi_0, \dots, \xi_n\}$. De ekkor C bizonyos $\{\xi_0 = j_0, \dots, \xi_n = j_n\}$ alakú események megszámlálható uniója. És a fenti egyenlőség nem más, mint

$$\mathbb{P}(B\,\{\xi_n = i_0\}\, C) = \mathbb{P}(B \mid \xi_n = i_0)\mathbb{P}(\{\xi_n = i_0\}\, C).$$

Ez teljesül C minden előbb jelzett összetevőjére (a Markov-tulajdonság miatt), de így teljesül C-re is.

3.1. tétel (Erős Markov-tulajdonság). *Legyen τ Markov-pillanat. Ekkor*

1. *bármely $i_0, i_1, \dots, i_k$ állapotokra*

$$\mathbb{P}(\xi_{\tau+1} = i_1, \dots, \xi_{\tau+k} = i_k \mid \xi_\tau = i_0) = p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{k-1} i_k};$$

2. *bármely $i_0, i_1, \dots, i_k$ állapotokra*

$$\mathbb{P}(\xi_{\tau+1} = i_1, \dots, \xi_{\tau+k} = i_k \mid A \cap \{\xi_\tau = i_0\}) = \mathbb{P}(\xi_{\tau+1} = i_1, \dots, \xi_{\tau+k} = i_k \mid \xi_\tau = i_0),$$

ahol A a τ előtti esemény.

Bizonyítás. **1.** (3.1)-ban legyen $A = \Omega$ és utána osszunk $\mathbb{P}\{\xi_\tau = i_0\}$-lal.

2. Osszunk (3.1)-ban $\mathbb{P}(A \cap \{\xi_\tau = i_0\})$-lal és alkalmazzuk az első pontot. □

Az erős Markov-tulajdonság szerint $\{\xi_\tau = i_0\}$ elérése után a lánc úgy fejlődik, mintha $\{\xi_0 = i_0\}$-ból indulna. A kétoldali Markov-tulajdonság erős változata az alábbi. A τ-hoz képest múltbeli és a τ-hoz képest jövőbeli események egymástól függetlenek a $\{\xi_\tau = i_0\}$ feltételre vonatkozóan.

3.2. állítás. *Legyen τ Markov-pillanat. Legyen A τ előtti esemény, B pedig τ-jövőbeli esemény. Ekkor*

$$\mathbb{P}(AB \mid \xi_\tau = i_0) = \mathbb{P}(A \mid \xi_\tau = i_0)\mathbb{P}(B \mid \xi_\tau = i_0). \tag{3.2}$$

Ez az erős kétoldali Markov-tulajdonság.

BIZONYÍTÁS. Mivel B τ-jövőbeli esemény, így B alakja

$$B = \left\{(\xi_{\tau+1}, \xi_{\tau+2}, \dots, \xi_{\tau+k}) \in \widetilde{B}\right\}$$

alakú. Ekkor (3.1)-ban összegezve

$$\mathbb{P}(A \cap \{\xi_\tau = i_0\} \cap B) = \mathbb{P}(A \cap \{\xi_\tau = i_0\} \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\widetilde{B}} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{k-1} i_k}. \tag{3.3}$$

Itt $A = \Omega$-t véve:

$$\mathbb{P}(B \mid \xi_\tau = i_0) = \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\widetilde{B}} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{k-1} i_k}.$$

Most (3.3)-ben $\mathbb{P}(\xi_\tau = i_0)$-lal osztva és ezt felhasználva kapjuk a (3.2) összefüggést. $\square$

Ha most T a k állapot elérési ideje és $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, azaz k visszatérő állapot, akkor $\{\xi_T = k\}$ biztos esemény, vagyis a $\{\xi_T = k\}$ feltételre vett feltételes valószínűség a rendes valószínűség. Így A és B független, ha A a T előtti, B pedig a T utáni esemény.

Legyenek $T_k(1), T_k(2), \dots$ a k állapot egymás utáni visszatérési idejei. Tegyük fel, hogy k visszatérő állapot. Ekkor a $0, T_k(1), T_k(2), \dots$ osztópontok közötti intervallumokba eső megfigyelésektől függő események függetlenek. Speciálisan, az $U_k(1) = T_k(1), U_k(2) = T_k(2) - T_k(1), U_k(3) = T_k(3) - T_k(2), \dots$ valószínűségi változók (teljesen) függetlenek. Sőt, $U_k(2), U_k(3), \dots$ azonos eloszlásúak is.

4. Visszatérőség

Legyen $T = T_k(1)$ a k állapotba való *első visszatérés ideje.* Jelölje $f_{kk}^{(n)}$ a T „eloszlását", azaz

$$f_{kk}^{(n)} = \mathbb{P}(T = n \mid \xi_0 = k), \quad n = 1, 2, \dots.$$

Azaz $f_{kk}^{(n)}$ annak a valószínűsége, hogy először az $n > 0$ időpillanatban lesz a lánc k-ban, feltéve, hogy k-ból indult ki.

Általában $T_k(l)$ jelöli a k-ba való l-edik visszatérés idejét.

Jelölje $U_k(i)$ két k-látogatás közötti időt:

$$U_k(i) = T_k(i) - T_k(i-1).$$

4.1. definíció. A k állapotot *visszatérőnek* nevezzük, ha a lánc 1 valószínűséggel visszatér k-ba:

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} f_{kk}^{(n)} = 1.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy T eloszlása valódi (azaz 1 összegű). Ha k nem visszatérő, akkor *átmeneti állapotnak* nevezzük. Ez azt jelenti, hogy 1-nél kisebb valószínűséggel tér a k-ba vissza:

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} f_{kk}^{(n)} < 1.$$

Azaz $\mathbb{P}(T = \infty) > 0$. Ekkor nyilván $\mathbb{E}T = \infty$.

4.1. A visszatérőség kritériuma

4.1. tétel. *k visszatérő* $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} p_{kk}^{(n)} = \infty$.

Bizonyítás. Legyen M a k-ba való visszatérések száma:

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{\xi_n = k\}}.$$

Ekkor

$$\mathbb{P}(M \geq l \mid \xi_0 = k) = \mathbb{P}(U_k(l) < \infty, \dots, U_k(1) < \infty \mid \xi_0 = k) = f_{kk}^l,$$

ahol f_{kk} a k-ba való visszatérés valószínűsége:

$$\mathbb{P}(U_k(1) < \infty \mid \xi_0 = k) = f_{kk}.$$

Ennek igazolása például $l = 2$-re:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(U_k(2) < \infty, U_k(1) < \infty \mid \xi_0 = k) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(U_k(2) < \infty, U_k(1) = n \mid \xi_0 = k) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(U_k(2) < \infty \mid \xi_n = k, \xi_t \neq k, \text{ ha } 1 \leq t < n, \xi_0 = k) \times \\
&\times \mathbb{P}(\xi_n = k, \xi_t \neq k, \text{ ha } 1 \leq t < n, \mid \xi_0 = k) = \\
&= f_{kk} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_n = k, \xi_t \neq k, \text{ ha } 1 \leq t < n, \mid \xi_0 = k) = f_{kk} f_{kk}.
\end{aligned}$$

A pozitív egész értékű valószínűségi változók várható értékére vonatkozó ismert összefüggés alapján

$$\mathbb{E}(M \mid \xi_0 = k) = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{P}(M \geq l \mid \xi_0 = k) = \sum_{l=1}^{\infty} f_{kk}^l.$$

(a) Ha most k nem visszatérő, akkor $f_{kk} < 1$, azaz a fenti mértani sor konvergens, tehát

$$\mathbb{E}(M \mid \xi_0 = k) < \infty.$$

De ekkor

$$\begin{aligned}
\infty > \mathbb{E}(M \mid \xi_0 = k) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(1_{\{\xi_n = k\}} \mid \xi_0 = k\right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_n = k \mid \xi_0 = k) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{kk}^{(n)}.
\end{aligned}$$

