Dr. Tomkó József

Sztochasztikus folyamatok

mobiDIÁK könyvtár

Dr. Tomkó József

Sztochasztikus folyamatok

mobiDIÁK könyvtár

SOROZATSZERKESZTŐ

Fazekas István

Dr. Tomkó József

Sztochasztikus folyamatok

mobiDIÁK könyvtár

Debreceni Egyetem
Informatikai Intézet
4010 Debrecen, Pf. 12
http://mobidiak.unideb.hu

Tartalomjegyzék

A kontrollszerkesztő előszava

Dr. Tomkó József 1974 és 1984 között volt a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Természettudományi Karának Matematikai Intézetében működő Valószínűségszámítás és Alkalmazott Matematikai Tanszék tanszékvezető egyetemi docense. Ezen művének elektronikus formában történő előállításával emléke előtt is tisztelegni kívánunk. A jegyzet enyészettől való megőrzésén kívül az is motiválta munkánkat, hogy a benne tárgyalt anyag az évek során nem vesztett aktualitásából, sőt az ún. Markov Chain Monte Carlo módszerek tömeges (számítógépes) alkalmazásai miatt napjainkra még fontosabbá vált a Markov láncok elméletének ismerete.

Az eredeti, ún. házi jegyzet 1977-ben készült el az akkori matematikus hallgatók számára, a Sztochasztikus folyamatok 1 tantárgyhoz. (Az ebben a jegyzetben is említett folytatás – a Sztochasztikus folyamatok 2 tantárgyhoz – nem készült el.) A jegyzetet írógéppel rögzítették, a képleteket kézzel írták be. A szöveg bizonyos részei már az eredeti állapotban is nehezen voltak olvashatók.

Az eredeti jegyzetből megmaradt néhány, erősen használt példány alapján rekonstruáltuk a művet. Elektronikus formában rögzítettük, valamint a korszerű szövegszerkesztés eszközeit felhasználva áttekinthetővé tettük azt. A fontos fogalmakat kiemeltük, tagoltuk a szöveget, tartalomjegyzékkel, tárgymutatóval láttuk el, kiegészítettük az irodalomjegyzéket.

Bár a formai elemeken sokat változtattunk (egy „hasonmás kiadásnak" esetünkben nem is lett volna értelme), a tartalmi elemekhez megpróbáltunk ragaszkodni. Csak a nyilvánvaló elírásokat kívántuk javítani. Viszont kiderült, hogy néhány esetben (a pontosság, ill. az érthetőség kedvéért) szükség van apró korrekciókra. A kontrollszerkesztő „javításait" groteszk (sans serif) szedéssel különítettük el az eredetitől, akár lábjegyzetként, akár a szövegben szerepel is.

Debrecen, 2003. június 26.

Fazekas István
kontrollszerkesztő

1. fejezet
Valószínűségelméleti alapfogalmak

A valószínűségelmélet legalapvetőbb fogalmai a kísérlet, az esemény és az esemény valószínűsége. A kísérletet kiindulási fogalomnak tekintjük, nem törekszünk más fogalmakkal való körülírására. Kísérleteinket mindig bizonyos meghatározott feltételek teljesülése mellett hajtjuk végre. Ezek a feltételek általában nem határozzák meg egyértelműen a kísérletek kimenetelét, hiszen ezt legtöbbször általunk nem ismert vagy figyelmen kívül hagyott tényezők is befolyásolják. Így adott feltételek teljesülése esetén a kísérletet többször egymás után végrehajtva, annak eredménye (kimenetele) esetről esetre más lehet.

A valószínűségelméleti fogalmak megalkotásakor az egyik legalapvetőbb észrevétel az, hogy a tekintendő kísérlettel mindig kapcsolatba hozható bizonyos ω elemek Ω halmaza úgy, hogy minden, a kísérlettel összefüggésbe hozható eseményhez hozzárendelhető az Ω halmaznak egy részhalmaza. Eközben a megfeleltetés olyan, hogy az események közötti műveleteknek a hozzájuk rendelt halmazokra a halmazelméleti műveletek felelnek meg. Ω-t a kísérlet összes lehetséges kimeneteleinek halmazaként interpretáljuk, elemeit, ω-kat a kísérlet elemi eseményeinek szokás nevezni. Az esetek túlnyomó többségében érdeklődésünk nem arra irányul, hogy megállapítsuk a kísérlet végrehajtásakor bekövetkező elemi eseményt (kimenetelt), hanem csak arra, hogy eldöntsük eleme-e a bekövetkezett elemi esemény Ω ilyen vagy olyan részhalmazának. Az érdeklődés ilyen irányának indoklására megemlítjük, hogy egyrészt ez az általánosabb, másrészt az egyedi kimenetelek mérési és más hibaforrások miatt viszonylag csak ritkán figyelhetők meg.

Az elmondottak szerint Ω tetszőleges részhalmaza eseményként tekinthető. Azonban mind a gyakorlat, mind a matematikai elmélet szempontjából jelentősen szűkíthető az események (Ω részhalmazainak) osztálya. Mindenesetre olyannak kell lennie ennek az osztálynak, hogy tartalmazza a különféle gyakorlati kérdések analizálásakor felmerülő eseményeket, másrészt ne akadályozza a matematikai apparátus effektív használatát. Magától értetődik, hogy az események (részhalmazok) osztályának kiválasztása minden konkrét esetben az adott helyzetnek megfelelően történik, azonban van a kiválasztásnak egy általános követelménye; az események (részhalmazok) osztályának σ-algebrát kell alkotnia.

A továbbiakban ismertnek tételezzük fel a mértékelmélet tudományegyetemi anyagát. Néhány fogalmat, eredményt azonban menetközben ismertetünk. Ezt főként azért tesszük, hogy azok alkalmazásuk formájában elevenedjenek fel az olvasóban.

Halmazalgebra (eseményalgebra). Az Ω halmaz részhalmazainak $\mathcal{F}$ rendszerét *halmazalgebrának* (algebrának) nevezzük, ha $\mathcal{F}$ tartalmazza Ω-t, bármely elemével együtt annak Ω-ra vonatkozó komplementerét, továbbá bármely két elemével együtt azok egyesítését is.

Ha $\mathcal{F}$ csak Ω-t és az üres halmazt, $\emptyset$-t tartalmazza, akkor Ω-t triviális algebrának nevezzük. Valamely $A \subseteq \Omega$ halmazt tartalmazó legszűkebb algebra: $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, A, \bar{A}\}$.

σ-algebra. Az Ω halmaz részhalmazainak $\mathcal{F}$ algebráját *σ-algebrának* nevezzük, ha megszámlálhatóan végtelen sok elemével együtt azok egyesítését is tartalmazza.

Mérhető tér. Az $(\Omega, \mathcal{F})$ *mérhető tér*, ha $\Omega \neq \emptyset$ halmaz és $\mathcal{F}$ az Ω részhalmazainak valamely σ-algebrája.

Valószínűség. A valószínűségelmélet másik alapvető feltételezése, hogy az adott kísérlettel összefüggésbe hozható minden eseményhez, azaz a kísérlettel kapcsolatba hozott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér esetén minden $A \in \mathcal{F}$ halmazhoz hozzá van rendelve egy 0 és 1 közé eső $\mathbb{P}(A)$ valós szám. Ez a valós szám jellemzi az A eseményt a kísérlet azonos feltételek melletti végrehajtásainak sorozatában. Mint az a valószínűségszámításból ismeretes, $\mathbb{P}(A)$ az a szám, amely körül az A esemény relatív gyakorisága ingadozik a kísérlet független megismétléseinek sorozatában. A $\mathbb{P}(A)$ valós számot az A esemény *valószínűségének* nevezik.

A mértékelmélet nyelvén $\mathbb{P}$ az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető téren normált mérték. Felsoroljuk most az ilyen mérték alapvető tulajdonságait.

I. Tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén
$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1,$$
és
$$\mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

II. $\mathbb{P}$ teljesen additív, azaz megszámlálhatóan végtelen sok, páronként közös pont nélküli $A_i \in \mathcal{F}$ esetén
$$\mathbb{P}\big(\cup_i A_i\big) = \sum_i \mathbb{P}(A_i).$$

A II. tulajdonság ekvivalens az ún. folytonossági tulajdonság és az additivitás együttes teljesülésével. A *valószínűség folytonossági tulajdonsága*:

III. Ha az $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \dots)$ halmazok növekvő (csökkenő) sorozatot alkotnak, azaz, ha
$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_i \subseteq \dots \qquad (A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_i \supseteq \dots),$$
akkor
$$\lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\cup_i A_i) \qquad \big(\lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\cap_i A_i)\big).$$

Valószínűségi mező. Az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *valószínűségi mező*, ha $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és $\mathbb{P}$ az $(\Omega,\, \mathcal{F})$ mérhető téren normált mérték.

Valószínűségi változók. Gyakran egy adott kísérlet lehetséges kimeneteleit bizonyos fizikai mennyiség, ill. mennyiségek ilyen vagy olyan határok közé való esésével írjuk le. Ezek a fizikai mennyiségek általában a kísérlet kimeneteleitől függnek, más szóval az ω elemi eseményeknek bizonyos meghatározott, a gyakorlati esetek többségében valós értékű $f_1, f_2, \dots, f_n$ függvényei.

Az eseményeket, melyek bekövetkezése felől érdeklődünk az adott kísérletben, általában az
$$\{\omega : a \leq f_1(\omega) \leq b\},$$
ill. az
$$\{\omega : a_1 \leq f_1(\omega) \leq b_1,\ a_2 \leq f_2(\omega) \leq b_2, \dots, a_n \leq f_n(\omega) \leq b_n\}$$
feltételekkel írjuk le. Ahhoz, hogy Ω-nak az ilyen feltételekkel körülírt részhalmazai eseményeket szolgáltassanak, a szóbanforgó f_i függvényeknek egyetlen követelménynek, a mérhetőségének kell eleget tenniük.

Az Ω-n értelmezett ξ valós értékű függvényt *valószínűségi változónak* nevezzük az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn, ha ξ mérhető az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető téren.

Emlékeztetőül idézzük, hogy egy valós értékű f függvényt az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető téren *mérhetőnek* nevezünk, ha minden valós x-re

$$\{\omega : f(\omega) < x\} \in \mathcal{F}.$$

Legyen $\mathcal{B}$ a valós számok Borel-halmazainak (a félig nyílt, ill. zárt intervallumok által kifeszített) σ-algebrája. Az Ω halmazon értelmezett f valós értékű függvény pontosan akkor mérhető az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető téren, ha tetszőleges $B \in \mathcal{B}$ esetén

$$\{\omega : f(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

A fentiek alapján egy kísérletben megfigyelendő fizikai mennyiségeket a kísérlettel kapcsolatba hozott valószínűségi változóknak kell tekintenünk. Az alkalmazásokban a valós számok Borel-halmazainak ezen valószínűségi változók általi inverz képhalmazai (a fizikai mennyiségekre vonatkozó hipotézisek által indukált $\mathcal{F}$-beli halmazok) a kísérletben megfigyelendő véletlen események.

Gyakorlatilag két esemény, A és B, megkülönböztethetetlen, ha csak 0 valószínűségű halmazban különböznek egymástól, azaz, ha az

$$A \circ B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

szimmetrikus differenciára

$$\mathbb{P}(A \circ B) = 0.$$

Ilyenkor A-t és B-t egymással *ekvivalenseknek* mondjuk.

Hasonlóan, ha két valószínűségi változó csak 0 valószínűségű halmazon különbözik egymástól, akkor azok gyakorlatilag megkülönböztethetetlenek, s ilyen esetben ekvivalenseknek mondjuk őket. Tehát a ξ és η *valószínűségi változókat ekvivalenseknek* nevezzük, ha

$$\mathbb{P}\left(\{\omega : \eta(\omega) = \xi(\omega)\}\right) = 1 \quad [\text{avagy } \mathbb{P}(\{\omega : \eta(\omega) \neq \xi(\omega)\}) = 0].$$

Itt ξ és η ugyanazon valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók. A jövőben, amikor valószínűségi változókról lesz szó, mindig úgy kell érteni, hogy azok ugyanazon a valószínűségi mezőn vannak értelmezve.

Valószínűségi változóra fontos példa egy esemény indikátora. Valamely A *halmaz indikátorának* nevezzük a

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \omega \in A, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

módon értelmezett függvényt. Ha $A \in \mathcal{F}$, azaz A esemény, akkor χ_A nyilván valószínűségi változó.

Ha egy valószínűségi változó értékkészlete véges vagy megszámlálhatóan végtelen, akkor a *valószínűségi változót diszkrétnek* nevezzük. Ilyen valószínűségi változó mindig felírható

$$\sum_k c_k \chi_{A_k}$$

alakban, ahol $A_k \in \mathcal{F}$ $(k = 1, 2, \dots)$ közös pont nélküli halmazok, továbbá $\cup_k A_k = \Omega$, c_k valós. Tetszőleges ξ valószínűségi változóhoz mindig megadható diszkrét valószínűségi változókból álló olyan $\{\xi_n,\ n = 1, 2, \dots\}$ sorozat, amely minden egyes tagja csak véges sok értéket vesz fel, továbbá, hogy minden egyes $\omega \in \Omega$-ra $\xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$. Ennek belátásához tekintsük a

$$\xi_n = \sum_{j=-n}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(j + \frac{k-1}{n} \right) \chi_{A_{jk}}, \quad \text{ha} \ -n \le \xi < n, \qquad \text{és}$$

$$\xi_n = \begin{cases} +n, & \text{ha } \xi \ge n, \\ -n, & \text{ha } \xi < -n, \end{cases}$$

sorozatot, ahol

$$A_{jk} = \left\{ \omega : j + \frac{k-1}{n} \le \xi(\omega) < j + \frac{k}{n} \right\}.$$

Ekkor $|\xi(\omega) - \xi_n(\omega)| < \frac{1}{n}$, hacsak $|\xi(\omega)| < n$.

Könnyű észrevenni, ha ξ nemnegatív valószínűségi változó, akkor lehet konstruálni olyan $\{\xi_n,\ n = 1, 2, \dots, \dots\}$ diszkrét valószínűségi változókból álló sorozatot, mely monoton növekvőleg egyenletesen konvergál ξ-hez. Valóban, legyen

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} \chi_{A_{kn}},$$

ahol

$$A_{kn} = \left\{ \omega : \frac{k}{2^n} \le \xi(\omega) < \frac{k+1}{2^n} \right\}.$$

Ekkor $|\xi(\omega) - \xi_n(\omega)| < \frac{1}{2^n}$ minden ω-ra.

Sztochasztikus elem. A valószínűségi változókat valamely $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn valós értékű mérhető függvényként értelmeztük. Kézenfekvő kiterjeszteni e fogalmat tetszőleges $(X, \mathcal{X})$ mérhető térbeli értékeket felvevő függvényekre. Ilyenkor szokás X-térbeli értékeket felvevő valószínűségi változóról beszélni. A rövidebb, egyszerűbb kifejezésmód, valamint az absztrakció magasabb fokának hangsúlyozása érdekében azonban előnyös külön fogalom bevezetése.