(b) Ha viszont k visszatérő, akkor $\mathbb{P}(M \geq l \mid \xi_0 = k) = f_{kk}^l = 1$ minden l-re. Azaz — a valószínűség folytonossága miatt — $\mathbb{P}(M = \infty \mid \xi_0 = k) = 1$. Tehát azt is kaptuk, hogy ha k visszatérő, akkor 1 valószínűséggel végtelen sokszor visszatér a lánc k-ba. Ám ekkor

$$\infty = \mathbb{E}(M \mid \xi_0 = k) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{kk}^{(n)}.$$

□

4.1. állítás. *A visszatérőség osztálytulajdonság.*

Bizonyítás. Legyen k visszatérő, és $i \rightleftharpoons k$. Ekkor

$$p_{ii}^{(s+n+t)} \geq p_{ik}^{(s)} p_{kk}^{(n)} p_{ki}^{(t)}$$

miatt, ha k-ra teljesül a visszatérőség kritériuma, akkor i-re is. □

4.1. megjegyzés. Egy lényegtelen állapot nem lehet visszatérő.

4.1. példa. A korlátlan véletlen bolyongás a számegyenesen akkor és csak akkor visszatérő, ha szimmetrikus (azaz $p = \frac{1}{2}$). Mivel $p_{00}^{(l)} = 0$, ha l páratlan, ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(2n)}$ sort kell vizsgálni.

$$\text{A Stirling-formula: } n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Ez alapján

$$\begin{aligned} p_{00}^{(2n)} &= \mathbb{P}(\xi_{2n} = 0 \mid \xi_0 = 0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \sim \\ &\sim \left\{ \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi 2n}}{\left[\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right]^2} \right\} p^n (1-p)^n = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left[4p(1-p)\right]^n = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} t^n, \end{aligned}$$

ahol $t = 4p(1-p) < 1$, ha $p \neq \frac{1}{2}$, és $t = 1$, ha $p = \frac{1}{2}$. Tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(2n)} = \infty \Longleftrightarrow p = \frac{1}{2}.$$

A visszatérőség kritériuma szerint a lánc akkor és csak akkor visszatérő, ha $p = \frac{1}{2}$.

4.2. megjegyzés. A szimmetrikus véletlen bolyongás a d-dimenziós tér rácspontjain akkor és csak akkor visszatérő, ha $d \leq 2$.

4.2. példa. A számegyenesen a szimmetrikus véletlen bolyongás esetén az átlagos visszatérési idő végtelen:

$$\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n f_{00}^{(2n)} = \infty.$$

Induljunk ki az

$$f_{00}^{(2n)} = \mathbb{P}(2n\text{-edik lépésben tér vissza először} \mid \xi_{2n} = 0)\mathbb{P}(\xi_{2n} = 0) \tag{4.1}$$

összefüggésből (eleve feltesszük, hogy a 0-ból indul ki a lánc).

$$\mathbb{P}(\xi_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(4.1)-ban a feltételes valószínűséget klasszikus (de nem feltételes) valószínűségként számíthatjuk. Az összes esetek száma: $\binom{2n}{n}$. A kedvező esetek száma: a $(0,0)$-ból a $(2n,0)$-ba vivő, tengelyt nem metsző trajektóriák száma.

$$\begin{aligned}&[\text{A tengely fölötti kedvező trajektóriák száma}] =\\ &\quad= [(1,1)\text{-ből } (2n-1,1)\text{-be vezető összes trajektóriák száma}] -\\ &\quad-[(1,1)\text{-ből } (2n-1,1)\text{-be vezető, tengelyt metsző trajektóriák száma}] =\\ &\quad= \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}.\end{aligned}$$

A $\binom{2n-2}{n}$ képlet a tükrözési elv alapján adódik. Ugyanis

$$\begin{aligned}&[(1,1)\text{-ből } (2n-1,1)\text{-be vezető, tengelyt metsző trajektóriák száma}] =\\ &= [(1,-1)\text{-ből } (2n-1,1)\text{-be vezető trajektóriák száma}].\end{aligned}$$

Tehát a kedvező esetek száma:

$$\begin{aligned}&2\left[\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}\right] =\\ &\quad= 2\left[\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}\right] =\\ &\quad= 2\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}[n-(n-1)] =\\ &\quad= \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

(4.1)-ben a feltételes valószínűség: $\frac{1}{2n-1}$. Így

$$f_{00}^{(2n)} = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

A Stirling-formula alapján

$$2nf_{00}^{(2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Tehát

$$\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2nf_{00}^{(2n)} = \infty.$$

5. Ergodicitás

Egy Markov-lánc minden egyes i állapotára értelmezzük a T valószínűségi változót mint az adott i állapotba való *első visszatérés idejét.* Az, hogy egy i állapot visszatérő, most azt jelenti, hogy a T változó eloszlása valódi, azaz $\mathbb{P}(T<\infty|\xi_0=i)=1$. Az $m_{ii}=\mathbb{E}(T|\xi_0=i)$ várható érték még az utóbbi esetben is lehet végtelen. *m_{ii}-t átlagos visszatérési időnek nevezzük.*

5.1. definíció. Az i állapotot *ergodikusnak*, másszóval *pozitívnak* nevezzük, ha

$$m_{ii} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot f_{ii}^{(k)} < \infty.$$

és *nullállapotnak* nevezzük, ha $m_{ii} = \infty$.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az i állapot aperiodikus, azaz, hogy $d_i = 1$. A $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ határértékek tanulmányozásakor alapvető szerepet játszik az alábbi tétel.

5.1. tétel. *Tetszőleges visszatérő aperiodikus állapotra*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{m_{ii}},$$

(ahol $1/\infty$ *alatt 0-t értünk).*

A tétel állítása az ún. diszkrét felújítási folyamatokra vonatkozó Blackwell-tétellel ekvivalens. A bizonyítás megtalálható W. Feller: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978) c. könyv 120–122. oldalain. Maga az eredmény az alábbi.

Legyen adott nemnegatív számok egy $f_1, f_2, \dots$ sorozata. A $p_0, p_1, \dots$ számsorozatot az alábbi rekurzív módon definiáljuk. Legyen $p_0 = 1$ és $n \geq 1$-re $p_n = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu p_{n-\nu}$. Ezt az egyenletet (speciális) diszkrét felújítási egyenletnek nevezzük.

5.2. tétel. *Legyen* $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu = 1$, *és legyen 1-gyel egyenlő azon* ν*-k legnagyobb közös osztója, melyekre* $f_\nu > 0$. *Legyen* $m = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n$. *Ekkor a fent definiált* p_n *sorozatra*

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{m},$$

ahol $1/\infty$ *alatt 0-t értünk.*

Ezt az 5.1. tétel igazolására $p_n = p_{ii}^{(n)}$ és $f_\nu = f_{ii}^{(\nu)}$ választással használhatjuk. Meg kell még jegyezni, hogy ha a lánc periódusa d, akkor d-vel egyenlő azon ν-k legnagyobb közös osztója, melyekre $f_{ii}^{(\nu)} > 0$.

5.1. következmény. *Ha* $i \rightleftharpoons j$ *és* j *visszatérő aperiodikus, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{m_{jj}}.$$

5.3. tétel. *Az ergodicitás osztálytulajdonság.*

Bizonyítás. Legyen $i \rightleftharpoons j$ és $p_{ij}^{(m)} > 0$, $p_{ji}^{(n)} > 0$. Ekkor

$$p_{ii}^{(m+\nu+n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(\nu)} p_{ji}^{(n)},$$

és

$$p_{jj}^{(n+\nu+m)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(\nu)} p_{ij}^{(m)}.$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből látható, hogy a $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$ és a $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}$ határértékek vagy mind zérusak, vagy mindkettő pozitív. □

5.4. tétel. *Ha egy homogén Markov-lánc aperiodikus, akkor*

α) *bármely nem visszatérő j állapotra, tetszőleges kiinduló i állapot esetén*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0;$$

β) *ha i és j két különböző lényeges osztályba tartozó állapotok, akkor*

$$p_{ij}^{(n)} = 0 \quad \textit{minden} \quad n \geq 0\textit{-ra};$$

γ) *ha i és j egy visszatérő osztály két állapota, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{m_{jj}};$$

δ) *ha i lényegtelen, j viszont visszatérő állapot, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{*}\frac{1}{m_{jj}}.$$

Az előző eredményeink csak aperiodikus Markov-láncokra vonatkoznak. A gyakorlati alkalmazásokat tekintve ezek az eredmények az esetek túlnyomó többségében elegendőek a felmerülő problémák vizsgálatához. Ha eltekintünk az aperiodicitás feltételezésétől, akkor a 5.4. tétel állításai bizonyos módosításokra szorulnak. A teljesség kedvéért az alábbiakban ismertetjük ezeket a módosításokat anélkül, hogy ezek részletesebb igazolására kitérnénk.

Legyen A egy Markov-lánc állapotainak bizonyos lényeges osztálya, A minden eleme azonos *periodicitású*. Jelöljük a közös periódust d-vel. $d > 1$ esetén az A osztály felbontható diszjunkt $C_1, C_2, \dots, C_d$ részhalmazok, ún. ciklikus alosztályok összegére:

$$A = \bigcup_{r=1}^{d} C_r$$

oly módon, hogy $i \in C_r$, $j \in C_s$ esetén $p_{ij}^{(n)} > 0$ csak akkor, ha $n \equiv s - r \mod (d)$.

Rögzítsük most az A osztály két állapotát, i-t és j-t. Világos, hogy ha bizonyos $n = kd + r$, $1 \leq r < d$, $k \geq 0$ mellett $p_{ij}^{(n)} > 0$, akkor valamilyen más $m \geq 0$-ra $p_{ij}^{(m)} > 0$ csak akkor lehetséges, ha $m \equiv n \mod (d)$. Ez arra enged következtetni, hogy periodikus esetben a $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ határértékek nem léteznek. Ehelyett a

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)}$$

típusú határértékekről beszélhetünk, ahol $i \in C_u$, $j \in C_s$ esetén $r \equiv s - u \mod (d)$. Pontosabban, ha a Markov-lánc állapottere periodikus osztályokra bomlik, akkor az 5.4. tétel γ) illetve δ) állításai a következőképpen módosulnak.

5.1. megjegyzés. γ') Legyen i és j egy $d > 1$ periódusú visszatérő osztály két állapota. Ekkor, ha $i \in C_u$, $j \in C_s$ és r az 1 és d közé eső azon egész szám, amelyre $r \equiv s - u \mod (d)$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = \frac{d}{m_{jj}}.$$

δ') Ha i lényegtelen állapot, j viszont $d > 1$ periódusú visszatérő állapot, akkor bármely $r \geq 0$-ra

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = f_{ij}^*(r) \cdot \frac{d}{m_{jj}},$$

ahol

$$f_{ij}^*(r) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}^{(kd+r)}, \quad i \in C_u,\ j \in C_s,\ r \equiv s - u \mod (d).$$

Az alkalmazások többségében a tekintendő Markov-lánc aperiodicitásán kívül az is teljesül, hogy a lánc fázistere minimális zárt halmazt alkot, azaz, hogy a lánc irreducibilis. Ez esetben az állapottér önmaga alkot egy lényeges osztályt.

5.5. tétel. *Ha a Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus, akkor két eset lehetséges:*

(a) *vagy minden i, j elempárra*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0;$$

(b) *vagy az állapotok ergodikusak, azaz tetszőleges i, j-re a kiinduló i állapottól függetlenül*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = u_j > 0. \tag{5.1}$$

6. Stacionaritás

Ha a láncot a stacionárius eloszlásból indítjuk ki, akkor minden lépésben ebben az eloszlásban lesz. Célunk, hogy megmutassuk, egy ergodikus Markov-láncnak van stacionárius eloszlása, és a lánc a működése során „belekerül” a stacionárius eloszlásába.

6.1. definíció. A $\pi = (\pi_i)$ eloszlást a lánc *stacionárius eloszlásának* nevezzük, ha

$$\pi_i = \sum_k \pi_k p_{ki} \qquad \forall i.$$

Azaz, ha ξ_0 eloszlása (π_i), akkor ξ_1 eloszlása is ugyanez. Továbbá $\xi_2, \xi_3, \ldots$ eloszlása is. Sőt, ha ξ_0 eloszlása stacionárius, akkor a lánc erősen stacionárius sorozat (feltételezzük a homogenitást). Ugyanis a végesdimenziós eloszlások:

$$\mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n) = \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n},$$

és ugyanez $\xi_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_{k+n}$ eloszlása is.

6.1. tétel. *Legyen a lánc irreducibilis, aperiodikus. Ha a lánc pozitív, akkor $(\pi_j) = \left(\frac{1}{\mu_j}\right)$ egyértelmű stacionárius eloszlása. Ha a lánc állapotai nullállapotok, akkor nincs stacionárius eloszlása.*

Bizonyítás. A lánc irreducibilis, aperiodikus volta miatt

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j\,.$$

Viszont $\sum_{j\in I} p_{ij}^{(n)} = 1$ miatt $\sum_{j\in I_0} p_{ij}^{(n)} \le 1$ az állapottér tetszőleges véges I_0 részhalmazára. Ebből $\sum_{j\in I_0} \pi_j \le 1$ következik. Így

$$\sum\nolimits_{j\in I} \pi_j \le 1.$$

Másrészt a

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum\nolimits_{k\in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$$

egyenletekben $n \to \infty$ esetén

$$\pi_j = \sum\nolimits_{k\in I} \pi_k p_{kj}, \qquad \forall j.$$

Ezen határátmenet „jogosságát" az alábbiak bizonyítják. Bármely I_ε véges állapothalmazra

$$p_{ij}^{(n+1)} \ge \sum\nolimits_{k\in I_\varepsilon} p_{ik}^{(n)} p_{kj}.$$

$n \to \infty$ esetén

$$\pi_j \ge \sum\nolimits_{k\in I_\varepsilon} \pi_k p_{kj},$$

de ekkor

$$\pi_j \ge \sum\nolimits_{k\in I} \pi_k p_{kj} \qquad \forall j.$$

Összegezve j-re:

$$\sum\nolimits_{j\in I} \pi_j \ge \sum\nolimits_{j\in I} \sum\nolimits_{k\in I} \pi_k p_{kj} = \sum\nolimits_{k\in I} \pi_k \underbrace{\sum\nolimits_{j\in I} p_{kj}}_{1} = \sum\nolimits_{k\in I} \pi_k,$$

azaz egyenlőség áll fenn. Tehát minden j-re is egyenlőség teljesül:

$$\pi_j = \sum\nolimits_{k\in I} \pi_k p_{kj} \qquad \forall j.$$

Legyen a lánc pozitív. Ekkor az utolsó egyenlőség alapján $(\pi_j / \sum_i \pi_i)$ stacionárius eloszlás (tehát létezik).