A ξ *sztochasztikus elem* az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn $(X, \mathcal{X})$ *fázistérrel*, ha $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér és ξ mérhető leképezése Ω-nak X-be, azaz minden $B \in \mathcal{X}$ esetén

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Ha X metrikus tér, akkor rendszerint $\mathcal{X}$ alatt az X metrikus tér Borel- halmazainak σ-algebráját értjük. Ha X vektortér, akkor ξ-t *véletlen vektornak* nevezzük.

Legyen $\{\xi_k,\ k = 1, 2, \dots, n\}$ sztochasztikus elemek véges sorozata valamely rögzített $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn rendre az $(X_k, \mathcal{X}_k)$ fázisterekkel. Sztochasztikus elemek ilyen sorozatát tekinthetjük egyetlen ζ sztochasztikus elemként az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn az $(Y, \mathcal{Y})$ fázistérrel, ahol $Y = \prod_{k=1}^{n} X_k$, az X_k halmazok (direkt) szorzata, azaz azon $y = (y_1, \dots, y_n)$ elem n-esek halmaza, melyekre $y_k \in X_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, $\mathcal{Y}$ pedig az Y részhalmazainak alábbi módon értelmezett σ-algebrája.

Tekintsük az

$$\{y : y \in Y, \quad y_k \in B_k\}$$

alakú halmazok összességét, ahol $B_k \in \mathcal{X}_k$, $1 \le k \le n$.

Az ilyen alakú halmazok által generált σ-algebra legyen az $\mathcal{Y}$. Ha $k = 1, \dots, n$ és π_k jelöli az Y halmaz X_k-ra való projekcióját, azaz $y \in Y$ esetén

$$\pi_k(y) = y_k,$$

akkor könnyű belátni, hogy $\mathcal{Y}$ az a legszűkebb σ-algebrája az Y részhalmazainak, melyre nézve a π_k $(k = 1, \dots, n)$ projekciók mind mérhetőek.

Tekintsük a $\zeta : \Omega \to Y$ leképezést, melyre $\omega \in \Omega$ esetén

$$\pi_k(\zeta(\omega)) = \xi_k(\omega), \quad k = 1, \dots, n,$$

azaz $\zeta(\omega) = (\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$. Ekkor ζ $(Y, \mathcal{Y})$ fázisterű sztochasztikus elem $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$-n.

Szokás ζ-t a $\xi_1, \dots, \xi_n$ sztochasztikus elemek direkt szorzatának nevezni. Ha a ξ_k mennyiségek $(k = 1, \dots, n)$ valószínűségi változók, akkor ζ valós komponensű véletlen vektor.

Sztochasztikus elemek direkt szorzatának értelmezése kiterjeszthető tetszőleges elemszám esetére is. Legyen $\Gamma \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz és $\gamma \in \Gamma$ esetén ξ_γ $(X_\gamma, \mathcal{X}_\gamma)$ fázisterű sztochasztikus elem $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$-n. Legyen $Y = \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, a Γ-t az $\cup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ halmazba képező olyan y függvények halmaza, melyre $y(\gamma) \in X_\gamma$ minden $\gamma \in \Gamma$ esetén. Legyen π_γ az Y projekciója X_γ-ra azaz $\pi_\gamma(y) = y(\gamma)$ minden $\gamma \in \Gamma$-ra.

Az Y részhalmazainak azt a legszűkebb $\mathcal{Y}$ σ-algebráját, melyre vonatkozóan minden π_γ projekció mérhető, az $\mathcal{X}_\gamma$ σ-algebrák direkt szorzatának, az $(Y, \mathcal{Y})$ mérhető teret pedig az $(X_\gamma, \mathcal{X}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ *mérhető terek direkt szorzatának* nevezzük. Megjegyezzük, hogy ugyanúgy, mint véges sok paraméter esetén, $\mathcal{Y}$ nem más, mint az

$$\{y : y(\gamma_0) \in B_{\gamma_0}\}, \qquad \gamma_0 \in \Gamma,\ B_{\gamma_0} \in \mathcal{X}_{\gamma_0}, \tag{1.1}$$

alakú halmazokat tartalmazó legszűkebb σ-algebra. Véges sok (1.1) alakú halmaz metszetét, azaz az

$$\{y : y(\gamma_1) \in B_{\gamma_1}, \dots,\ y(\gamma_n) \in B_{\gamma_n}\}$$

típusú halmazt szokás *hasábhalmaznak* nevezni.

Legyen most ζ az Ω-nak Y-ba való olyan leképezése, hogy $\omega \in \Omega$ és $\gamma \in \Gamma$ esetén

$$\pi_\gamma \zeta(\omega) = \xi_\gamma(\omega), \tag{1.2}$$

ahol ξ_γ $(X_\gamma, \mathcal{X}_\gamma)$ fázisterű sztochasztikus elem. Megmutatjuk, hogy ζ mérhető leképezés. Ehhez azt kell igazolnunk, hogy tetszőleges $B \in \mathcal{Y}$ esetén $\zeta^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Figyelembe véve, hogy $\mathcal{Y}$-t az (1.1) alakú halmazok generálják, elegendő megmutatni, hogy

$$\zeta^{-1}\big(\{y : y(\gamma_0) \in B_{\gamma_0}\}\big) \in \mathcal{F}, \quad \gamma_0 \in \Gamma,\ B_{\gamma_0} \in \mathcal{X}_{\gamma_0}.$$

Azonban

$$\begin{aligned}\zeta^{-1}\big(\{y : y(\gamma_0) \in B_{\gamma_0}\}\big) &= \{\omega : \xi_{\gamma_0}(\omega) \in B_{\gamma_0}\} = \\ &= \xi_{\gamma_0}^{-1}(B_{\gamma_0}) \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

a ξ_{γ_0} függvény mérhetősége miatt. Tehát ζ sztochasztikus elem $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$-n és fázistere $(Y, \mathcal{Y})$.

Abban az esetben, amikor $X_\gamma = X$ minden $\gamma \in \Gamma$-ra, Y megegyezik a Γ-n értelmezett X-beli értékeket felvevő függvények X^Γ halmazával. Ez esetben az (1.2) leképezést, mely minden egyes $\omega \in \Omega$-hoz hozzárendel egy függvényt, véletlen leképezésnek, *véletlen függvénynek* nevezzük. Eszerint valószínűségi változóknak egy $\{\xi_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ seregét sztochasztikus elemként, véletlen függvényként tekinthetjük.

Ha Γ (amit szokás *paraméter térnek* is nevezni) rendezett halmaz, akkor a véletlen függvényt *sztochasztikus folyamatnak* nevezzük. Az esetek túlnyomó többségében Γ a valós számoknak egy részhalmaza, gyakran egy intervallum. Ilyen esetekben szokás Γ-t időként interpretálni, azaz Γ elemeire időpillanatokként hivatkozni. Mindez elsősorban onnan ered, hogy a sztochasztikus folyamatok fogalma időben lejátszódó jelenségek matematikai vizsgálata érdekében alakult ki, másrészt Γ-nak időként való interpretálása nagymértékű szemléletességet tesz lehetővé.

Említettük, hogy egy kísérletben elsősorban valószínűségi változók viselkedésével leírható események felé fordul az érdeklődés. Ha tekintünk egy ξ valószínűségi változót, akkor e változó viselkedésével leírható események a

$$\{\xi^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\} \tag{1.3}$$

halmazrendszerhez tartoznak, ahol $\mathcal{B}$ a valós számok Borel-halmazainak σ-algebrája. Nyilvánvaló, hogy az (1.3) halmazrendszer σ-algebrát alkot, melyet a továbbiakban $\sigma(\xi)$-vel fogunk jelölni. Nyilván $\sigma(\xi) \subset \mathcal{F}$, de általában $\sigma(\xi)$ lényegesen szűkebb $\mathcal{F}$-nél. Intuitíve világos, hogy két valószínűségi változó, ξ és η által kifeszített $\sigma(\xi)$ és $\sigma(\eta)$ σ-algebrák között általában semmilyen kapcsolat nincs. Ha viszont η valamilyen Borel-mérhető függvénye ξ-nek, akkor $\sigma(\eta) \subseteq \sigma(\xi)$. Mindez fordítva is igaz. A megfelelő állítást kicsit általánosabban, sztochasztikus elemekre mondjuk ki.

Legyen ξ $(X, \mathcal{X})$ fázisterű sztochasztikus elem. A

$$\{\xi^{-1}(B) : B \in \mathcal{X}\}$$

halmazok σ-algebrát alkotnak, melyet a ξ *sztochasztikus elem által generált σ-algebrának* nevezünk, és $\sigma(\xi)$-vel jelölünk. Szemléletesen $\sigma(\xi)$ az a legszűkebb σ-algebra, amelyre nézve ξ mérhető. Ha egy η sztochasztikus elemre $\sigma(\eta) \subseteq \sigma(\xi)$, akkor azt fogjuk mondani, hogy *η mérhető ξ-re nézve.*

1.1. lemma. *Legyen ξ $(X, \mathcal{X})$ fázisterű sztochasztikus elem az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn, η ugyanott ξ-re nézve mérhető valószínűségi változó. Ekkor létezik olyan, X-en értelmezett, $\mathcal{X}$-mérhető, valós értékű g függvény, hogy*

$$\eta(\omega) = g(\xi(\omega)) \quad \omega \in \Omega\text{-ra.}$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy η diszkrét valószínűségi változó, azaz

$$\eta = \sum_n a_n \chi_{A_n},$$

ahol a_n valós, $A_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, 2, \dots)$ és $A_i \cap A_j = \emptyset$, ha $i \neq j$, továbbá $\cup_n A_n = \Omega$.

Feltevésünk értelmében $A_n \in \sigma(\xi)$, ezért létezik olyan $B_n \in \mathcal{X}$, hogy $\xi^{-1}(B_n) = A_n$ $(n = 1, 2, \dots)$. Legyen

$$B'_n = B_n \setminus \cup_{k=1}^{n-1} B_k, \quad n = 2, 3, \dots,$$
$$B'_1 = B_1.$$

A B'_n $(n = 1, 2, \dots)$ halmazok páronként közös pont nélküliek, továbbá

$$\xi^{-1}(B'_n) = A_n \setminus \Big(\cup_{k=1}^{n-1} A_k \Big) = A_n,$$

s így

$$\xi^{-1}\Big(\cup_n B'_n \Big) = \cup_n A_n = \Omega,$$

azaz

$$\xi(\Omega) \subseteq \cup_n B'_n.$$

Legyen most

$$g(x) = \begin{cases} a_n, & \text{ha } x \in B'_n, \\ 0, & \text{ha } x \in X \setminus \cup_n B'_n, \end{cases}$$

ekkor $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$ minden $\omega \in \Omega$-ra.

Áttérve az általános esetre, mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy létezik $\sigma(\xi)$-mérhető diszkrét valószínűségi változóknak olyan $\{\eta_n,\ n = 1, 2, \dots\}$ sorozata, hogy minden $\omega \in \Omega$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n(\omega) = \eta(\omega).$$

Azt már tudjuk, hogy η_n felírható $\eta_n(\omega) = g_n(\xi(\omega))$, $\omega \in \Omega$, alakban, ahol g_n $\mathcal{X}$-mérhető valós értékű függvény X-en ($n = 1, 2, \dots$). Legyen

$$S = \{x \in X : \text{ létezik } \lim_{n\to\infty} g_n(x)\}.$$

Ekkor $S \in \mathcal{X}$ és minthogy minden $\omega \in \Omega$-ra

$$\eta_n(\omega) = g_n(\xi(\omega)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta(\omega),$$

ezért $\xi(\Omega) \subseteq S$.

Legyen

$$g(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} g_n(x), & x \in S, \\ 0, & x \in X \setminus S. \end{cases}$$

Ekkor $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$ minden $\omega \in \Omega$-ra, s ezt kellett bizonyítanunk. □

Várható érték. A valószínűségi változók legfontosabb számkarakterisztikája a várható érték.

Ha ξ valószínűségi változó az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn, akkor az

$$\mathbb{E}\xi = \int_\Omega \xi d\mathbb{P}$$

integrált, feltéve, hogy létezik, a ξ *várható értékének* nevezzük.

Legyen ζ $(X, \mathcal{X})$ fázisterű sztochasztikus elem. A ζ *eloszlása* alatt a fázisterében általa indukált

$$\mu(B) = \mathbb{P}(\{\omega : \zeta(\omega) \in B\}), \quad B \in \mathcal{X},$$

mértéket értjük. Gyakran indexeljük e mértéket magával a sztochasztikus elemmel μ_ζ módon. Ha h az X-en értelmezett valós értékű $\mathcal{X}$-mérhető függvény, akkor $\xi(\omega) = h(\xi(\omega))$ esetén ξ valószínűségi változó, melynek várható értéke, amennyiben az létezik,

$$\mathbb{E}\xi = \int_X h\, d\mu_\zeta \tag{1.4}$$

alakban írható fel. Az (1.4) formula az absztrakt integrálokra vonatkozó helyettesítési szabályból származik.

Ha ξ valószínűségi változó, akkor annak μ_ξ eloszlása mérték a valós számok Borel-halmazain. Ismeretes, hogy ekkor a μ_ξ eloszlás egyértelműen megadható az

$$F_\xi(x) = \mu_\xi\big((-\infty, x)\big) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\})$$

függvénnyel, melyet a ξ valószínűségi változó *eloszlásfüggvényének* nevezünk. Ilyen esetben az (1.4) alapján

$$\mathbb{E}\xi = \int_\mathbb{R} x dF_\xi(x),$$

azaz ξ várható értéke a $h(x) = x$ függvénynek az F_ξ eloszlásfüggvény szerint vett Stieltjes-integrálja.

Végül felelevenítjük még a valószínűségi változók sorozatára vonatkozó különböző konvergencia fogalmakat.

Sztochasztikus konvergencia. Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_n,\ n = 1, 2, \dots\}$ valószínűségi változók sorozata *sztochasztikusan konvergál* a ξ valószínűségi változóhoz, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0.$$

Szokás a sztochasztikus konvergenciát valószínűségben (mértékben) való konvergenciának nevezni.

Egy valószínűséggel való konvergencia. Ha a ξ_n $(n = 1, 2, \dots)$ valószínűségi változókhoz létezik olyan ξ valószínűségi változó, hogy majdnem minden ω-ra

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega),$$

azaz

$$\mathbb{P}\Big(\{\omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\}\Big) = 1,$$

akkor azt mondjuk, hogy a $\{\xi_n,\ n = 1, 2, \dots\}$ valószínűségi változók sorozata *egy valószínűséggel konvergál* a ξ valószínűségi változóhoz. Az egy valószínűséggel való konvergenciát majdnem mindenütt, vagy majdnem biztos konvergenciának is nevezzük.

Konvergencia négyzetes középben. Ha a ξ_n $(n = 1, 2, \dots)$ és a ξ valószínűségi változókra

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|\xi_n - \xi|^2 = 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy a ξ_n $(n = 1, 2, \dots)$ valószínűségi változók *négyzetes középben ξ-hez konvergálnak.*

Feladatok

1. Legyen $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény, $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn. Ekkor $h(\xi_1, \dots, \xi_n)$ is valószínűségi változó.
2. Ha $\{\xi_n,\ n = 1, 2, \dots\}$ valószínűségi változók sorozata, akkor $\sup_n \xi_n$, $\inf_n \xi_n$, $\overline{\lim}_n \xi_n$, $\underline{\lim}_n \xi_n$ szintén valószínűségi változók.
3. Ha ξ_k és η_k ekvivalens valószínűségi változók minden $k = 1, \dots, n$ esetén és h az 1. feladatban szereplő függvény, akkor $h(\xi_1, \dots, \xi_n)$ és $h(\eta_1, \dots, \eta_n)$ ekvivalensek.
4. Legyen $\{\xi_n,\ n = 1, 2, \dots\}$ valószínűségi változók sorozata. Mutassuk meg, hogy ha
$$S = \big\{\omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \text{ létezik}\big\},$$
akkor
$$S = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m_1, m_2 > n} \left\{\omega : |\xi_{m_1}(\omega) - \xi_{m_2}(\omega)| < \frac{1}{k}\right\}.$$
5. Konstruáljunk sztochasztikusan illetve egy valószínűséggel konvergáló valószínűségi változók sorozatát. Konstruáljunk olyan valószínűségi változókból álló sorozatot, mely sztochasztikusan konvergál, de egy valószínűséggel nem.
6. Ismeretes, hogy ha a $\{\xi_n,\ n = 1, 2, \dots\}$ valószínűségi változók sorozata négyzetes középben konvergál, akkor sztochasztikusan is konvergál, miközben a két értelemben vett határértékeik ekvivalensek. Mutassuk meg, hogy ennek fordítottja általában nem igaz.

2. fejezet
Feltételes valószínűség és várható érték

Események, valószínűségi változók függőségi viszonyát gyakran írjuk le egymásra vonatkozó feltételes valószínűségeik, ill. feltételes várható értékeik segítségével. Ez a leírásmód lényegesen nagyobb szerepet kap a sztochasztikus folyamatok elméletében. E fejezetben megadjuk a feltételes valószínűség és várható érték általános fogalmát, mely a továbbiakban alapvető szerepet fog játszani.

Kezdjük mindenekelőtt a valószínűségszámításból ismeretes feltételes valószínűség és várható érték fogalmának felelevenítésével. Legyenek A és B események. Ha $\mathbb{P}(B) > 0$, akkor az A eseménynek a B eseményre vonatkoztatott *feltételes valószínűségén* a

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

hányadost értjük. Rögzített B-esetén $\mathbb{P}(\cdot|B)$ normált mérték ugyanazon a σ-algebrán, amelyen a $\mathbb{P}$ valószínűség van értelmezve.

Legyen ezután ξ valószínűségi változó. ξ-nek a B eseményre vonatkoztatott feltételes várható értékén az

$$\mathbb{E}(\xi|B) = \int_\Omega \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega|B)$$

mennyiséget értjük. Figyelembe véve a feltételes valószínűség értelmezését, az előző egyenlőség

$$\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{E}(\xi|B) = \int_B \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \tag{2.1}$$

alakban írható fel.

Vegyük észre, hogy ha χ_A az A esemény indikátora, akkor

$$\mathbb{E}(\chi_A|B) = \mathbb{P}(A|B).$$

Ezért mondhatjuk, hogy a feltételes valószínűség a feltételes várható érték speciális esete, s így csak az utóbbival foglalkozunk.

Legyen $\mathfrak{M} = \{B_1, B_2, \dots\}$ teljes eseményrendszer, azaz $\mathfrak{M} \subset \mathcal{F}$ megszámlálható, elemei páronként diszjunktak és egyesítésük kiadja Ω-t. Ha ξ valószínűségi változó, akkor értelmezzük az $\mathbb{E}(\xi|\mathfrak{M})$ diszkrét valószínűségi változót az alábbi módon:

$$\mathbb{E}(\xi|\mathfrak{M}) = \sum_i \mathbb{E}(\xi|B_i) \cdot \chi_{B_i},$$

azaz

$$\mathbb{E}(\xi|\mathfrak{M})(\omega) = \mathbb{E}(\xi|B_i), \quad \text{ha } \omega \in B_i.$$

Az így értelmezett $\mathbb{E}(\xi|\mathfrak{M})$ valószínűségi változót ξ-nek az $\mathfrak{M}$ teljes eseményrendszerre vonatkozó feltételes várható értékének nevezzük. Nyilvánvaló, hogy $\mathbb{E}(\xi|\mathfrak{M})$ csak olyan ω-ra van értelmezve, amely pozitív valószínűségű B_i-be esik, azaz $\mathbb{E}(\xi|\mathfrak{M})$ csak majdnem mindenütt (más kifejezéssel, csak 1 valószínűséggel) van meghatározva. Vegyük most észre, hogy $\mathbb{E}(\xi|\mathfrak{M})$ ismerete ξ-nek nemcsak valamely $B_i \in \mathfrak{M}$-re vonatkozó feltételes várható értékének ismeretét jelenti, hanem ki lehet számítani ξ-nek tetszőleges, az $\mathfrak{M}$

rendszer által kifeszített legszűkebb $\sigma(\mathfrak{M})$ σ-algebrához tartozó B eseményre vonatkozó feltételes várható értékét is. Valóban, ha $B \in \sigma(\mathfrak{M})$, akkor

$$B = \cup_k B_{j_k}, \quad \text{ahol } B_{j_k} \in \mathfrak{M},$$

és

$$\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{E}(\xi|B) = \sum_k \mathbb{P}(B_{j_k})\mathbb{E}(\xi|B_{j_k}). \tag{2.2}$$

Ez az összefüggés felírható az alábbi módon is:

$$\int_B \xi d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(\xi|\mathfrak{M}) d\mathbb{P}. \tag{2.3}$$

Összefoglalva, $\mathbb{E}(\xi|\mathfrak{M})$ olyan valószínűségi változó, mely nyilvánvalóan $\sigma(\mathfrak{M})$-mérhető, hiszen a $\sigma(\mathfrak{M})$-et generáló B_i halmazokon konstans, $\mathbb{E}(\xi|B_i)$ értékeket felvevő lépcsős függvény, másrészt minden $B \in \sigma(\mathfrak{M})$-re kielégíti a (2.3) összefüggést. Könnyű észrevenni, e két tulajdonság egyértelműen meghatározza az $\mathbb{E}(\xi|\mathfrak{M})$ feltételes várható értéket, abban az értelemben, hogy ha két függvény rendelkezik a felsorolt két tulajdonsággal, akkor azok 1 valószínűséggel megegyeznek (ekvivalensek).

Általában, ha η_1 és η_2 az $\mathcal{F}$ σ-algebrára nézve mérhető valószínűségi változók, és minden $B \in \mathcal{F}$-re

$$\int_B \eta_1 d\mathbb{P} = \int_B \eta_2 d\mathbb{P},$$

akkor η_1 és η_2 ekvivalensek.

Éppen ez a körülmény ad alapot arra, hogy a feltételes várható érték fogalmát általánosítsuk.

Feltételes várható érték. Legyen az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn adva egy ξ valószínűségi változó, melynek várható értéke létezik. Legyen továbbá $\mathcal{B}$ az Ω részhalmazainak olyan σ-algebrája, hogy $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.

A ξ valószínűségi változónak a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebrára vonatkoztatott *feltételes várható értékén* értjük, és $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$-vel jelöljük, azt a $\mathcal{B}$-mérhető valószínűségi változót, amelyre minden $B \in \mathcal{B}$ esetén

$$\int_B \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) d\mathbb{P} = \int_B \xi d\mathbb{P}. \tag{2.4}$$

Az $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$ valószínűségi változó létezése és egyértelműsége (az ekvivalencia erejéig) közvetlenül következik a mértékelméletből jól ismert Radon-Nikodym tételből.

Valóban, a (2.4) jobboldalán álló mennyiség $\mathcal{B}$-n értelmezett halmazfüggvény, mely feltevéseink értelmében σ-véges és megszámlálhatóan additív, továbbá abszolút folytonos a $\mathbb{P}$ mértékre nézve. Következésképpen létezik olyan $\mathcal{B}$-mérhető g függvény, hogy minden $B \in \mathcal{B}$-re

$$\int_B \xi d\mathbb{P} = \int_B g d\mathbb{P},$$

ahol g $\mathbb{P}$-majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott. Ez a g éppen, definíciónk értelmében, ξ-nek a $\mathcal{B}$ σ-algebrára vonatkoztatott feltételes várható értéke.

Megjegyzés. Legyen $\tilde{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$ σ-algebra teljessé tétele által adódó σ-algebra, azaz $B \in \mathcal{B}$-n kívül $\tilde{\mathcal{B}}$-hoz csatoljuk még $\mathcal{B}$ 0 valószínűségű halmazainak tetszőleges részhalmazait is. Ekkor $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$ és $\mathbb{E}(\xi|\tilde{\mathcal{B}})$ ekvivalensek, ami a feltételes várható érték értelmezéséből könnyen következik.

Feltételes valószínűség. Valamely $A \in \mathcal{F}$ esemény feltételes valószínűségét egy adott $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebrára nézve, speciális feltételes várható érték gyanánt értelmezzük.

Egy A eseménynek valamely $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebrára vonatkoztatott *feltételes valószínűségén* az A indikátorának, χ_A-nak $\mathcal{B}$-re vonatkoztatott feltételes várható értékét értjük, azaz

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(\chi_A|\mathcal{B}).$$

A feltételes várható érték és a feltételes valószínűség tulajdonságai. E pontban mindvégig feltételezni fogjuk, hogy a szóbanforgó valószínűségi változónak létezik a (véges vagy végtelen) várható értéke. Állításainkban a relációkat úgy kell érteni, hogy azok 1 valószínűséggel teljesülnek, s erre nem fogunk külön utalni. A feltételes várható érték értelmezéséből közvetlenül következik az alábbi öt tulajdonság.

a) Ha ξ nem negatív valószínűségi változó, akkor

$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) \geq 0.$$

b) Ha ξ $\mathcal{B}$-mérhető valószínűségi változó, akkor $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) = \xi$. Ezért, ha $A \in \mathcal{B}$, akkor

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{B}) = \chi_A.$$

c) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})) = \mathbb{E}\xi$.
((2.4)-ből következik $B = \Omega$ esetén).

d) Ha $\mathbb{E}\xi_i < \infty$, $i = 1, 2$-re, akkor

$$\mathbb{E}(a_1\xi_1 + a_2\xi_2|\mathcal{B}) = a_1\mathbb{E}(\xi_1|\mathcal{B}) + a_2\mathbb{E}(\xi_2|\mathcal{B}).$$

Legyen $\xi_i = \chi_{B_i}$ $(i = 1, 2)$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Ekkor a)-ból következik a feltételes valószínűség additív tulajdonsága:

$$\mathbb{P}(B_1 \cup B_2|\mathcal{B}) = \mathbb{P}(B_1|\mathcal{B}) + \mathbb{P}(B_2|\mathcal{B}).$$

e) Legyen $\{\xi_n,\ n = 1, 2, \dots\}$ nemnegatív valószínűségi változók monoton növekvő sorozata. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{B}) = \mathbb{E}\big(\lim_{n\to\infty} \xi_n|\mathcal{B}\big).$$

Az állítás közvetlenül következik, ha az

$$\int_B \mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{B})d\mathbb{P} = \int_B \xi_n d\mathbb{P}, \quad B \in \mathcal{B},$$

egyenlőség mindkét oldalának $n \to \infty$ határértékét vesszük, melyet a Lebesgue-tétel szerint mindkét oldalon az integráljelen belül végezhetünk el.

A feltételes valószínűségre az e) tulajdonságból következik, hogy ha $\{B_n,\ n = 1, 2, \dots\}$ monoton növekvő eseménysorozat, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n|\mathcal{B}) = \mathbb{P}\big(\cup_n B_n|\mathcal{B}\big),$$

továbbá, ha $\{A_n,\ n = 1, 2, \dots\}$ páronként diszjunkt események sorozata, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n|\mathcal{B}) = \mathbb{P}\Big(\cup_{n=1}^{\infty} A_n|\mathcal{B}\Big). \tag{2.5}$$

2.1. megjegyzés. A feltételes valószínűség fenti tulajdonsága nem jelenti azt, hogy bármely rögzített ω mellett $\mathbb{P}(\cdot|\mathcal{B})$ σ-additív halmazfüggvény. Általában azon ω-k halmaza, melyekre (2.5) nem teljesül, függ az $A_1, A_2, \dots$ halmazsorozattól, s így előfordulhat, hogy nincs az Ω-nak egyetlen olyan eleme sem, hogy (2.5) az $\{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ páronként diszjunkt eseményrendszer tetszőleges választása esetén is érvényes volna.

f) Ha a ξ valószínűségi változó és a $\mathcal{B}$ σ-algebra függetlenek, ami alatt azt értjük, hogy tetszőleges $B \in \mathcal{B}$-re ξ és χ_B függetlenek, akkor

$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) = \mathbb{E}\xi.$$

Ugyanis ξ és χ_B $(B \in \mathcal{B})$ függetlensége következtében

$$\int_B \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})d\mathbb{P} = \int_B \xi d\mathbb{P} = \int_\Omega \xi\chi_B d\mathbb{P} = \mathbb{E}(\xi)\cdot\mathbb{P}(B) = \int_B \mathbb{E}\xi d\mathbb{P},$$

azaz $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$ ekvivalens az $\mathbb{E}\xi$ konstans értéket felvevő valószínűségi változóval.

A feltételes valószínűségre e tulajdonság azt jelenti, hogy ha A, és $\mathcal{B}$ tetszőleges B eseménye független, akkor

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{B}) = \mathbb{P}(A).$$

g) Ha η $\mathcal{B}$-mérhető, ξ tetszőleges valószínűségi változó és $\mathbb{E}\xi$ és $\mathbb{E}\xi\eta$ véges, akkor

$$\mathbb{E}(\eta\xi|\mathcal{B}) = \eta\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}).$$

Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy a g) tulajdonságot elegendő bebizonyítani arra az esetre, amikor η valamely $\mathcal{B}$-beli B_1 halmaz indikátora. Tetszőleges η $\mathcal{B}$-mérhető függvény felírható

$$\eta = \eta^+ - \eta^-$$

alakban, ahol $\eta^+ = \sup\{\eta, 0\}$, $\eta^- = -\inf\{\eta, 0\}$. Következésképpen, ha g)-t belátjuk nemnegtív η-ra, akkor a d) tulajdonság alapján g) érvényessége következik tetszőleges η-ra is. Bontsuk fel ξ-t is $\xi = \xi^+ - \xi^-$ alakra. Viszont bármely nemnegatív valószínűségi változó előállítható monoton növekvő lépcsős függvények határértékeként, így e)-re való tekintettel g)-t elegendő bizonyítani lépcsős függvényekre. Ismét e) és d) alapján g)-nek tetszőleges lépcsős függvényre való érvényességéhez elegendő belátni állításunkat a már említett egyszerű esetre. Legyen tehát η valamely $\mathcal{B}$-beli B_1 halmaz indikátora. Ekkor $B \in \mathcal{B}$ esetén

$$\int_B \eta\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})d\mathbb{P} = \int_{B\cap B_1} \xi d\mathbb{P} = \int_B \eta\xi d\mathbb{P},$$

s állításunk ezzel igazolást is nyert, minthogy $\eta\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$ $\mathcal{B}$-mérhető függvény.