Legyen most (x_j) tetszőleges stacionárius eloszlás. Ekkor

$$x_j = \sum\nolimits_{k\in I} x_k p_{kj}^{(n)}, \qquad \forall n.$$

Ha $n \to \infty$ (a dominált konvergencia-tétel alapján):

$$x_j = \sum\nolimits_{k\in I} x_k \pi_j = \pi_j.$$

Ez a pozitív esetben azt igazolja, hogy a (létező) stacionárius eloszlás éppen $(\pi_j) = \left(\frac{1}{\mu_j}\right)$.

Viszont a nullállapotok esetén $x_i = \pi_j = 0$, $\forall j$, adódik. Azaz nem létezik ekkor stacionárius eloszlás. □

6.1. következmény. *Véges állapotterű irreducibilis, aperiodikus Markov-láncnak mindig van stacionárius eloszlása. Hiszen ekkor a lánc pozitív ($\pi_j = 0$, $\forall j$, nem fordulhat elő).*

6.2. következmény. *Irreducibilis, aperiodikus, pozitív lánc esetén ξ_n eloszlása tart a stacionárius eloszláshoz. Hiszen*

$$p_j^{(n)} = \sum\nolimits_{i \in I} q_i p_{ij}^{(n)} \longrightarrow \sum\nolimits_{i \in I} q_i \pi_j = \pi_j.$$

6.1. megjegyzés. A stacionaritással egyenértékű a

$$\sum\nolimits_{i \in I} \pi_j p_{ji} = \sum\nolimits_{i \in I} p_{ij} \pi_i, \qquad \forall j,$$

úgynevezett *teljes egyensúlyi egyenlet* (full balance). Ugyanis a bal oldal nyilván π_j. Az elnevezésnek a következő a magyarázata. Egy részecske mozgását írja le a lánc. Üzemeltessünk sok láncot egyszerre. Ekkor a bal oldal a j állapotból kiáramló részecskék, míg a jobb oldal a j állapotba beáramló részecskék számával arányos.

6.2. megjegyzés. Ismeretes, hogy a Markov-láncokra teljesül a fordított Markov-tulajdonság. A láncot időben visszafelé üzemeltetve, az átmenetvalószínűség (a Bayes-formula alapján):

$$\mathbb{P}(\xi_{-1} = j \mid \xi_0 = i) = \mathbb{P}(\xi_0 = i \mid \xi_{-1} = j)\mathbb{P}(\xi_{-1} = j)/\mathbb{P}(\xi_0 = i).$$

Ez az átmenetvalószínűség nem biztos, hogy megegyezik p_{ij}-vel. Követeljük ezt meg külön! A stacionárius esetben ez a következő:

$$p_{ij} = p_{ji}\pi_j/\pi_i,$$

azaz

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \qquad \forall i, j.$$

Ez a *részletes egyensúlyi egyenlet* (detailed balance). Ez azt fejezi ki, hogy az i-ből j-be áramlás egyenlő a j-ből i-be áramlással. Egyensúlyi helyzetben lévő zárt mechanikai rendszerek rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal.

6.2. tétel. *Ha a (π_j) eloszlásra teljesül a részletes egyensúlyi egyenlet, akkor (π_j) stacionárius eloszlás.*

BIZONYÍTÁS. Szumázzunk i-re! □

6.1. példa. Az általánosított születési és kihalási folyamat. Legyen az állapottér: $0, 1, 2, \ldots$. $\xi_n = i$ azt jelenti, hogy az n időpillanatban a populáció lélekszáma i. A lehetséges állapotváltozások: $i \to i+1$ (egy születés, ennek valószínűsége p_i), $i \to i-1$ (egy elhalálozás, ennek valószínűsége q_i), $i \to i$ (nincs változás, ennek valószínűsége r_i). Az átmeneti mátrix:

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy $p_i > 0$, $q_i > 0$, $\forall i$. Ekkor a lánc irreducibilis. A részletes egyensúlyi egyenlet:

$$\pi_i p_{ij} = p_{ji}\pi_j.$$

Ez $i = 0$ és $j = 1$ esetén:

$$\pi_0 p_0 = q_1 \pi_1,$$

azaz

$$\pi_1 = \pi_0 \frac{p_0}{q_1}.$$

Most i és $j = i + 1$ esetén:

$$\pi_i p_i = q_{i+1} \pi_{i+1}.$$

Azaz

$$\pi_{i+1} = \pi_i \frac{p_i}{q_{i+1}}.$$

Innen indukcióval:

$$\pi_i = \pi_0 \frac{p_0}{q_1} \frac{p_1}{q_2} \cdots \frac{p_{i-1}}{q_i}, \qquad \forall i.$$

A teljes összeg:

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{l=1}^{i} \frac{p_{l-1}}{q_l}. \tag{6.1}$$

Azaz, ha

$$\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{l=1}^{i} \frac{p_{l-1}}{q_l} < \infty, \tag{6.2}$$

akkor a fenti egyenletből π_0 kifejezhető, és így $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots$ megkapható. A részletes egyensúlyi egyenlet $i = j$ esetén minden láncra teljesül ($\pi_i p_{ii} = p_{ii} \pi_i$). Továbbá esetünkben, ha i és j távolsága 1-nél nagyobb, akkor $0 = 0$-ába megy át. Ha viszont $j = i - 1$, akkor éppen az előzőben már vizsgált eredményt kapjuk (csak az oldalak szerepe cserélődik fel). Tehát a fenti (6.2) feltétel teljesülése esetén minden i, j-re teljesül a részletes egyensúlyi egyenlet, így $\pi_0, \pi_1, \ldots$ stacionárius eloszlás.

6.2. példa. Visszaverő határfalú véletlen bolyongás. Az előző speciális eseteként kapjuk. $-\frac{1}{2}$-ben visszaverő fal van.

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \\ 0 & q & 0 & p & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Az előző (6.1) egyenlet:

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^i = \pi_0 \frac{1}{1 - \frac{p}{q}} = \pi_0 \frac{1-p}{1-2p},$$

ha $\frac{p}{q} < 1$, azaz ha $p < \frac{1}{2}$. Tehát $p < \frac{1}{2}$ esetén π_0 kifejezhető:

$$\pi_0 = \frac{1-2p}{1-p}.$$

Ekkor $\pi_i = \pi_0 \left(\frac{p}{1-p}\right)^i$, $i = 0, 1, \ldots$, stacionárius eloszlás. $p \geq \frac{1}{2}$ esetén a lánc kisodródik a végtelenbe (ekkor nincs stacionárius eloszlás).

6.3. példa. A diffúzió Ehrenfest-féle modellje. Két, egymástól áteresztő fallal elválasztott tartályban van összesen N darab molekula. Minden időpillanatban egy véletlenszerűen választott molekula átkerül a másik tartályba. A rendszer állapotát az első tartálybeli molekulák számával írjuk le. Így az állapottér: $0, 1, 2, \dots, N-1, N$. Az átmeneti mátrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & & & \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ez is egy általánosított bolyongás. A stacionárius eloszlás:

$$\pi_j = \pi_0 \frac{N/N}{1/N} \frac{(N-1)/N}{2/N} \cdots \frac{(N-j-1)/N}{j/N} = \pi_0 \binom{N}{j}, \qquad j = 0, 1, \dots, N.$$

Az

$$1 = \sum\nolimits_{j=0}^{N} \pi_j$$

képletből

$$\pi_0 = 2^{-N}$$

adódik. Tehát a stacionárius eloszlás

$$\pi_j = \binom{N}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^N, \qquad j = 0, 1, \dots, N,$$

azaz $\frac{1}{2}$ paraméterű binomiális eloszlás.

7. A Metropolis-Hastings-algoritmus

Elő akarunk állítani egy olyan ξ_n Markov-láncot, melynek stacionárius eloszlása π. Viszont π nem ismeretes, csupán a $\frac{\pi_x}{\pi_y}$ hányadosokat tudjuk közvetlenül kiszámolni. Legyen q_{xy} egy tetszőleges átmenetvalószínűség, amely szerinti η_n Markov-láncot generálni tudnánk a számítógépen. Ennek segítségével állítjuk elő a kívánt láncot.