Egy ξ valószínűségi változó $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$ feltételes várható értéke ismét valószínűségi változó, így képezhető az utóbbinak a feltételes várható értéke valamely más $\mathcal{A}$ σ-algebrára nézve. Így eljutunk az

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})|\mathcal{A}\right) \tag{2.6}$$

iterált feltételes várható értékhez. Ha sem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, sem $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ nem áll fenn, akkor általában semmit sem mondhatunk a (2.6) iterált feltételes várható értékről. Ha viszont az említett két reláció valamelyike fennáll, akkor (2.6) mindig helyettesíthető egyszeres feltételes váratό értékkel.

Közvetlenül az értelmezésekből következik, hogy $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$ esetén

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}).$$

Lényegesen mélyebb állítást jelent a következő tulajdonság:

h) Ha $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, akkor

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})|\mathcal{A}\right) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}).$$

Valóban, ha $B \in \mathcal{A}$, akkor $B \in \mathcal{B}$, és így

$$\int_B \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})|\mathcal{A})d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})d\mathbb{P} = \int_B \xi d\mathbb{P} =$$

$$= \int_B \mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})d\mathbb{P}.$$

Állításunk végül is a két szélső tag egyenlőségéből következik.

A h) tulajdonságból következik, hogy ha $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ és η $\mathcal{B}$-mérhető valószínűségi változó, akkor

$$\mathbb{E}(\xi\eta|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(\eta\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})|\mathcal{A}).$$

Valószínűségi változók egymásra vonatkoztatott feltételes várható értékei. Legyen ζ $(X, \mathcal{X})$ fázisterű sztochasztikus elem az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn. Legyen ξ olyan valószínűségi változó az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$-n, melynek létezik a (véges vagy végtelen) várható értéke.

Az $\mathbb{E}(\xi|\sigma(\zeta))$ feltételes várható értéket a ξ valószínűségi változónak a ζ sztochasztikus elemre vonatkoztatott *feltételes várható értékének* nevezzük, s a továbbiakban $\mathbb{E}(\xi|\zeta)$-val jelöljük.

Hasonlóan értelmezzük valamely $A \in \mathcal{F}$ eseménynek a ζ sztochasztikus elemre vonatkoztatott

$$\mathbb{P}(A|\zeta) = \mathbb{P}(A|\sigma(\zeta))$$

feltételes valószínűségét.

2.1. tétel. *Ha ζ $(X, \mathcal{X})$ fázisterű sztochasztikus elem, ξ valószínűségi változó, akkor az $\mathbb{E}(\xi|\zeta)$ feltételes várható érték ζ-nak $\mathcal{X}$-mérhető függvénye, azaz létezik olyan s valós értékű, $\mathcal{X}$-mérhető függvény, amelyre*

$$\mathbb{E}(\xi|\zeta)(\omega) = s(\zeta(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

Bizonyítás. Az $\mathbb{E}(\xi|\zeta)$, értelmezéséből kifolyólag, $\sigma(\zeta)$-mérhető függvény, ezért az állítás az 1. fejezet lemmájából következik. □

Felsorolunk most néhány állítást, melyek közvetlenül következnek a feltételes várható érték korábban levezetett tulajdonságaiból.

α) Legyen a ξ valószínűségi változó és a ζ sztochasztikus elem független. Ekkor $\mathbb{E}(\xi|\zeta) = \mathbb{E}\xi$.

β) Ha ξ a ζ sztochasztikus elemre nézve mérhető valószínűségi változó, akkor $\mathbb{E}(\xi|\zeta) = \xi$.

γ) Legyenek η_1, η_2 sztochasztikus elemek, ξ valószínűségi változó. Jelöljük $\sigma(\eta_1, \eta_2)$-vel azt a legszűkebb σ-algebrát, amelyre nézve η_1 és η_2 még mérhetők. Ekkor

$$\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}(\xi|\sigma\left(\eta_1, \eta_2\right))\left|\sigma(\eta_1)\right.\right\} = \mathbb{E}(\xi|\eta_1).$$

Reguláris feltételes valószínűségek. Korábban már említettük (lásd a (2.5) utáni megjegyzést), hogy a feltételes valószínűséget általában nem lehet az elemi eseményektől függő mértékként felfogni. Mégis az esetek többségében erre lehetőség kínálkozik.

A feltételes valószínűség értelmezése szerint minden rögzített $A \in \mathcal{F}$-re $\mathbb{P}(A|\mathcal{B})$ $\mathcal{B}$-mérhető, $\mathbb{P}$ majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott függvény.

Rögzített $\omega \in \Omega$ esetén a $\mathbb{P}(\cdot|\mathcal{B})(\omega)$ nem feltétlenül mérték $\mathcal{F}$-n, s az volna jó, ha lehetne olyan, $\mathbb{P}(\cdot|\mathcal{B})$-vel ekvivalens valószínűségi változót találni, mely rögzített $\omega \in \Omega$ esetén mérték volna $\mathcal{F}$-en. Könnyű észrevenni, hogy ezen kívánságunk teljesül, ha létezik olyan valós értékű p függvény $\Omega \times \mathcal{F}$-en, melyre

(a) minden rögzített $\omega \in \Omega$-ra $p(\omega, \cdot)$ valószínűségi mérték $\mathcal{F}$-en;
(b) minden rögzített $A \in \mathcal{F}$-re

$$\mathbb{P}\big(\{\omega : p(\omega, A) \neq \mathbb{P}(A|\mathcal{B})\}\big) = 0.$$

Ha létezik az (a), (b) feltételeknek eleget tevő függvény, akkor azt mondjuk, hogy a $\mathbb{P}(A|\mathcal{B})$ *feltételes valószínűségek serege reguláris.* Ez esetben $\mathbb{P}(A|\mathcal{B})$-t azonosnak vehetjük $p(\cdot\,, A)$-val.

2.2. tétel. *Ha a $\mathcal{B}$ σ-algebrára vonatkoztatott $\mathbb{P}(A|\mathcal{B})$ feltételes valószínűségek serege reguláris, és ξ valószínűségi változó, akkor*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})(\omega) &= \int_\Omega \xi(\omega')\mathbb{P}(d\omega'|\mathcal{B})(\omega) \\ &= \int_\Omega \xi(\omega')p(\omega, d\omega'). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Bizonyítás. Az állítás igazolása igen egyszerű. Ha ξ egy $A \in \mathcal{F}$ halmaz indikátora, akkor állításunk egyenértékű a tétel feltételével. (2.7) mindkét oldala ξ-ben lineáris funkcionál, így állításunk következik a lépcsős függvényekre is. Majd nem negatív lépcsős függvények monoton növekvő sorozatának határfüggvényére térve át kapjuk (2.7) fennállását tetszőleges nemnegatív ξ-re. Végül a linearitás ismételt felhasználásával fejezhető be állításunk bizonyítása. $\square$

Gyakran nem a teljes $\mathcal{F}$ σ-algebra halmazainak feltételes valószínűségeit kell figyelembe venni, hanem csak valamely ζ sztochasztikus elem által indukált $\zeta^{-1}(B)$ típusú halmazok feltételes valószínűségeit, azaz a ζ sztochasztikus elem adott $\mathcal{B}$ σ-algebrára vonatkoztatott feltételes eloszlása kerül előtérbe. Amint látni fogjuk, az alkalmazások szempontjából érdekes esetek jelentős részében a feltételes eloszlások regulárisak. Áttérünk most ezen állítások pontos megfogalmazására.

Legyen ζ $(X, \mathcal{X})$ fázisterű sztochasztikus elem, $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebra. A ζ-nak az $\mathfrak{M}$ σ-algebrára vonatkoztatott eloszlásán a

$$\mathbb{P}(\zeta^{-1}(B)|\mathfrak{M}), \quad B \in \mathcal{X}, \tag{2.8}$$

feltételes valószínűségek seregét értjük. A (2.8) feltételes valószínűségek regularitása azt jelenti, hogy létezik olyan valós értékű Q függvény az $\Omega \times \mathcal{X}$-en, mely kielégíti az alábbi követelményeket:

(1) rögzített $B \in \mathcal{X}$ esetén $Q(\cdot\,, B)$ $\mathfrak{M}$-mérhető függvény az Ω-n;
(2) minden rögzített $\omega \in \Omega$ esetén $Q(\omega, \cdot)$ valószínűségi mérték $\mathcal{X}$-en;
(3) minden $B \in \mathcal{X}$-re 1 valószínűséggel

$$Q(\omega, B) = \mathbb{P}(\zeta^{-1}(B)|\mathfrak{M}).$$

Az utolsó követelmény ekvivalens azzal, hogy tetszőleges $A \in \mathfrak{M}$-re

$$\int_A Q(\omega, B)d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(\zeta^{-1}(B) \cap A).$$

2.3. tétel. *Legyen X teljes szeparábilis metrikus tér, $\mathcal{X}$ az X tér Borel-halmazainak σ-algebrája. Legyen ζ $(X, \mathcal{X})$ fázisterű sztochasztikus elem az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn, $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{F}$ tetszőleges σ-algebra. Ekkor ζ-nak az $\mathfrak{M}$-re vonatkoztatott feltételes eloszlása reguláris.*

E tétel bizonyítása eléggé terjedelmes, s minthogy nem fogjuk alkalmazni, bizonyítását elhagyjuk.

Feltételes sűrűségek. Legyen $(X, \mathcal{X}, m)$ mértéktér, ξ az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn adott $(X, \mathcal{X})$ fázisterű sztochasztikus elem. Az X-en értelmezett, valós értékű ϱ függvényt a ξ m-re vonatkozó *sűrűségfüggvényének* nevezzük, ha tetszőleges $B \in \mathcal{X}$-re

$$\mathbb{P}(\xi^{-1}(B)) = \int_B \varrho(x) dm(x).$$

A Radon-Nikodym tétel következtében egy ξ sztochasztikus elemnek akkor és csak akkor létezik a sűrűségfüggvénye, ha eloszlása abszolút folytonos az m mértékre nézve.

Legyen $(Y, \mathcal{Y}, \mu)$ is mértéktér, és η $(Y, \mathcal{Y})$ fázisterű sztochasztikus elem $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$-n. A (ξ, η) pár $(X \times Y\, ,\, \mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ fázisterű sztochasztikus elem $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$-n, s tegyük fel, hogy (ξ, η)-nak létezik ϱ sűrűségfüggvénye az $m \times \mu$ szorzat-mértékre nézve. Ekkor tetszőleges $B \in \mathcal{X}$ és $C \in \mathcal{Y}$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\xi^{-1}(B) \cap \eta^{-1}(C)\right) = \int_B \int_C \varrho(x, y) dm(x) d\mu(y).$$

A ϱ függvényt a ξ és az η sztochasztikus elemek együttes sűrűségfüggvényének nevezzük. Abból, hogy létezik az együttes sűrűségfüggvény, következik, hogy mind ξ, mind η rendelkezik sűrűségfüggvénnyel az m, ill. a μ mértékre nézve.

Valóban,

$$\mathbb{P}(\xi^{-1}(B)) = \int_B \int_Y \varrho(x, y) dm(x) d\mu(y) = \int_B \varrho_\xi(x) dm(x),$$

ahol $x \in X$-re

$$\varrho_\xi(x) = \int_Y \varrho(x, y) d\mu(y).$$

Hasonlóan

$$\mathbb{P}(\eta^{-1}(C)) = \int_C \varrho_\eta(y) d\mu(y),$$

ahol $y \in Y$-ra

$$\varrho_\eta(y) = \int_X \varrho(x, y) dm(x).$$

Megmutatjuk ezután, hogyan lehet kiszámítani az $\mathbb{E}(f(\eta)|\xi)$ feltételes várható értéket, ha (ξ, η) rendelkezik együttes sűrűségfüggvénnyel, és f Y-on integrálható, valós értékű függvény. Kiindulva a feltételes várható érték értelmezéséből, nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}\int_{\xi^{-1}(B)} \mathbb{E}(f(\eta)|\xi) d\mathbb{P} &= \int_{\xi^{-1}(B)} f(\eta) d\mathbb{P} = \mathbb{E}\left(f(\eta)\chi_B(\xi)\right) \\ &= \int_X \int_Y f(y)\chi_B(x)\varrho(x, y) dm(x) d\mu(y) \\ &= \int_B \left[\int_Y f(y) \frac{\varrho(x, y)}{\varrho_\xi(x)} d\mu(y)\right] \varrho_\xi(x) dm(x) \\ &= \int_{\xi^{-1}(B)} \bar{f}(\xi) d\mathbb{P},\end{aligned}$$

ahol

$$\bar{f}(x) = \int_Y f(y) \frac{\varrho(x, y)}{\varrho_\xi(x)} d\mu(y).$$

Ily módon

$$\mathbb{E}(f(\eta)|\xi) = \int_Y f(y)\frac{\varrho(\xi,y)}{\varrho_\xi(\xi)}d\mu(y).$$

Legyen a $\varrho(y|x) = \frac{\varrho(x,y)}{\varrho_\xi(x)}$. A $\varrho(\cdot\,|x)$ függvényt az η sztochasztikus elem *feltételes sűrűségfüggvényének* nevezzük a $\xi = x$ feltételre vonatkozólag. Ennek segítségével η valamely $f(\cdot)$ függvényének feltételes várható értéke a ξ-re vonatkoztatva

$$\mathbb{E}\left(f(\eta)|\xi\right) = \int_Y f(y)\varrho(y|\xi)d\mu(y)$$

alakban írható fel.

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, ha $\mathbb{P}\left(\,\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) \leq \mathbb{E}\xi\,\right) = 1$, akkor
$$\mathbb{P}\left(\,\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) = \mathbb{E}\xi\,\right) = 1.$$
2. Legyen $B \in \mathcal{B}$ olyan, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$ és ha $A \subset B$, $A \in \mathcal{B}$, akkor $\mathbb{P}(A) = 0$. Bizonyítandó, hogy tetszőleges ξ valószínűségi változó esetén $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$ konstans értéket vesz fel B-n.
3. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{D}_1$ és $\mathcal{D}_2$ σ-algebrák akkor és csak akkor függetlenek, ha $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{D}_2) = \mathbb{E}\xi$ minden $\mathcal{D}_1$-mérhető ξ valószínűségi változó esetén.
4. Legyen $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ a Borel mérhető halmazok σ-algebrája, $\mathbb{P}$ a Lebesgue mérték. Jelölje $\mathcal{D}$ a $\left[0,\frac{1}{4}\right]$, $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$, $\left(\frac{3}{4},1\right]$ halmazok által kifeszített σ-algebrát. Határozzuk meg $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{D})$-t, ha $\xi(\omega) = \omega^2$.
5. Legyenek $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ σ-algebrák, s tegyük fel, hogy egy ξ valószínűségi változóra $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor
$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{C}) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}).$$
6. Legyenek ξ és η valószínűségi változók, melyek együttes eloszlása normális. Számítsuk ki ξ-nek η-ra vonatkozó feltételes eloszlását (sűrűségfüggvényét).

3. fejezet
Sztochasztikus folyamatok, alapfogalmak

Időben lejátszódó jelenségek matematikai leírása általában egy időtől függő f függvény segítségével történik. Gyakran a szóbanforgó jelenség „azonos körülmények közötti” ismételt megfigyelésekor a leíró f függvény más-más alakot vesz fel. Ilyen esetek matematikai tárgyalása sikeresen valósítható meg az 1. fejezetben már említett véletlen függvények, sztochasztikus folyamatok segítségével. Most ismét felidézzük a véletlen függvény fogalmát.

Az Ω-nak X-be való mérhető leképezéseinek egy $\{\xi_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ seregét a Γ paraméterhalmazon értelmezett $(X, \mathcal{X})$ fázisterű *véletlen függvénynek* nevezzük.

Az 1. fejezetben láttuk, hogy a $\{\xi_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ mérhető leképezések serege tekinthető egy

$$\zeta : \omega \to \xi_\gamma(\omega) \in X^\Gamma$$

leképezésként, amely Ω-t az $Y = X^\Gamma$-ba mérhető módon képezi, azaz sztochasztikus elemként.

A továbbiakban szükségünk lesz a cilinderhalmaz (hengerhalmaz) fogalmára, így most ezt értelmezzük. Legyen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, $B^{(n)}$ az X^n halmaz mérhető részhalmaza (azaz $B^{(n)} \in \mathcal{X}^n$). Az $Y = X^\Gamma$ tér $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ koordinátájú és $B^{(n)}$ alapú *cilinderhalmazának* nevezzük a

$$C_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}(B^{(n)}) = \left\{y : y \in Y,\ (y(\gamma_1), \ldots, y(\gamma_n)) \in B^{(n)}\right\}$$

halmazt. Ha $B_i \in \mathcal{X}$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor

$$C_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \{y : y \in Y,\ y(\gamma_1) \in B_1, \ldots, y(\gamma_n) \in B_n\}$$

az Y térnek egy *hasábhalmaza*, azaz a hasábhalmazok speciális cilinderhalmazok. Vegyük észre, hogy a cilinderhalmazok elemei a hasábhalmazokat tartalmazó σ-algebrának. Következésképpen a cilinderhalmazok által generált σ-algebra egybeesik $\mathcal{Y}$-nal, amely mint láttuk, a hasábhalmazokat tartalmazó legszűkebb σ-algebra.

3.1. tétel. *Az $Y = X^\Gamma$ tér cilinderhalmazainak osztálya halmazalgebrát alkot.*

Bizonyítás. Mindenekelőtt azt vegyük észre, hogy ha az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ koordinátákat rögzítjük, akkor az n-változós cilinderhalmazok algebrát (sőt σ-algebrát) alkotnak. Ezután észrevesszük, hogy tetszőleges

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+m} \in \Gamma,\ B^{(n)} \in \mathcal{X}^n\text{-re}$$

$$C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(B^{(n)}) = C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{n+m}}(B^{(n)} \times X^m),$$

továbbá, hogy tetszőleges $B^{(n)} \in \mathcal{X}^n$-re, ha $\mathcal{S}$ az $1, 2, \ldots, n$ számok egy permutációja, és $B^{(n)}$ pontjainak koordinátáit ezen $\mathcal{S}$ permutációnak megfelelően rendezzük át, akkor az így kapott $\mathcal{S}B^{(n)}$ halmaz szintén mérhető. Tekintsünk ezek után két cilinderhalmazt:

$$C_1 = C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(A^{(n)}),$$

$$C_2 = C_{\beta_1,\ldots,\beta_m}(B^{(m)}).$$

Legyen $k = n+m$. Legyen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ az $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ és a $\beta_1, \dots, \beta_m$ koordináták egyesítése, mégpedig olyan rendezésben, hogy $\gamma_i = \alpha_i$ $(1 \le i \le n)$. Majd tekintsük a γ_i-koordináták olyan $\gamma_1', \dots, \gamma_k'$ rendezését, melyben $\gamma_i' = \beta_i$ $(1 \le i \le m)$, s legyen végül $\mathcal{S}$ az $1, 2, \dots, k$ számoknak az a permutációja, melyre $\mathcal{S}(\gamma_1', \dots, \gamma_k') = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$. Ekkor

$$C_1 = C_{\gamma_1,\dots,\gamma_k}(A^{(n)} \times X^{k-n}),$$

$$\begin{aligned} C_2 &= C_{\gamma_1',\dots,\gamma_k'}(B^{(m)} \times X^{k-m}) \\ &= C_{\gamma_1,\dots,\gamma_k}\left(\mathcal{S}(B^{(m)} \times X^{k-m})\right). \end{aligned}$$

Ezáltal, pl. a $C_1 \cup C_2$ a

$$C_{\gamma_1,\dots,\gamma_k}\left((A^{(n)} \times X^{k-n}) \cup \mathcal{S}(B^{(m)} \times X^{k-m})\right)$$

cilinderhalmaz. Hasonlóan mutatható meg, hogy cilinderhalmazok különbsége is cilinderhalmaz, s tételünk így bizonyítást nyert. □

Gyakran, elsősorban elméleti kérdések tárgyalásakor fontos szerepet fog játszani a véletlen függvények alábbi speciális esete. Legyen az elemi események Ω tere a Γ paramétertartományon értelmezett X-beli értékű függvények valamilyen részhalmaza. Tegyük fel, hogy Ω részhalmazainak $\mathcal{F}$ σ-algebrája tartalmazza az

$$\{\omega : \omega(\alpha_0) \in B\}$$

alakú halmazokat, bármilyen legyen is $\alpha_0 \in \Gamma$ és $B \in \mathcal{X}$ ($\mathcal{X}$ az ω függvények X értékkészletén tekintendő σ-algebra). Legyen végül $\mathbb{P}$ az $\mathcal{F}$ σ-algebrán adott tetszőleges valószínűségi mérték. Egy ilyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőhöz kézenfekvő hozzárendelni a

$$\xi_\gamma(\omega) = \omega(\gamma), \qquad \gamma \in \Gamma,$$

valószínűségi változók seregét (véletlen függvényt). A véletlen függvények ezen speciális esetét a *véletlen függvény kanonikus alakjának* szokás nevezni.

Amint látni fogjuk, tetszőleges véletlen függvény bizonyos értelemben mindig kanonikus alakra hozható, ami alatt azt kell érteni, hogy az adott véletlen függvényhez konstruálható kanonikus alakú véletlen függvény úgy, hogy a kettő ún. tágabb értelemben sztochasztikusan ekvivalens legyen. Ezen ekvivalencia fogalmához be kell vezetnünk a véletlen függvények véges dimenziós eloszlásait, melyek a további vizsgálatainkban mindvégig alapvető szerepet fognak játszani.

Legyen $\{\xi_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ X fázisterű véletlen függvény. Tetszőleges $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$-ra tekintsük a

$$(\xi_{\gamma_1}, \dots, \xi_{\gamma_n})$$

sztochasztikus elemnek az $(X^n, \mathcal{X}^n)$ térben megfelelő (e sztochasztikus elem által indukálódó)

$$\mathbb{P}_{\gamma_1,\dots,\gamma_n}(B^{(n)}) = \mathbb{P}\left(\{\omega : (\xi_{\gamma_1}(\omega), \dots, \xi_{\gamma_n}(\omega)) \in B^{(n)}\}\right), \qquad B^{(n)} \in \mathcal{X}^n, \tag{3.1}$$

valószínűségi mértéket. A (3.1) alapján értelmezett valószínűségi mértékeket a $\{\xi_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ véletlen függvény *véges dimenziós eloszlásainak* nevezzük.

A véges dimenziós eloszlások rendelkeznek az alábbi, magától értetődő két tulajdonsággal.

1.) Tetszőleges $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{n+m} \in \Gamma$ és $B^{(n)} \in \mathcal{X}^n$ esetén

$$\mathbb{P}_{\gamma_1,\dots,\gamma_n,\gamma_{n+1},\dots,\gamma_{n+m}}(B^{(n)} \times X^m) = \mathbb{P}_{\gamma_1,\dots,\gamma_n}(B^{(n)}). \tag{3.2}$$

2.) Legyen $\mathcal{S}$ tetszőleges $(y_1, \ldots, y_n)$ elem n-esre

$$\mathcal{S}(y_1, \ldots, y_n) = (y_{i_1}, \ldots, y_{i_n})$$

által értelmezett leképezés, ahol $(i_1, \ldots, i_n)$ az $(1, \ldots, n)$ valamely permutációja. Ha $\mathcal{S}$-et X^n elemeire alkalmazzuk, akkor tetszőleges $B^{(n)} \in \mathcal{X}^n$-re $\mathcal{S}B^{(n)}$ alatt értsük $B^{(n)}$-nek az $\mathcal{S}$ leképezés általi képét. Egy véletlen függvény (3.1) által értelmezett véges dimenziós eloszlásaira tetszőleges $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ és $B^{(n)} \in \mathcal{X}^n$ esetén

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)}(\mathcal{S}B^{(n)}) = \mathbb{P}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}(B^{(n)}). \tag{3.3}$$

A (3.2)-t és (3.3)-at a véges dimenziós eloszlások *kompatibilitási tulajdonságainak* nevezzük. Ha valamely véges dimenziós eloszlássereg rendelkezik e tulajdonságokkal, akkor azt is fogjuk mondani, hogy az eloszlássereg kielégíti a kompatibilitási feltételeket. Az előző megállapításunk tehát úgy is fogalmazható, hogy egy véletlen függvényre (3.1) módon értelmezett eloszlássereg mindig kielégíti a kompatibilitási feltételeket.

Gyakorlati alkalmazásokban a kérdések az esetek igen nagy többségében megválaszolhatók a tekintetbe veendő véletlen függvény véges dimenziós eloszlásainak a segítségével. Ilyen esetekben több véletlen függvény is figyelembe vehető, csupán azt kell megkövetelni tőlük, hogy véges dimenziós eloszlásuk azonos legyen.

3.1. definíció. Két $\{\xi_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ és $\{\xi'_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ véletlen függvényt, melyek esetleg különböző $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ és $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ valószínűségi mezőn vannak megadva, de fázisterük, $(X, \mathcal{X})$ azonos, *tágabb értelemben sztochasztikusan ekvivalenseknek* mondunk, ha tetszőleges

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma \quad \text{és} \quad B^{(n)} \in \mathcal{X}^n \quad \text{esetén}$$

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega : (\xi_{\gamma_1}(\omega), \ldots, \xi_{\gamma_n}(\omega)) \in B^{(n)}\right\}\right) = \mathbb{P}'\left(\left\{\omega' : (\xi'_{\gamma_1}(\omega'), \ldots, \xi'_{\gamma_n}(\omega')) \in B^{(n)}\right\}\right),$$

azaz, ha véges dimenziós eloszlásaik azonosak.

Véletlen függvények kanonikus alakra való hozása azt jelenti, hogy tetszőleges $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn adott $\{\xi_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ véletlen függvényhez lehet vele tágabb értelemben sztochasztikusan ekvivalens kanonikus alakú véletlen függvényt konstruálni.

Valóban, rögzítsük a

$$g(\gamma, \omega) = \xi_\gamma(\omega)$$

kétváltozós függvény második változóját minden lehetséges módon, s jelöljük $\mathcal{U}$-val az így adódó, Γ-n értelmezett függvények halmazát:

$$\mathcal{U} = \{u_\omega : u_\omega(\gamma) = g(\gamma, \omega),\ \omega \in \Omega\}.$$

$\mathcal{U}$-ra szokás a $\{\xi_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ véletlen függvény *realizációinak* tereként hivatkozni. Az $F : \omega \to u_\omega$ hozzárendelés Ω-nak egy leképezését eredményezi $\mathcal{U}$-ra. Az F indukál egy leképezést $\mathcal{U}$ és Ω részhalmazai között is. Tekintsük ezután $\mathcal{U}$ azon Λ' részhalmazainak $\mathcal{F}'$ összességét, amelyek ősképei $\mathcal{F}$-beli halmazok:

$$\Lambda' \in \mathcal{F}' \Leftrightarrow F^{-1}\Lambda' \in \mathcal{F}.$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{F}'$ σ-algebra. Legyen végül az $(\mathcal{U}, \mathcal{F}')$ mérhető téren $\mathbb{P}'$ a

$$\mathbb{P}'(\Lambda') = \mathbb{P}(F^{-1}\Lambda')$$

alapján értelmezett valószínűségi mérték. Ekkor az $(\mathcal{U}, \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ valószínűségi mezőn értelmezett

$$\xi'_\gamma(u) = u(\gamma), \qquad \gamma \in \Gamma,$$

kanonikus alakú véletlen függvény tágabb értelemben sztochasztikusan ekvivalens az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$-n adott $\{\xi_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ véletlen függvénnyel. Ehhez csupán azt kell észrevennünk, hogy $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ és $B^{(n)} \in \mathcal{X}^n$-re

$$F^{-1}\left\{u_\omega : (u_\omega(\gamma_1), \ldots, u_\omega(\gamma_n)) \in B^{(n)}\right\}$$
$$= \left\{\omega : (g(\gamma_1, \omega), \ldots, g(\gamma_n, \omega)) \in B^{(n)}\right\},$$

ami az értelmezések egyszerű következménye.

Szokás a tágabb értelemben sztochasztikusan ekvivalens véletlen függvények összességére tágabb értelemben vett sztochasztikus függvényként hivatkozni. Rátérünk most ez utóbbi pontos értelmezésére.

3.2. definíció. Legyen $\Gamma \neq \emptyset$ (tetszőleges paraméter) halmaz, $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér, s tetszőleges $\gamma_1, \ldots,\ \gamma_n \in \Gamma$ esetén legyen $\mathbb{P}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}$ valószínűségi mérték $\mathcal{X}^n$-en.

A $\{\mathbb{P}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n} : \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma\}$ eloszlássereget *tágabb értelemben vett véletlen függvénynek* nevezzük, ha kielégíti a (3.2), (3.3) kompatibilitási feltételeket.

A tágabb értelemben vett véletlen függvények jelölésére is használni fogjuk a korábbi $\{\xi_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ jelölést, bár jelen esetben az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőnek, s a rajta értelmezendő ξ_γ függvények alakjának (előírásának) nincs jelentősége, a folyamat alapvető, kimerítő jellemzése a véges dimenziós eloszlásain keresztül történik. Éppen ez a körülmény teszi szükségessé, hogy egy adott tágabb értelemben vett véletlen függvényhez egyszerű, kényelmesen kezelhető, eredeti értelemben vett véletlen függvény reprezentánst találjunk. Ezzel kapcsolatban mindenekelőtt felmerül a kérdés, hogy minden tágabb értelemben vett véletlen függvényhez lehet-e konstruálni ún. reprezentáns véletlen függvényt. A pontos kérdésfelvetés a következő.