Ha $\xi_n = x$, akkor a q_{xy} valószínűség szerint generáljuk az y pontot. Ezt a pontot

$$\alpha(x, y) = \min\left\{1, \frac{\pi_y}{\pi_x} \frac{q_{yx}}{q_{xy}}\right\}$$

valószínűséggel fogadjuk el. (Az elfogadás technikai megvalósítása: generáljunk a $(0, 1)$-ben egyenletes véletlen számot, és ha ez a $(0, \alpha(x, y))$ intervallumba esik, akkor y mellett döntünk.) Ezen esetben $\xi_{n+1} = y$ lesz. Ellenkező esetben $\xi_{n+1} = x$, azaz a lánc marad a korábbi állapotában.

Az így előállított lánc átmenetvalószínűségei.

- Ha $x \neq y$, akkor

$$p_{xy} = \mathbb{P}(\xi_{n+1} = y \mid \xi_n = x) = q_{xy}\alpha(x, y).$$

- Ha $x = y$, akkor a teljes valószínűség tétele miatt

$$\begin{aligned} p_{xy} &= \mathbb{P}(\xi_{n+1} = y \mid \xi_n = x) = \\ &= \sum_z \mathbb{P}(\xi_{n+1} = x \mid \xi_n = x, \eta_{n+1} = z)\mathbb{P}(\eta_{n+1} = z \mid \xi_n = x) = \\ &= \mathbb{P}(\eta_{n+1} = x \mid \xi_n = x) + \sum_{z \neq x} [1 - \alpha(x,z)]\mathbb{P}(\eta_{n+1} = z \mid \xi_n = x) = \\ &= q_{xx} + \sum_{z \neq x} [1 - \alpha(x,z)] q_{xz}, \end{aligned}$$

hiszen $\xi_n = x$ és $\eta_{n+1} = x$ esetén a ξ lánc mindenképp az x állapotba kerül, de $\xi_n = x$, $\eta_{n+1} = z \neq x$ esetén csak $[1 - \alpha(x,z)]$ valószínűséggel marad az x-ben.

Összefoglaló jelöléssel:

$$\begin{aligned} p_{xy} &= 1_{\{x \neq y\}} q_{xy} \alpha(x,y) + 1_{\{x=y\}} \left\{ q_{xx} + \sum_{z \neq x} [1 - \alpha(x,z)] q_{xz} \right\} = \\ &= q_{xy}\alpha(x,y) + 1_{\{x=y\}} \sum_z [1 - \alpha(x,z)] q_{xz} = \\ &= q_{xy}\alpha(x,y) + 1_{\{x=y\}} \left[1 - \sum_z \alpha(x,z) q_{xz} \right], \end{aligned}$$

hiszen $1_{\{x=y\}} q_{xx} \alpha(x,x)$-et a két tag között „átcsoportosítjuk”.

7.1. állítás. *A fenti Markov-lánc stacionárius eloszlása π_x.*

Bizonyítás. Ellenőrizzük a részletes egyensúlyi egyenletet! Ez $x = y$ esetén mindig teljesül. $y \neq x$-re esetünkben:

$$\pi_x p_{xy} \stackrel{?}{=} \pi_y p_{yx}, \quad x \neq y.$$

$$\pi_x q_{xy} \min \left\{ 1, \frac{\pi_y}{\pi_x} \frac{q_{yx}}{q_{xy}} \right\} \stackrel{?}{=} \pi_y q_{yx} \min \left\{ 1, \frac{\pi_x}{\pi_y} \frac{q_{xy}}{q_{yx}} \right\}.$$

Ez x-ben és y-ban szimmetrikus. A két minimum egyike 1. Legyen ez most a bal oldali. Ekkor

$$\pi_x q_{xy} \stackrel{?}{=} \pi_y q_{yx} \frac{\pi_x}{\pi_y} \frac{q_{xy}}{q_{yx}}.$$

Ez pedig nyilván teljesül. $\square$

8. A nagy számok törvénye

Legyen

$$N_k(n) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{\{\xi_i = k\}}$$

a k állapotban eltöltött idő az n-edik lépésig.

8.1. állítás. *Ha k visszatérő és aperiodikus állapot, akkor tetszőleges j, $j \rightleftharpoons k$ állapotra*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left\{ \frac{N_k(n)}{n} \,\middle|\, \xi_0 = j \right\} = \frac{1}{\mu_k}.$$

Bizonyítás.

$$\mathbb{E}\left\{ N_k(n) \mid \xi_0 = j \right\} = \sum_{i=1}^{n} p_{jk}^{(i)}$$

és

$$p_{jk}^{(i)} \to \frac{1}{\mu_k}, \quad \text{ha } i \to \infty.$$

Így

$$\frac{\mathbb{E}\left\{ N_k(n) \mid \xi_0 = j \right\}}{n} \to \frac{1}{\mu_k}, \quad \text{ha } n \to \infty.$$

□

8.1. tétel. Nagy számok törvénye a k állapotban való tartózkodás idejére. *Egy irreducibilis, aperiodikus, pozitív visszatérő lánc esetén – tetszőleges kezdeti eloszlást vizsgálva –*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_k(n)}{n} = \frac{1}{\mu_k} \quad \text{1 valószínűséggel.}$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy tetszőleges j kiinduló állapot esetén $\frac{N_k(n)}{n} \to \mu_k$ 1 valószínűséggel. (Ebből, lévén a $\{\xi_0 = j\}$, $j \in I$, teljes eseményrendszer, aminek minden tagján 1 valószínűséggel érvényes a konvergencia, a teljes valószínűség tétele miatt következik az állítás.)

Legyen először k a kezdeti állapot. Legyen $U_1, U_2, \ldots$ a k állapot meglátogatásai között eltelt idő. Az erős Markov-tulajdonság miatt $U_1, U_2, \ldots$ függetlenek. A lánc homogenitása miatt azonos eloszlásúak. A közös várható érték μ_k. Tehát a nagy számok erős törvénye miatt

$$\lim_{r\to\infty} \frac{U_1 + \cdots + U_r}{r} = \frac{1}{\mu_k} \quad \text{1 valószínűséggel.}$$

Legyen $T(r) = U_1 + \cdots + U_r$ a k állapot r-edik meglátogatásának ideje.

$$T\left(N_k(n)\right) \le n \le T\left(N_k(n) + 1\right).$$

Innen

$$\frac{N_k(n)}{n} \le \frac{N_k(n)}{T\left(N_k(n)\right)} \to \frac{1}{\mu_k} \quad \text{1 valószínűséggel,}$$

és

$$\frac{N_k(n) + 1}{n} \ge \frac{N_k(n) + 1}{T\left(N_k(n) + 1\right)} \to \frac{1}{\mu_k} \quad \text{1 valószínűséggel.}$$

Ezekből

$$\frac{N_k(n)}{n} \to \frac{1}{\mu_k} \quad \text{1 valószínűséggel.}$$

(Felhasználtuk, hogy ha $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \to \mu$ 1 valószínűséggel, és $\alpha_n \to \infty$ 1 valószínűséggel, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{S_{\alpha_n}}{\alpha_n} \to \mu$ 1 valószínűséggel.)

Ha a lánc nem k-ból indul ki, akkor a fenti levezetés azzal a változással érvényes, hogy U_1 a j-ből k-ba jutás ideje. Ez 1 valószínűséggel véges, tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_1}{n} = 0 \qquad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

$\square$

II. fejezet
A Markov-láncok statisztikai vizsgálata

1. Maximum-likelihood becslés Markov-láncokra

Nem paraméteres megközelítést tárgyalunk: az átmenetvalószínűségek teljesen ismeretlenek, nem pedig ismert eloszlást alkotnak, amelynek csak a paramétereit nem ismerjük. A maximum-likelihood becslést alkalmazzuk.