Legyen adott az $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér n-szeres $(X^n, \mathcal{X}^n)$ szorzatain a

$$\{\mathbb{P}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n} : \gamma_i \in \Gamma\ (i = 1, \ldots, n)\} \tag{3.4}$$

eloszlássereg, ahol $\Gamma \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz. Kérdés, lehet-e konstruálni egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőt, s rajta megadni egy $\{\xi_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ véletlen függvényt úgy, hogy annak véges dimenziós eloszlásai (3.4)-gyel megegyezzenek:

$$\mathbb{P}\big(\{\omega : (\xi_{\gamma_1}(\omega), \ldots, \xi_{\gamma_n}(\omega)) \in B\}\big) = \mathbb{P}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}(B),$$
$$\gamma_i \in \Gamma,\ i = 1, \ldots, n;\ B \in \mathcal{X}^n.$$

Ahhoz, hogy e kérdésre pozitív legyen a felelet, mindenekelőtt szükséges, hogy az adott (3.4) eloszlássereg kielégítse a kompatibilitási feltételeket. Abban az esetben, ha a kérdésre pozitív a felelet, azt fogjuk mondani, hogy az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, s a rajta tekintett $\{\xi_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ véletlen függvény a (3.4) *eloszlássereg reprezentánsa.* A sztochasztikus folyamatok elméletében egyik legjelentősebb tétel az alábbi.

3.2. tétel (Kolmogorov-féle alaptétel). *Legyen X szeparábilis teljes metrikus tér, $\mathcal{X}$ az X tér Borel-halmazainak σ-algebrája, $\Gamma \neq \emptyset$ halmaz. Ekkor minden, a* (3.2) *és* (3.3) *kompatibilitási feltételeknek eleget tevő* (3.4) *eloszlásseregnek van reprezentása.*

A bizonyításhoz felhasználjuk a következő lemmát.

3.1. lemma. *Legyen X szeparábilis, teljes metrikus tér, $\mathcal{X}$ az X tér Borel-halmazainak σ-algebrája, $\mathbb{P}$ valószínűségi mérték az $(X, \mathcal{X})$ mérhető téren. Ekkor minden $B \in \mathcal{X}$ Borel-halmazhoz és tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $K_\varepsilon \subset B$ kompakt halmaz, melyre*

$$\mathbb{P}(B \setminus K_\epsilon) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Lásd I.I. Gihman – S.V. Szkorohod: Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975, 105. oldal. □

Bizonyítás. **A 3.2. tétel bizonyítása.** Legyen $(\Omega, \mathcal{F}) = \prod_{\gamma\in\Gamma}(X, \mathcal{X})$, ahol $\mathcal{F}$ az $\Omega = X^\Gamma$ tér cilinderhalmazai által generált σ-algebra. Ahhoz, hogy az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető téren definiáljunk egy $\mathbb{P}$ valószínűségi mértéket, először egy $\hat{\mathbb{P}}$ mértéket értelmezünk az Ω cilinderhalmazainak algebráján. Legyen

$$\hat{\mathbb{P}}\big(C_{\gamma_1,\dots,\gamma_n}(B^{(n)})\big) = \mathbb{P}_{\gamma_1,\dots,\gamma_n}(B^{(n)}),$$

ahol $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$, $B^{(n)} \in \mathcal{X}^n$. A kompatibilitási feltételek biztosítják $\hat{\mathbb{P}}$ definíciójának egyértelműségét. A $\hat{\mathbb{P}}$ végesen additív mérték a cilinderhalmazok algebráján. Ha a $\hat{\mathbb{P}}$ σ-additív mérték, akkor a mértékek kiterjesztési tétele értelmében egyértelműen kiterjeszthető az $\mathcal{F}$ σ-algebrára, s az így nyert mérték lesz az $(\Omega, \mathcal{F})$-n a $\mathbb{P}$ mérték.

Be kell látnunk tehát, hogy $\hat{\mathbb{P}}$ σ-additív, mely – a folytonossági tulajdonság alapján – ekvivalens azzal, hogy ha $\{C_n,\ n \geq 1\}$ monoton csökkenő cilinderhalmazok sorozata, amelyre

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset, \tag{3.5}$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\mathbb{P}}(C_n) = 0.$$

Indirekt tegyük fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\mathbb{P}}(C_n) = \varepsilon > 0. \tag{3.6}$$

A 3.1. Tétel bizonyításában szereplő meggondolásokra való tekintettel, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$C_n = C_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m_n}}(B_n),$$

ahol $B_n \in \mathcal{X}^{m_n}$, továbbá, ha $n_2 > n_1$, akkor a C_{n_2} koordinátái között a C_{n_1} koordinátái mind szerepelnek.

Az $(X^n, \mathcal{X}^n)$ mérhető téren $\mathbb{P}_{\gamma_1,\dots,\gamma_n}$ mérték rögzített $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ esetén. Az X^n tér szeparábilis teljes metrikus tér, mivel X az volt. Továbbá minden $B^{(n)} \in \mathcal{X}^n$ halmaz Borel-halmaz, ugyanis $\mathcal{X}^n$ az X^n halmaz Borel-halmazainak σ-algebrája. Ekkor a fenti lemma alapján, minden $B_n \in \mathcal{X}^{m_n}$-hez létezik olyan $K_n \subset X^{m_n}$ kompakt halmaz, melyre

$$K_n \subseteq B_n \quad \text{és} \quad \mathbb{P}_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m_n}}(B_n \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Legyen most

$$Q_n = C_{\gamma_1,\dots,\gamma_{m_n}}(K_n),$$

azaz a Q_n cilinderhalmaz alapja K_n, koordinátái $\gamma_1, \dots, \gamma_{m_n}$. Tekintsük a

$$G_n = \bigcap_{r=1}^{n} Q_r$$

cilinderhalmazok sorozatát. Jelölje M_n a G_n cilinderhalmaz alapját. Minthogy a Q_{n-1} $(n = 2, 3, \dots)$ cilinderhalmazok koordinátái szerepelnek a Q_n koordinátáit között, ezért

$$M_n = K_n \cap \left(K_{n-1} \times X^{m_n - m_{n-1}}\right) \cap \dots \cap \left(K_1 \times X^{m_n - m_1}\right).$$

Tehát K_n kompaktsága, továbbá a $K_i \times X^{m_n - m_i}$ $(i = 1, \dots, n-1)$ halmazok zártsága miatt M_n kompakt. Mivel G_n $(n = 1, 2, \dots)$ monoton csökkenő halmazsorozat, így ha $\omega \in G_{n+p}$ $(p > 0)$, akkor $\omega \in G_n$. Ebből következik, hogyha

$$(x_1, x_2, \dots, x_{m_n}, \dots x_{m_{n+p}}) \in M_{n+p}, \quad p > 0,$$

akkor

$$(x_1, x_2, \dots, x_{m_n}) \in M_n.$$

Továbbá, minthogy

$$C_n \setminus G_n = \bigcup_{r=1}^{n} (C_n \setminus Q_r) \subseteq \bigcup_{r=1}^{n} (C_r \setminus Q_r),$$

ezért

$$\hat{\mathbb{P}}(C_n \setminus G_n) \le \sum_{r=1}^{n} \hat{\mathbb{P}}(C_r \setminus Q_r) = \sum_{r=1}^{n} \mathbb{P}_{\gamma_1, \dots, \gamma_{m_r}}(B_r \setminus K_r) < \frac{\varepsilon}{2},$$

s ebből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\mathbb{P}}(G_n) = \lim_{n\to\infty} \hat{\mathbb{P}}(C_n) - \lim_{n\to\infty} \hat{\mathbb{P}}(C_n \setminus G_n) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tehát mivel a G_n cilinderhalmazok nem üresek, így mindegyik M_n halmazból kiválaszthatunk egy

$$\big(x_1^{(n)}, \dots, x_{m_n}^{(n)}\big) \in M_n$$

elemet. Tekintsük minden rögzített k-ra az $\{x_k^{(n)},\ n = n_0, n_0+1, \dots\}$ (ahol $n_0 = \min\{n : m_n \ge k\}$) sorozatot, mely X valamely kompakt halmazába tartozik, és

$$\big(x_1^{(n+p)}, \dots, x_{m_n}^{(n+p)}\big) \in M_n, \qquad p \ge 1.$$

A diagonális eljárással konstruálható olyan $n_1, \dots, n_j, \dots$ index sorozat, hogy minden rögzített k-ra az $\{x_k^{(n_j)},\ j = 1, 2, \dots\}$ részsorozat konvergens legyen, s határértékét jelöljük $x_k^{(0)}$-val. Az M_n kompaktsága miatt tetszőleges n esetén

$$\big(x_1^{(0)}, \dots, x_{m_n}^{(0)}\big) \in M_n.$$

Legyen $\gamma \in \Gamma$-ra

$$\omega(\gamma) = \begin{cases} x_k^{(0)}, & \text{ha } \gamma = \gamma_k \ (k = 1, \dots, m_n), \\ \text{teszőleges}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor tetszőleges n-re

$$\omega \in G_n \subseteq C_n\,.$$

Következésképpen $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, s ez ellentmond (3.5)-nek, így a (3.6) feltevés hibás.

Ezzel bizonyítottuk $\hat{\mathbb{P}}$ σ-additivitását, s így $\hat{\mathbb{P}}$ egyértelműen kiterjeszthető egy $\mathbb{P}$ valószínűségi mértékké az $\mathcal{F}$ σ-algebrán.

Legyen most $\gamma \in \Gamma$ esetén

$$\xi_\gamma(\omega) = \omega(\gamma), \qquad \omega \in \Omega.$$

Ekkor tetszőleges $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ és $B^{(n)} \in \mathcal{X}^n$ esetén

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\big(\{\omega : (\xi_{\gamma_1}(\omega), \dots, \xi_{\gamma_n}(\omega)) \in B^{(n)}\}\big) = \\ &\quad = \mathbb{P}\big(\{\omega : (\omega(\gamma_1), \dots, \omega(\gamma_n)) \in B^{(n)}\}\big) = \\ &\quad = \hat{\mathbb{P}}(C_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}(B^{(n)})) = \mathbb{P}_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}(B^{(n)}). \end{aligned}$$

A $\{\xi_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ véletlen függvény véges dimenziós eloszlásai éppen az adott (3.4) mértékek.

Konstruáltunk tehát a (3.4) eloszlássereghez egy reprezentánst, bebizonyítván ezáltal a 3.2. tétel állítását. □

A továbbiakban nagy mértékben használni fogjuk a véletlen függvények egy másik sztochasztikus ekvivalenciájának a fogalmát.

3.3. definíció. Két, közös fázisterű véletlen függvényt, $\{\xi_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$-t, és $\{\xi'_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$-t, melyek egy ugyanazon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn vannak értelmezve, *sztochasztikusan ekvivalensnek* mondunk, ha tetszőleges $\gamma \in \Gamma$-ra ξ_γ és ξ'_γ sztochasztikusan ekvivalens, azaz, ha minden $\gamma \in \Gamma$-ra

$$\mathbb{P}(\xi_\gamma = \xi'_\gamma) = 1.$$

Nyilvánvaló, hogy ha két véletlen függvény sztochasztikusan ekvivalens, akkor tágabb értelemben is sztochasztikusan ekvivalens.

A jövőben elsősorban olyan véletlen függvények vizsgálatával fogunk foglalkozni, amelyek paramétertere, Γ rendezett halmaz. Ilyen esetekben a véletlen függvényt *sztochasztikus folyamatnak* nevezik. Leggyakrabban a sztochasztikus folyamatok paramétertere a valós számoknak valamely részhalmaza, esetleg intervalluma. Az utóbbi esetben szokás a paraméterhalmazt időintervallumként interpretálni. Ha Γ legfeljebb megszámlálható és jól rendezett, akkor a sztochasztikus folyamat helyett szokás végtelen véletlen sorozatról beszélni. Ilyenkor a paraméterhalmaz rendszerint a $\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ nem negatív egész számok halmaza.

Megemlítjük még, hogy ha Γ csak részben rendezett, akkor *véletlen (sztochasztikus) mezőkről* szokás beszélni. Véletlen mezőkkel (bár mind elméleti, mind alkalmazási szempontból igen jelentősek) e jegyzetben nem fogunk foglalkozni.

Gauss-folyamatok

Mielőtt befejeznénk e fejezetet, ismertetünk egy konkrét, tágabb értelemben vett sztochasztikus folyamatot, amely igen fontos szerepet játszik mind elméleti, mind alkalmazási szempontból. A könnyebb érthetőség kedvéért előbb felidézünk a többdimenziós normális eloszlással kapcsolatos néhány fogalmat.

Legyen $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ valós komponensű véletlen vektor. A $\boldsymbol{\xi}$ vektort akkor mondjuk *normális eloszlásúnak*, ha komponenseinek tetszőleges $L = \sum_{i=1}^n c_i\xi_i$ lineáris függvénye (egydimenziós) normális eloszlású. Eszerint, ha $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ normális eloszlású vektor, akkor tetszőleges $L = \sum_{i=1}^n c_i\xi_i$-re

$$\mathbb{E}e^{ixL} = e^{i\mu x - \frac{\sigma^2}{2}x^2},$$

ahol, mint ismeretes,

$$\mu = \mathbb{E}(L), \quad \sigma^2 = \mathbb{D}^2(L).$$

Egyszerű számolások alapján

$$\mu = \sum_{i=1}^n c_i m_i, \quad \sigma^2 = (R\mathbf{c}, \mathbf{c}),$$

ahol

$$m_i = \mathbb{E}\xi_i, \quad \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n), \qquad R = (r_{ij}),$$

$$r_{ij} = \mathbb{E}(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j),$$

$$(R\mathbf{c}, \mathbf{c}) = \sum_{i,j=1}^n r_{ij}c_ic_j.$$

Az $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$ vektort $\boldsymbol{\xi}$ *várható érték vektorának*, az R mátrixot $\boldsymbol{\xi}$ *variancia mátrixának* (szórás mátrixának) nevezik.

Az $x = 1$ és $\mathbf{c} = \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ esetet tekintve megállapíthatjuk, hogy a $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ valószínűségi változó akkor és csak akkor normális eloszlású, ha a

$$\Psi(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{E}e^{i\sum_{j=1}^n t_j \xi_j} = \mathbb{E}e^{i(\mathbf{t}, \boldsymbol{\xi})}$$

karakterisztikus függvény

$$\Psi(t_1, \dots, t_n) = e^{i(\mathbf{m}, \mathbf{t}) - \frac{1}{2}(R\mathbf{t}, \mathbf{t})}$$

alakú, ahol $\mathbf{m}$ valós komponensű vektor, R pozitív szemidefinit, valós, szimmetrikus mátrix. Nyilvánvaló, hogy ekkor $\mathbf{m}$ a $\boldsymbol{\xi}$ várható érték vektora, R pedig a variancia mátrixa.

Az n-dimenziós $\mathbb{R}^n$ tér Borel-halmazainak $\mathcal{B}^n$ σ-algebráján adott $\mathbb{P}$ valószínűségi mértéket n-dimenziós normális eloszlásnak (*Gauss-mértéknek*) nevezzük, ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{t})} d\mathbb{P}(x) = e^{i(\mathbf{m}, \mathbf{t}) - \frac{1}{2}(\Lambda \mathbf{t}, \mathbf{t})},$$

ahol $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$, $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$ valós komponensű vektorok, Λ pozitív szemidefinit valós, szimmetrikus mátrix. Ismeretes, hogy ekkor az eloszlás sűrűségfüggvénye, hacsak az $A = \Lambda^{-1}$ létezik,

$$f(x; \mathbf{m}, \Lambda) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |A|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(A(\mathbf{x}-\mathbf{m}), \mathbf{x}-\mathbf{m})},$$

ahol $|A| = \det A$.

Legyenek $m : [a, b] \to \mathbb{R}$, $r : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ valós függvények, ahol $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Továbbá az r függvény legyen pozitív szemidefinit, azaz tetszőleges $a \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq b$ valós és $z_1, \dots z_n$ komplex számokra

$$\sum_{i,j=1}^n r(t_i, t_j) z_i \bar{z}_j \geq 0.$$

A

$$\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n}(B^{(n)}) = \int_{B^{(n)}} f(x, \mathbf{m}^{(n)}, \Lambda^{(n)}) dx,$$

$$\mathbf{m}^{(n)} = (m(t_1), \dots, m(t_n)), \quad \Lambda^{(n)} = \Big(r(t_i, t_j)\Big)_{i,j=1}^n, \tag{3.7}$$

eloszlássereget *normális eloszlásseregnek* nevezzük, melyről könnyen belátható, hogy kielégíti a kompatibilitási feltételeket.

Egy tágabb értelemben vett, az $[a, b]$ intervallummal mint paraméterrel rendelkező sztochasztikus folyamatot *Gauss-folyamatnak* nevezzük, ha (3.7) szerkezetű normális eloszlássereg jellemzi. Az m függvényt a folyamat *várható érték függvényének*, az r függvényt *kovariancia függvényének* szokás nevezni.

A $\{\xi_t,\ t \in [a, b]\}$ sztochasztikus folyamatot Gauss-folyamatnak hívjuk, ha véges dimenziós eloszlásai normálisak. Ez esetben a folyamat véges dimenziós eloszlásait egyértelműen meghatározza az $m(t) = \mathbb{E}\xi_t$ várható érték függvény és az $r(s, t) = \mathbb{E}\left(\xi_s - m(s)\right)\left(\xi_t - m(t)\right)$ kovariancia függvény.

4. fejezet

Markov folyamatok fogalma

Legyen $\{x_t,\ t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamat, melynek fázistere az egyszerűség kedvéért legyen az $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, ahol $\mathbb{R}$ a valós számhalmaz, $\mathcal{B}$ az $\mathbb{R}$ Borel-mérhető halmazainak σ-algebrája. Tetszőleges t-re tekintsük az

$$\mathcal{F}_t^x = \sigma\{x_s,\ s \leq t\}, \quad \mathcal{F}_{[t,\infty)}^x = \sigma\{x_s,\ s \geq t\}$$

σ-algebrákat. Az első σ-algebra elemeire úgy hivatkozhatunk, mint a folyamatnak a t-pillanatig tekintett *múltjával* kapcsolatos eseményekre, a második elemeit a folyamat t-pillanat utáni *jövőjében* lejátszódó események alkotják. Általában a folyamat „múltja” és „jövője” jelentős mértékben összefügg. Matematikailag ezt úgy fejezhetjük ki, hogy ha $A \in \mathcal{F}_t^x$ (ill. ha η_1 $\mathcal{F}_t^x$-mérhető) és $B \in \mathcal{F}_{[t,\infty)}^x$ (ill. ha η_2 $\mathcal{F}_{[t,\infty)}^x$-mérhető), akkor A és B (ill. η_1 és η_2) nem függetlenek. Azt is szoktuk mondani, hogy a „jövő” (sztochasztikus) függőségi viszonyban van a „múlttal”.

Sztochasztikus folyamatok egyik osztályozása jövőjük és múltjuk függőségi viszonyának specifikálásán keresztül történhet. A sztochasztikus folyamatok napjainkig kifejlődött elméletének jelentős része abból a feltételezésből indul ki, hogy a „múlt” a „jövőre” csak a jelenen keresztül hat. Mielőtt e függőségi viszonyt matematikailag megfogalmaznánk, megemlítjük, hogy a „múlt” és „jövő” ilyen függőségi kapcsolatára először a nagy orosz matematikusnak, A. Markovnak terjedt ki a figyelme. Bár az alábbiakban ismertetésre kerülő általános formában Markov még nem fogalmazhatta meg a tulajdonságot, de vitathatatlanul az ő érdeme, hogy ezen függőségi viszonyra épülve kifejlődött a sztochasztikus folyamatok egy osztályának az elmélete, mely Markov korában még nem is sejthető nagy szerepet játszik ma az elméleti kérdésekben, s talán még jelentősebbet a gyakorlatban, az alkalmazásokban. Méltán kapta e folyamatok osztálya a „Markov-folyamatok” elnevezést.

Legyen $\{x_t,\ t \geq 0\}$ (valós értékű) $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ fázisterű sztochasztikus folyamat az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn. Jelölje $\mathcal{F}_t^x$ a folyamat t-pillanatig terjedő múltjával, $\mathcal{F}_{[t,\infty)}^x$ a t-pillanat utáni jövőjével kapcsolatos események σ-algebráját. Az

$$\mathcal{F}_t^x = \sigma\{x_s,\ s \leq t\}$$

σ-algebrák monoton növekvő ($\mathcal{F}_{t_1}^x \subseteq \mathcal{F}_{t_2}^x,\ t_1 \leq t_2$), az

$$\mathcal{F}_{[t,\infty)}^x = \sigma\{x_s,\ s \geq t\}$$

σ-algebrák monoton csökkenő ($\mathcal{F}_{[t_1,\infty)}^x \supseteq \mathcal{F}_{[t_2,\infty)}^x,\ t_1 \leq t_2$) sereget alkotnak. Továbbá, tetszőleges $t \geq 0$-ra x_t mindig $\mathcal{F}_t^x$-mérhető valószínűségi változó.

Markov-tulajdonság, Markov-folyamat. Az $\{x_t,\ t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamatot Markov-folyamatnak nevezzük, ha teljesül rá az ún. Markov-tulajdonság: tetszőleges $t \geq 0$-ra az $\mathcal{F}_t^x$, $\mathcal{F}_{[t,\infty)}^x$ σ-algebrák (a “múlt" és a “jövő") az x_t-re vonatkozólag feltételesen függetlenek, azaz tetszőleges $A \in \mathcal{F}_t^x$ és $B \in \mathcal{F}_{[t,\infty)}^x$ eseményekre a

$$\mathbb{P}(A \cap B | x_t) = \mathbb{P}(A | x_t)\mathbb{P}(B | x_t) \tag{4.1}$$

egyenlőség 1 valószínűséggel teljesül.

Szokás a Markov-folyamatokat a következő kissé általánosabb formában értelmezni.

Az $\{x_t,\ t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamatot az $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ nem csökkenő σ-algebra seregre nézve Markov-folyamatnak nevezzük, ha minden $t \geq 0$-ra x_t $\mathcal{F}_t$-mérhető, és az $\mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}^x_{[t,\infty)}$ σ-algebrák x_t-re vonatkozólag *feltételesen függetlenek*, azaz, ha tetszőleges $A \in \mathcal{F}_t$ és $B \in \mathcal{F}^x_{[t,\infty)}$ eseményekre

$$\mathbb{P}(A \cap B|x_t) = \mathbb{P}(A|x_t)\mathbb{P}(B|x_t) \tag{4.1'}$$

majdnem mindenütt.

Elég könnyű verifikálni, hogy ha az $\{x_t,\ t \geq 0\}$ folyamat valamely $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ σ-algebra seregre nézve Markov-folyamat, akkor az eredeti (4.1) értelmében is Markov-folyamat.

A következő lemmák értelmében a Markov-tulajdonságra több, egymástól különböző módon hivatkozhatunk.

4.1. lemma. *A következő feltételek ekvivalensek:*

a) $\{x_t,\ t \geq 0\}$ *Markov-folyamat az* $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ *nem csökkenő σ-algebra seregre nézve;*

b) *minden $t \geq 0$-ra és $\mathcal{F}^x_{[t,\infty)}$-mérhető korlátos η valószínűségi változóra 1 valószínűséggel*

$$\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\eta|x_t); \tag{4.2}$$

c) *bármely $s \geq t$ és minden korlátos Borel-mérhető f függvényre 1 valószínűséggel*

$$\mathbb{E}(f(x_s)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(x_s)|x_t). \tag{4.3}$$

Bizonyítás. a) $\Longrightarrow$ b). Ehhez elegendő megmutatni, hogy az a) feltétel esetén (4.2) igaz minden olyan η-ra, amely valamely $\mathcal{F}^x_{[t,\infty)}$-beli halmaz indikátor függvénye. Legyen tehát $B \in \mathcal{F}^x_{[t,\infty)}$, $A \in \mathcal{F}_t$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{P}(A \cap B|x_t)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{P}(A|x_t)\mathbb{P}(B|x_t)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\chi_A|x_t) \cdot \mathbb{P}(B|x_t)\right) = \mathbb{E}\left(\chi_A \cdot \mathbb{P}(B|x_t)\right).
\end{aligned}$$

Másrészt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{E}(\chi_A \cdot \chi_B) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\chi_A \cdot \chi_B|\mathcal{F}_t)\right) = \mathbb{E}\left(\chi_A \cdot \mathbb{E}(\chi_B|\mathcal{F}_t)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\chi_A \cdot \mathbb{P}(B|\mathcal{F}_t)\right).
\end{aligned}$$

Következésképpen, minthogy $A \in \mathcal{F}_t$ tetszőleges,

$$\mathbb{P}(B|x_t) = \mathbb{P}(B|\mathcal{F}_t)$$

1 valószínűséggel, s ezt kellett belátnunk.

b) $\Longrightarrow$ a). Ha $A \in \mathcal{F}_t$ és $B \in \mathcal{F}^x_{[t,\infty)}$ akkor

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B|x_t) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{P}(A \cap B|\mathcal{F}_t)|x_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\chi_A \cdot \chi_B|\mathcal{F}_t)|x_t\right) = \mathbb{E}\left(\chi_A \cdot \mathbb{E}(\chi_B|\mathcal{F}_t)|x_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\chi_A \cdot \mathbb{P}(B|x_t)|x_t\right) = \mathbb{P}(B|x_t)\mathbb{P}(A|x_t).
\end{aligned}$$

A b)-t az utolsó előtti lépésben használtuk fel.

A b) $\Longleftrightarrow$ c) ekvivalencia igazolásához elegendő belátni, hogy c) $\Longrightarrow$ b), minthogy c) részesete b)-nek.

Legyen először $\eta = f_1(x_{s_1}) \cdots f_n(x_{s_n})$, ahol $t \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ és $f_1, \dots, f_n$ korlátos, Borel-mérhető függvények. Ilyen η-ra b)-t teljes indukcióval láthatjuk be.

$n = 1$-re az állítás igaz, minthogy ez éppen c)-t jelenti. Továbbá

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_{s_{n-1}})\big|\mathcal{F}_t\big) \\ &= \mathbb{E}\bigg(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(x_{s_i}) \cdot \mathbb{E}\big(f_n(x_{s_n})|\mathcal{F}_{s_{n-1}}\big)\bigg|\mathcal{F}_t\bigg) \\ &= \mathbb{E}\bigg(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(x_{s_i}) \cdot \mathbb{E}\big(f_n(x_{s_n})|x_{s_{n-1}}\big)\bigg|\mathcal{F}_t\bigg). \end{aligned}$$

Legyen ezután g olyan Borel-mérhető függvény, amelyre 1 valószínűséggel

$$\mathbb{E}\left(f_n(x_{s_n})|x_{s_{n-1}}\right) = g(x_{s_{n-1}}).$$

Ekkor az előző egyenlőségsorozat alapján, ha $f^*_{n-1}(x_{s_{n-1}}) = f_{n-1}(x_{s_{n-1}}) \cdot g(x_{s_{n-1}})$, akkor

$$\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\bigg(\prod_{i=1}^{n-2} f_i(x_{s_i}) \cdot f^*_{n-1}(x_{s_{n-1}})\bigg|\mathcal{F}_t\bigg).$$

Az indukciós feltevés alapján innen következik, hogy

$$\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\bigg(\prod_{i=1}^{n-2} f_i(x_{s_i}) \cdot f^*_{n-1}(x_{s_{n-1}})\bigg|x_t\bigg).$$

Azt kaptuk tehát, hogy az $\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_t)$ x_t-mérhető függvény. Minthogy az x_t által generált σ-algebra nem bővebb $\mathcal{F}_t$-nél, ezért $\mathbb{E}(\eta|\mathcal{F}_t)$ 1 valószínűséggel egyenlő $\mathbb{E}(\eta|x_t)$-vel.

Tetszőleges η-ra a bizonyítás határátmenet képzés segítségével végezhető el. □

4.2. lemma. *Az $\{x_t,\ t \geq 0\}$ folyamat akkor és csak akkor Markov-folyamat, ha bármely korlátos, mérhető f függvényre és tetszőleges*

$$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq t$$

sorozatra

$$\mathbb{E}(f(x_t)|x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = \mathbb{E}(f(x_t)|x_{t_n}). \tag{4.4}$$

Bizonyítás. Legyen $\{x_t,\ t \geq 0\}$ Markov-folyamat az $\{\mathcal{F}^x_t,\ t \geq 0\}$ σ-algebra rendszerre nézve. Ekkor (4.4) következik az 4.1. lemma b) állításából.

Igazoljuk a fordított állítást, azaz azt, hogy (4.4)-ből következik az

$$\mathbb{E}(f(x_t)|\mathcal{F}^x_s) = \mathbb{E}(f(x_t)|x_s)$$

egyenlőség 1 valószínűséggel való teljesülése, hacsak $t \geq s$. Világos, hogy ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\Lambda \in \mathcal{F}^x_s$-re az

$$\int_\Lambda f(x_t) d\mathbb{P} = \int_\Lambda \mathbb{E}(f(x_t)|x_s) d\mathbb{P} \tag{4.5}$$

egyenlőségnek kell teljesülni.

A (4.4) miatt (4.5) igaz bármely $\sigma(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ típusú σ-algebra — ahol $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq s$ — tetszőleges Λ elemére.