Legyen $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ a lánc, ennek megfigyelései $x_0, x_1, \dots, x_n$. A (q_i) kezdeti eloszlás és a $(p_{ij}) = P$ átmeneti mátrix nem ismert. Mivel csak egyetlen megfigyelés-sorozatunk van, így (q_i)-re nem tudunk jó becslést adni.

A likelihood-függvény:

$$L = q_{x_0} \prod_{i=1}^{n} p_{x_{i-1}x_i} = q_{x_0} \prod_i \prod_j p_{ij}^{n_{ij}} = q_{x_0} \prod_i L_i,$$

ahol n_{ij} az i-ből j-be való átmenetek száma ($N_{ij}(n)$ jelöli ezt a valószínűségi változót, n_{ij} ennek a realizációja). $L_i = \prod_j p_{ij}^{n_{ij}}$ csak a P átmeneti mátrix i-edik sorától (P_i-től) függ.

A loglikelihood függvény:

$$l = \log L = \log q_{x_0} + \sum_i \underbrace{\log L_i}_{l_i} .$$

Ennek maximalizálása minden l_i-re külön történhet. Mivel $\sum_j p_{ij} = 1$, ezért Lagrange-féle multiplikátort alkalmazunk.

$$l_i - \lambda \left(\sum\nolimits_j p_{ij} - 1 \right) = \sum\nolimits_j n_{ij} \log p_{ij} - \lambda \left(\sum\nolimits_j p_{ij} - 1 \right).$$

Deriválva p_{ij} és λ szerint:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{n_{ij}}{p_{ij}} - \lambda, & \forall j, \\ 0 = \displaystyle\sum_j p_{ij} - 1. \end{cases}$$

Innen

$$\lambda = \sum_j n_{ij} \quad \text{és} \quad p_{ij} = \frac{n_{ij}}{\lambda}$$

adódik. Tehát n_i-vel jelölve a $\sum_j n_{ij}$ mennyiséget:

$$\widehat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}$$

a maximum-likelihood becslés. Ennek szemléletes tartalma: az i állapotból induló átmenetek között a j-be való lépések relatív gyakorisága. (Feltesszük, hogy $n_i > 0$.)

Hasonlóan, a kezdeti eloszlás becslése:

$$\widehat{q}_i = 1_{\{i = x_0\}}.$$

Ez azonban az egyetlen megfigyeléshez tartozó triviális becslés.

A kezdeti állapotra ($\xi_0 = x_0$-ra) vett feltételes maximum-likelihood becslés megegyezik az előző $\widehat{p}_{ij}$-vel. ($\widehat{q}_i$ nem adódik ekkor.)

Véges sok megfigyelésből csak véges sok állapotra tudunk becslést adni. Ha feltesszük, hogy az n-edik lépésben olyan állapotot látogattunk meg, amelyben már korábban is voltunk, akkor minden meglátogatott i állapot esetén meg tudjuk adni a $\widehat{p}_{ij}$ becslést. A meglátogatott állapotot $\widehat{S}$ osztálya a $\widehat{p}_{ij}$ átmenetvalószínűségekkel zárt osztályt alkot.

1.1. definíció. A ξ_i Markov-lánchoz tartozó *„kétlépéses" lánc*: $\eta_n = (\xi_n, \xi_{n+1})$ kétdimenziós lánc. η_n is megszámlálható állapotterű, állapotai az (i,j) párok.

1.1. állítás. *A „kétlépéses" lánc állapottere:*

$$\{(i,j) \,:\, p_{ij} > 0\}\,.$$

A „kétlépéses" lánc is Markov. Átmenetvalószínűségei:

$$\widetilde{p}_{kl,ij} = 1_{\{i=l\}} p_{ij}.$$

Ha a ξ_n lánc esetén $p_{ij}^{(n)} \to \pi_j$ $(n \to \infty)$, akkor az η_n lánc esetén $\widetilde{p}_{kl,ij}^{(n)} \to \pi_i p_{ij}$ $(n \to \infty)$.

Ha a ξ_n lánc ergodikus, akkor az η_n lánc is az.

Bizonyítás. η-ra a Markov-tulajdonság:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}((\eta_n = (i,j) \mid \eta_{n-1} = (k,l), \dots, \eta_0 = (k_0, l_0)) = \\ &\quad = \mathbb{P}(\xi_{n+1} = j, \xi_n = i \mid \xi_n = l, \xi_{n-1} = k, \dots) = 0, \qquad \text{ha } \ l \neq i;\end{aligned}$$

de $l = i$ esetén:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((\eta_n = (i,j) \mid \eta_{n-1} = (k,l), \dots, \eta_0 = (k_0, l_0)) &= \\ = \mathbb{P}(\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i, \xi_{n-1} = k, \dots) &= \\ = \mathbb{P}(\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i) &= \\ = p_{ij},&\end{aligned}$$

hiszen az eredeti lánc Markov. Tehát az η_n lánc is Markov; átmenetvalószínűségei:

$$\widetilde{p}_{kl,ij} = 1_{\{i=l\}} p_{ij}.$$

$$\begin{aligned}\widetilde{p}_{kl,ij}^{(2)} &= \text{a kétlépéses átmenetvalószínűség} = \\ &= \mathbb{P}(\xi_3 = j, \xi_2 = i \mid \xi_0 = k, \xi_1 = l) = \\ &= \mathbb{P}(\xi_3 = j \mid \xi_2 = i)\mathbb{P}(\xi_2 = i \mid \xi_1 = l) = \\ &= p_{li} p_{ij}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{p}_{kl,ij}^{(n)} &= \text{az } n\text{-lépéses átmenetvalószínűség} = \\ &= \mathbb{P}(\xi_{n+1} = j, \xi_n = i \mid \xi_0 = k, \xi_1 = l) = \\ &= p_{li}^{(n-1)} p_{ij}.\end{aligned}$$

Ha $p_{ij}^{(n)} \to \pi_j$ $(n \to \infty)$, akkor

$$\widetilde{\pi}_{ij} = \lim_{n\to\infty} \widetilde{p}_{kl,ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{li}^{(n-1)} p_{ij} = \pi_i p_{ij}.$$

Tehát ha a ξ_n lánc ergodikus, akkor az η_n lánc is az. □

1.1. tétel. A maximum-likelihood becslés konzisztenciája. *Ha ξ_n ergodikus lánc, akkor a maximum-likelihood becslésre:*

$$\widehat{p}_{ij} \to p_{ij}$$

minden i, j állapotra, bármely kezdeti eloszlásra, amennyiben a megfigyelésszám tart végtelenhez.

Bizonyítás. $p_{ij} = 0$ esetén nyilván $\widehat{p}_{ij} = 0$ teljesül 1 valószínűséggel. Tehát a $p_{ij} > 0$ esetre kell csak koncentrálnunk. Így alkalmazhatjuk a „kétlépéses" láncot. Az i-ből j-be való átmenetek száma:

$$N_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{n} 1_{\{\eta_k=(i,j)\}},$$

azaz az η_n lánc esetén ez éppen az (i, j) állapotbeli tartózkodások száma. Mivel a ξ_n lánc ergodicitása miatt az η_n lánc ergodikus, így a nagy számok törvénye alapján

$$\frac{N_{ij}(n)}{n} \to \pi_i p_{ij} \quad \text{1 valószínűséggel,}$$

ha $n \to \infty$, hiszen az ergodikus eloszláshoz konvergál. Hasonlóan

$$\frac{N_i(n)}{n} \to \pi_i \quad \text{1 valószínűséggel}$$

a ξ_n láncban.

p_{ij} becslése n megfigyelésből:

$$\widehat{p}_{ij}(n) = \frac{N_{ij}(n)}{N_i(n)} \to \frac{\pi_i p_{ij}}{\pi_i} = p_{ij}$$

1 valószínűséggel. □

1.2. definíció. Legyen

$$W_i^{(m)} = \xi_{T_i(m)+1}$$

azon az i állapotba való m-edik visszatérés utáni állapot. Legyen

$$Q_{ij}(n) = \sum_{m=1}^{[n\pi_i]} 1_{\left\{W_i^{(m)}=j\right\}}$$

annak gyakorisága, hogy az i-edik állapotba történt $[n\pi_i]$-edik visszatérés $+1$ lépésig megfigyelve a láncot, i után hányszor következett j állapot.

1.2. állítás. *Tetszőleges i-re a $(Q_{ij}(n))_j$ vektor (azaz $(Q_{ij}(n))$ i-edik sora), multinomiális eloszlású, $[n\pi_i]$ és $(p_{ij})_j$ paraméterekkel. (Itt $(p_{ij})_j$ a (p_{ij}) átmeneti mátrix i-edik sorát jelöli.)*

Bizonyítás. Az erős Markov-tulajdonság alapján: minden i-be való visszatérés után a lánc úgy működik, mintha éppen i-ből indult volna ki. Így $[n\pi_i]$-szer ismételünk egy kísérletet, melynek a lehetséges kimeneteleinek a valószínűségei: $(p_{ij})_j$, azaz az átmeneti mátrix i-edik sora. (Itt valójában $[n\pi_i]$ konkrét alakja még nem játszik szerepet.) □

1.2. tétel. A maximum-likelihood becslés aszimptotikus normalitása. *Legyen a lánc ergodikus. Ekkor a kezdeti eloszlástól függetlenül:*

$$\left(\sqrt{N_i(n)}\,(\widehat{p}_{ij}(n) - p_{ij})\right)_{(i,j)\in I\times I} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,\Sigma)$$

eloszlásban, (ha $n \to \infty$), ahol a Σ szórásmátrix:

$$\Sigma_{(i,j),(k,l)} = \begin{cases} p_{ij}(1-p_{ij}), & \text{ha } (i,j) = (k,l), \\ -p_{ij}p_{il}, & \text{ha } i = k, j \neq l, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen (π_i) a stacionárius eloszlás.

$$\sqrt{N_i(n)}\,(\widehat{p}_{ij}(n) - p_{ij}) = \sqrt{N_i(n)}\left(\frac{N_{ij}(n)}{N_i(n)} - p_{ij}\right) = \sqrt{\frac{n\pi_i}{N_i(n)}}\frac{N_{ij}(n) - N_i(n)p_{ij}}{\sqrt{n\pi_i}}.$$

Tudjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{n\pi_i}{N_i(n)}} \to 1 \qquad \text{majdnem biztosan.}$$

Be kell látni, hogy a második tényező konvergál. A lánc ergodikus, így a stacionárius eloszláshoz konvergál. Tehát n lépés alatt körülbelül $n\pi_i$-szer van az i állapotban. Tehát

$$N_i(n) \cong [n\pi_i].$$

Továbbá

$$N_{ij}(n) \cong Q_{ij}(n).$$

Így be kell látni, hogy az alábbi konvergencia érvényes

$$\frac{N_{ij}(n) - N_i(n)p_{ij}}{\sqrt{n\pi_i}} \cong \frac{Q_{ij}(n) - [n\pi_i]p_{ij}}{\sqrt{n\pi_i}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,\Sigma).$$

Csak rögzített i esetére bizonyítunk. Feltehetjük, hogy az állapottér véges (a nem véges eset erre visszavezethető). Felhasználjuk, hogy ha az X valószínűségi változó n és $p = (p_1, \ldots, p_l)^\top$ paraméterű polinomiális eloszlású, akkor

$$\mathbb{E}X = np \quad \text{és} \quad \operatorname{cov}(X) = S,$$

és

$$\frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,S),$$

ahol

$$S = \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p_2 & \cdots \\ -p_2p_1 & p_2(1-p_2) & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Mivel $(Q_{ij}(n))_j$ $[n\pi_i]$ és $(p_{ij})_j$ paraméterű polinomiális (itt i rögzített), az eredmény adódik. $\square$

2. A likelihood-hányados próba Markov-láncokra

2.1. A likelihood-hányados statisztika aszimptotikus viselkedése

Ezen alfejezetben véges állapotteret tételezünk fel.

Tegyük fel, hogy a p_{ij} paraméterek vagy teljesen ismeretlenek, vagy függnek az ismeretlen ϑ paramétertől, ahol $\vartheta \subseteq \Theta \subseteq \mathbb{R}^r$, Θ nyílt halmaz.

Feltételek:

(1) $D = \{(i,j) : p_{ij}(\vartheta) > 0\}$ ϑ-tól független. d legyen D számossága.
(2) $p_{ij}(\vartheta)$ háromszor folytonosan differenciálható minden i, j-re.
(3) A $\left(\frac{\partial p_{ij}(\vartheta)}{\partial \vartheta_k}\right)$ mátrix (mely $r \times d$ méretű) rangja r.
(4) A lánc irreducibilis, aperiodikus.

Jelölje $l(\cdot)$ a loglikelihood-függvényt, $\widehat{P}$ az átmenetvalószínűségek nem-paraméteres maximum-likelihood becslését. Legyen (a paraméteres modellben)

$$H_0 : \vartheta = \vartheta_0.$$

Jelölje $\widetilde{H}_0$ azt, hogy a $p_{ij}(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, paraméteres modell érvényes, $\widehat{\vartheta}$ pedig a ϑ maximum-likelihood becslését ezen paraméteres modellben.

2.1. tétel. *Az (1)–(4) feltételek teljesülése esetén (és feltéve, hogy $\vartheta_0 \in \Theta$)*

$$2\left(l(\widehat{\vartheta}) - l(\vartheta_0)\right) \Longrightarrow \chi^2_r, \qquad \textit{ha } H_0 \textit{ igaz;}$$

$$2(l(\widehat{P}) - l(\widehat{\vartheta})) \Longrightarrow \chi^2_{d(d-1)-r}, \qquad \textit{ha } \widetilde{H}_0 \textit{ igaz.}$$

A fenti két statisztika aszimptotikusan független, ha H_0 igaz.

2.2. Függetlenségvizsgálat likelihood-hányados próbával

Tegyük fel, hogy az állapottér $K+1$ elemű: $\{0, 1, \ldots, K\}$. Tegyük fel továbbá, hogy $\xi_0, \ldots, \xi_n$ Markov-lánc (ismeretlen) p_{ij} átmenetvalószínűségekkel. Ekkor az ismeretlen paraméterek száma: $K(K+1)$, hiszen $\sum_j p_{ij} = 1$ miatt a P átmeneti mátrix minden sorából K paramétert kell megbecsülni. Vizsgáljuk a

$$H_0 : \xi_0, \ldots, \xi_n \quad \text{független, azonos eloszlású valószínűségi változók}$$

nullhipotézist.

Mivel a feltételes eloszlás (likelihood függvény)

$$L = \mathbb{P}(\xi_n = i_n, \ldots, \xi_1 = i_1 \mid \xi_0 = i_0) = p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n+1} i_n},$$

így ennek speciális esete H_0:

$$L = \mathbb{P}(\xi_n = i_n, \ldots, \xi_1 = i_1 \mid \xi_0 = i_0) = \vartheta_{i_1} \cdots \vartheta_{i_n}.$$

Itt

$$\mathbb{P}(\xi_k = i) = \vartheta_i, \quad i = 0, 1, \ldots, K, \quad \forall k.$$

Azaz K ismeretlen paramétert kell megbecsülni (hiszen $\sum_{i=0}^{K} \vartheta_i = 1$).

A Markov-esetben a loglikelihood függvény:

$$l(P) = \sum_{i,j} n_{ij} \log p_{ij},$$

ahol n_{ij} az $i \to j$ átmenetek száma. A maximum-likelihood becslés:

$$\widehat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i},$$

(ahol $n_i = \sum_j n_{ij}$). A loglikelihood függvény a becsült helyen:

$$l(\widehat{P}) = \sum_{i,j} n_{ij} \log \frac{n_{ij}}{n_i}.$$

Az állapottér $(K+1)$ elemű, a paraméterek száma: $K(K+1)$.

A független modell paraméterei:

$$p_{ij}(\vartheta) = \vartheta_j \quad \forall i,j \text{ esetén.}$$

Itt

$$\vartheta = (\vartheta_0, \dots, \vartheta_k) \in \mathbb{R}^{K+1}.$$

Ebből

$$\frac{\partial p_{ij}(\vartheta)}{\partial \vartheta_k} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = k, \\ 0, & \text{ha } j \neq k. \end{cases}$$

A független esetben (azaz H_0 esetén) a loglikelihood függvény:

$$l(\vartheta) = \sum_j \log \vartheta_j^{n_{\cdot j}},$$

ahol

$$n_{\cdot j} = \sum_i n_{ij},$$

a j állapot gyakorisága. A maximum-likelihood becslés a független esetben a relatív gyakoriság:

$$\widehat{\vartheta}_j = \frac{n_{\cdot j}}{n}.$$

A likelihood-hányados statisztika:

$$2\left(l(\widehat{P}) - l(\widehat{\vartheta})\right) = 2\sum_{i,j} n_{ij} \log\left(\frac{n_{ij}/n_i}{n_{\cdot j}/n}\right).$$

Ez H_0 esetén aszimptotikusan χ^2-eloszlású $K(K+1) - K = K^2$ szabadsági fokkal. Tehát ezzel a statisztikával lehet H_0-at tesztelni. Ha

$$2\left(l(\widehat{P}) - l(\widehat{\vartheta})\right) > \chi^2_\alpha,$$

akkor H_0-at α szinten elvetjük. Itt χ^2_α a K^2 szabadsági fokú χ^2-eloszlás α szinthez tartozó kritikus értéke.

2.3. Függetlenségvizsgálat χ^2-próbával

A likelihood-hányados statisztika alakja:

$$A = 2\sum_{i,j} n_{ij} \log\left(\frac{n_{ij}/n_i}{n_{.j}/n}\right) = 2\sum_t n_t \log\left(\frac{n_t}{np_t}\right),$$

ahol

$$n_t = n_{ij}, \quad p_t = \frac{n_{.j} n_i}{n^2},$$

itt pedig

$$\sum_t n_t = n \quad \text{és} \quad \sum_t p_t = 1.$$

Fejtsük a logaritmus függvényt Taylor-sorba:

$$\log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2},$$

a maradék tagot elhanyagoljuk. (Ez reális, hiszen $1 + x = \frac{n_t}{np_t}$ jelöléssel $x \to 0$, ha $n \to \infty$.) Így

$$A \approx 2\sum_t \left\{ n_t\left(\frac{n_t}{np_t} - 1\right) - \frac{n_t}{2}\left(\frac{n_t}{np_t} - 1\right)^2 \right\}.$$

Belátjuk, hogy

$$A \approx B = \sum_t \frac{(n_t - np_t)^2}{np_t}.$$

$$A - B \approx \sum_t \left\{ \left(2\frac{n_t^2}{np_t} - 2n_t - \frac{n_t^3}{n^2p_t^2} + 2\frac{n_t^2}{np_t} - n_t\right) - \left(\frac{n_t^2}{np_t} - 2n_t + np_t\right) \right\} =$$

$$= \sum_t \left(\frac{3n_t^2}{np_t} - n_t - \frac{n_t^3}{n^2p_t^2} - np_t\right).$$

Mivel $\sum n_t = n$ és $\sum np_t = n$, így $\sum 2n_t$ levonása és egyben $\sum 2np_t$ hozzáadása nem változtat. Tehát

$$A - B \approx \sum_t \frac{[-(n_t - np_t)^3]}{(np_t)^2}.$$

Így

$$|A - B| \leq \sum_t \frac{(n_t - np_t)^2}{np_t} \underbrace{\frac{|n_t - np_t|}{np_t}}_{\left|1 - \frac{n_t}{np_t}\right|},$$

de $\frac{n_t}{np_t} \to 1$, ha $n \to \infty$, így $|A - B| << B$, azaz $A \approx B$.

Tehát a függvényvizsgálat megvalósítható χ^2 próbával:

$$\sum_{i,j} \frac{\left(n_{ij} - n_i \frac{n_{.j}}{n}\right)^2}{n_i \frac{n_{.j}}{n}}$$

a próbastatisztika. Ennek H_0 esetén $\chi^2_{K^2}$ az aszimptotikus eloszlása.

2.1. megjegyzés. A fenti levezetés minden olyan $\widetilde{H}_0$ esetén érvényes, amikor $p_{ij}(\widehat{\vartheta}) \to p_{ij}(\vartheta)$, ahol $\vartheta \in \Theta$ az igazi paraméter (midőn a megfigyelésszám tart a végtelenhez) hiszen ekkor $\frac{np_t}{n_i} = p_{ij}(\widehat{\vartheta}) \to p_{ij}$. Tehát

$$\sum_{i,j} \frac{\left(n_{ij} - n_i p_{ij}(\widehat{\vartheta})\right)^2}{n_i p_{ij}(\widehat{\vartheta})} \Longrightarrow \chi^2_{d(d-1)-r},$$

ha $\widetilde{H}_0$ teljesül.

2.1. példa. Markov(1924)

Markov megvizsgálta Puskin Jevgenyij Anyegin című művének 20.000 egymás utáni betűjét.

	Magánhangzó (követő)	Mássalhangzó (követő)	Σ
Magánhangzó (megelőző)	1106	7532	8638
Mássalhangzó (megelőző)	7533	3829	11362
Σ	8639	11361	20000

Az átmeneti mátrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 - p_{01} & p_{01} \\ p_{10} & 1 - p_{10} \end{pmatrix}.$$

A (magánhangzó $\to$ mássalhangzó) váltás relatív gyakorisága:

$$\widehat{p}_{01} = \frac{7532}{8638},$$

a (mássalhangzó $\to$ magánhangzó) váltás relatív gyakorisága pedig:

$$\widehat{p}_{10} = \frac{7533}{11362}.$$

Egy egyszerű egyparaméteres modell:

$$H_0 : p_{01} = p_{10},$$

azaz a váltás azonos valószínűségű mind (magánhangzó $\to$ mássalhangzó), mind (mássalhangzó $\to$ magánhangzó) váltás esetén.

A váltás feltételes maximum-likelihood becslése a relatív gyakoriság:

$$\widehat{p} = \frac{7532 + 7533}{20000} = \frac{15065}{20000} = 0.7532.$$

A fenti modell tehát nem tűnik realisztikusnak.

Most megvizsgáljuk a magán- és mássalhangzók váltakozásának függetlenségét χ^2-próbával.

$$\frac{(1106 - \frac{8638 \times 8639}{20000})^2}{\frac{8638 \times 8639}{20000}} + \cdots = 1217.1.$$

A független esetben ez χ_1^2-eloszlású lenne. Minden használatos szinten elvetjük a függetlenség hipotézisét.

Tárgymutató