Másrészt (4.5) mindkét oldala az $\mathcal{F}^x_s$ σ-algebrán nem feltétlenül valószínűségi, de korlátos mértéket definiál, amelyek az említett halmazokon egybeesnek. Következésképpen egybe kell esniük a fenti halmazokat tartalmazó legszűkebb σ-algebrán, azaz $\mathcal{F}^x_s$-en. Ezzel a 4.2. lemmát is bebizonyítottuk. □

5. fejezet

Diszkrét idejű Markov-láncok

A Markov-lánc definíciója

E fejezetben a sztochasztikus folyamatok azon egyszerű osztályát fogjuk tanulmányozni, amikor mind a fázistér, mind az időpontok halmaza (paramétertér) diszkrét. Az egyszerűség kedvéért, az általánosság különösebb leszűkítése nélkül feltehetjük, hogy mind a fázisteret, mind az időpontok halmazát a nem negatív egész számok alkotják. Rendszerint a fázistér elemeit az i, j, k, l betűkkel, ill. ezek indexelt változataival fogjuk jelölni, míg az n, s, t, u betűk, s ezek indexeltjei, időpontokat fognak jelölni. Szokás a folyamatok említett osztályára *diszkrét idejű és diszkrét fázisterű* (állapotterű) sztochasztikus folyamatként hivatkozni.

Ha az ilyen folyamatok rendelkeznek a Markov-tulajdonsággal, akkor *diszkrét idejű Markov-láncról* fogunk beszélni. Megemlítjük, hogy a Markov-lánc elnevezés alapjában a Markov-tulajdonságára és az állapottér diszkrétségére utal. Mielőtt a részletesebb tárgyalást elkezdenénk, levezetjük az előző fejezet általános értelmezéseiből a Markov-láncok szokásos, egyszerű fogalmakra (közönséges feltételes valószínűségekre) épülő definícióját.

Legyen $\{\xi_n,\ n \geq 0\}$ nemnegatív egész értékű valószínűségi változók sorozata. Minthogy a fázistér diszkrét, ezért tetszőleges, a nemnegatív egészeken értelmezett f függvényre

$$f(\xi_n) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i)\chi_{\{\xi_n=i\}}.$$

Következésképpen $t > t_n > t_{n-1} > \cdots > t_1$-re az

$$\mathbb{E}(f(\xi_t)\,|\,\xi_{t_n}, \ldots \xi_{t_1})$$

feltételes várható értéket egyértelműen (1 valószínűséggel) meghatározzák a

$$\mathbb{P}(\xi_t = i\,|\,\xi_{t_n}, \ldots, \xi_{t_1})$$

feltételes valószínűségek. A 4. fejezet 4.2 lemmájának értelmében az, hogy $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$-ra teljesül a Markov-tulajdonság, ekvivalens azzal, hogy minden i-re és $t > t_n > t_{n-1} > \cdots > t_1 \geq 0$-ra 1 valószínűséggel

$$\mathbb{P}(\xi_t = i\,|\,\xi_{t_n}, \ldots, \xi_{t_1}) = \mathbb{P}(\xi_t = i\,|\,\xi_{t_n}). \tag{5.1}$$

Vegyük észre, hogy a $\xi_{t_n}, \ldots, \xi_{t_1}$ változók által kifeszített σ-algebra megegyezik a

$$\{\xi_{t_n} = i_n, \ldots, \xi_{t_1} = i_1\}, \qquad i_n \geq 0, \ldots, i_1 \geq 0,$$

eseményekből álló teljes eseményrendszert tartalmazó legszűkebb σ-algebrával. A 2. fejezetből tudjuk, hogy egy eseménynek az ilyen σ-algebrára vonatkoztatott feltételes valószínűségét egyértelműen meghatározzák a szóban forgó eseménynek a teljes eseményrendszer pozitív valószínűségű eseményeire vonatkoztatott közönséges feltételes valószínűségei.

Következésképpen, a Markov-lánc fogalma az alábbi egyszerűbb formában is megadható.

5.1. definíció. A $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ diszkrét fázisterű folyamat *Markov-lánc*, ha tetszőleges $t > t_n > t_{n-1} > \cdots > t_1 \geq 0$ időpillanatokra és olyan $i_n, i_{n-1}, \ldots, i_1$ állapotsorozatra, amelyre $\mathbb{P}(\xi_{t_n} = i_n, \ldots, \xi_{t_1} = i_1) > 0$, teljesül a

$$\mathbb{P}(\xi_t = i \,|\, \xi_{t_n} = i_n, \ldots, \xi_{t_1} = i_1) = \mathbb{P}(\xi_t = i \,|\, \xi_{t_n} = i_n) \tag{5.2}$$

egyenlőség.

5.1. megjegyzés. Vegyük észre, hogy itt és a megelőző következtetésekben nem használtuk ki az idő diszkrétségét. Valójában a fenti definíció folytonos és diszkrét idő esetére egyaránt megadja a Markov-láncok értelmezését.

Átmenetvalószínűségek

5.2. definíció. *Átmenetvalószínűségek.* Legyen az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn $\{\xi_n,\ n \geq 0\}$ diszkrét idejű Markov-lánc. A

$$p(n,i,j) = \mathbb{P}(\xi_n = j \,|\, \xi_{n-1} = i), \qquad n > 0;\ i,j \geq 0,$$

feltételes valószínűségeket a $\{\xi_n,\ n \geq 0\}$ lánc *átmenetvalószínűségeinek* nevezzük. Abban az esetben, amikor a $p(n,i,j)$ átmenetvalószínűségek az n-időpillanattól függetlenek, *homogén Markov-láncról* beszélünk. Ekkor az egyszerűbb

$$p_{ij} = \mathbb{P}(\xi_n = j \,|\, \xi_{n-1} = i)$$

jelölést fogjuk használni.

Mind elméleti, mind alkalmazási szempontból elsősorban a homogén Markov-láncok felé irányul nagyobb érdeklődés. **A homogenitást a továbbiakban mindig feltételezzük**, s ezt nem fogjuk külön hangsúlyozni.

5.3. definíció. Az átmenetvalószínűségek $P = (p_{ij})$ mátrixát a lánc *átmenetvalószínűségi mátrixának* nevezzük. A lánc $n = 0$ pillanatbeli $\{p_i = \mathbb{P}(\xi_0 = i),\ i \geq 0\}$ eloszlását *kezdeti eloszlásnak* fogjuk nevezni.

A kezdeti eloszlás és az átmenetvalószínűségek kielégítik az alábbi feltételeket:

$$\begin{aligned} &\text{minden} \quad i \geq 0\text{-ra} \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1; \\ &\text{minden} \quad i,j \geq 0\text{-ra} \quad p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

A kezdeti eloszlás és az átmenetvalószínűségek segítségével felírhatók a lánc véges dimenziós eloszlásai. Valóban, tetszőleges $n \geq 0$-ra és $i_0, \ldots, i_n$ állapotsorozatra

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\xi_0 = i_0,\ \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n) \\ &\quad = \mathbb{P}(\xi_0 = i_0) \prod_{t=1}^{n} \mathbb{P}(\xi_t = i_t | \xi_{t-1} = i_{t-1}) \\ &\quad = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}. \end{aligned}$$

Az általánosabb alakú

$$\Big\{ \mathbb{P}(\xi_{t_1} = i_1,\ \xi_{t_2} = i_2, \ldots, \xi_{t_n} = i_n), \qquad n \geq 1;\ i_1 \geq 0, \ldots, i_n \geq 0, \\ 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \Big\} \tag{5.4}$$

véges dimenziós eloszlások felírhatók az előzőek megfelelő összegeiként.

Megállapíthatjuk tehát, hogy az (5.3) feltételnek eleget tevő kezdeti eloszlás és átmenetvalószínűségek segítségével képezhetők az (5.4) véges dimenziós eloszlások, melyek kielégítik a kompatibilitási feltételeket. Másszóval az (5.3) feltételeket kielégítő kezdeti eloszlás és átmenetvalószínűségi mátrix segítségével értelmezhető egy diszkrét idejű és diszkrét állapotterű tágabb értelemben vett sztochasztikus folyamat, melyet szokás tágabb értelemben vett Markov-láncnak nevezni.

Önkéntelenül felvetődik a kérdés, vajon létezik-e minden tágabb értelemben vett Markov-láncnak reprezentánsa.

A kérdésre az alábbi tétel ad pozitív választ.

5.1. tétel (egzisztencia tétel). *Legyen $\{p_i,\ i \geq 0\}$ olyan valós számsorozat és $P = (p_{ij})$ olyan valós elemű mátrix, amelyek eleget tesznek az* (5.3) *feltételnek. Ekkor létezik olyan $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és rajta egy $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ Markov-lánc, melynek kezdeti eloszlása $\{p_i,\ i \geq 0\}$, átmenetvalószínűségi mátrixa pedig $P = (p_{ij})$.*

E tétel bizonyítása a 3. fejezet 3.2 tételének igazolásakor alkalmazott konstrukció egyszerűbb változatának segítségével történhet. A bizonyítást mellőzzük, az megtalálható [**1**]-ben.

Bevezetjük most az *n-lépéses $p_{ij}^{(n)}$ átmenetvalószínűségeket.* Legyen

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ 1, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

Továbbá legyen $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$, míg $n \geq 1$-re legyen

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}. \tag{5.5}$$

Az elnevezés eredetét illetően bebizonyítjuk, hogy

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(\xi_{\nu+n} = j \mid \xi_\nu = i), \tag{5.6}$$

ahol ν tetszőleges nemnegatív egész szám. $n = 1$-re állításunk az átmenetvalószínűségek értelmezéséből következik. Feltéve most, hogy (5.6) minden $i, j \geq 0$-ra érvényes, az (5.2) Markov-tulajdonság felhasználásával az alábbi egyenlőségsorozathoz jutunk.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_{\nu+n+1} = j \mid \xi_\nu = i) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_{\nu+n} = k,\ \xi_{\nu+n+1} = j \mid \xi_\nu = i) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_{\nu+n} = k \mid \xi_\nu = i)\, \mathbb{P}(\xi_{\nu+n+1} = j \mid \xi_{\nu+n} = k,\ \xi_\nu = i) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_{\nu+n} = k | \xi_\nu = i)\, \mathbb{P}(\xi_{\nu+n+1} = j \mid \xi_{\nu+n} = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = p_{ij}^{(n+1)}.
\end{aligned}$$

Ezzel állításunkat n-re vonatkozó teljes indukcióval igazoltuk.

(5.5) általánosítása a következő egyenlőség: tetszőleges n és m, ill. i és j nem negatív egészekre

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}. \tag{5.7}$$

Ez az azonosság azzal a ténnyel kapcsolatos, hogy a Markov-lánc egy i állapotból valamely j állapotba $n+m$ lépés után úgy juthat el, hogy elindulva az i állapotból az n-edik lépés után valamelyik, mondjuk a k-adik állapotba jut, majd az ezt követő m-edik lépés befejeztével a lánc a j-edik állapotba kerül. Az azonosság egzakt bizonyítása történhet például m-re vonatkozó teljes indukcióval.

Az (5.7) azonosságot *Chapman-Kolmogorov-egyenletnek* szokás nevezni, és ez szolgáltat alapot a mátrix-elméletnek a Markov-láncok elméletében való alkalmazására. Világosabbá válik majd mindez a következő megjegyzéseink után.

Egy négyzetes (véges vagy megszámlálható rendű) mátrixot, mely eleget tesz az (5.3) második sorában szereplő feltételeknek, *sztochasztikus mátrixnak* nevezzük. Ha adott két sztochasztikus mátrix, $A = (a_{ij})$ és $B = (b_{ij})$, akkor a

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} b_{kj} \tag{5.8}$$

formulával értelmezett $C = (c_{ij})$ mátrix is sztochasztikus. Egy Markov-lánc átmenetvalószínűségi mátrixa sztochasztikus, s az előző megjegyzésünk értelmében tetszőleges n lépéses átmenetvalószínűségi mátrix is sztochasztikus. Az (5.5), illetve az (5.7) azonosságok azt fejezik ki, hogy az n lépéses átmeneti valószínűségek mátrixa az (egylépéses) átmeneti valószínűségek mátrixának n-edik hatványa, azaz

$$(p_{ij}^{(n)}) = (p_{ij})^n.$$

A Markov-láncokkal kapcsolatos további vizsgálatainkat mi nem mátrix-elméleti módszerekkel fogjuk folytatni. Ennek bizonyos mértékig az az oka, hogy a mátrix-elméleti tárgyalás korlátozza a szemléletes valószínűség-elméleti meggondolásokat, s gyakran elég nehezen áttekinthető számolásokat igényel. Meg kell említenünk azonban, hogy bizonyos aszimptotikus felbontásokkal kapcsolatos eredményeket ezideig csak mátrix-elméleti úton sikerült nyerni. Továbbá, a Markov-láncok (pontosabban sztochasztikus folyamatok) irányításának az utóbbi évek folyamán fejlődésnek indult elméletében is jelentős szerepet kap ez a módszer.

Tekintsük most még az ún. *abszolút valószínűségeket*. Ezek a láncnak az n-edik ($n > 0$) pillanatbeli eloszlását írják le, s a kezdeti és az n lépéses átmenetvalószínűségekkel az alábbi módon fejezhetők ki:

$$q_k^{(n)} = \mathbb{P}(\xi_n = k) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j p_{jk}^{(n)}. \tag{5.9}$$

A Markov-láncok legfontosabb tulajdonságai a $p_{ij}^{(n)}$ valószínűségek viselkedésével kapcsolatosak $n \to \infty$ esetén. Szemléletesen azt lehetne várni, hogy a Markov-lánc kezdeti állapota az idő növekedése folyamán elveszti befolyását, ezért az abszolút és átmeneti valószínűségek a kezdeti állapottól független közös határértékhez tartanak. Látni fogjuk, hogy ez igen sok esetben így is van, s az alkalmazások szempontjából ezek az esetek a legfontosabbak. Mielőtt azonban a kérdés részletesebb elemzésébe bocsátkoznánk, az olvasó figyelmébe ajánljuk az alábbi példákat, amelyek elősegítik az eddig tárgyaltak könnyebb megértését, elmélyítését.

Példák

I. **Elnyelő határfalú véletlen bolyongás**. Tekintsünk egy részecskét, mely a $0, 1, \ldots, N$ pontokban véletlen bolyongást végez oly módon, hogy bármely $0 < k < N$ pontból a következő lépés során p valószínűséggel jut a $k+1$ pontba, $q = 1 - p$ valószínűséggel pedig a $k-1$ pontba. Ha viszont a részecske eléri a 0 vagy az N pontot, akkor ezekből már más pontokba nem mehet át, és azt mondjuk, hogy a részecske elnyelődik. A 0 és az N pontokat elnyelő falaknak, elnyelő állapotoknak nevezzük.

Jelölje ξ_n a részecske helyzetét az n-edik pillanatban. A $\{\xi_n,\ n \geq 0\}$ valószínűségi változók sorozata Markov-láncot alkot, amelynek állapothalmaza a $0, 1, \ldots, N$ számokból álló véges halmaz. A lánc átmenetvalószínűségi mátrixa az alábbi szerkezetű:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & & & \\ q & 0 & p & 0 & \ddots & & & \\ 0 & q & 0 & p & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ldots & 0 & q & 0 & p \\ & & & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. **Ciklikus véletlen bolyongás**. Az előző példában szereplő részecske véletlen bolyongását módosítsuk úgy, hogy eltekintünk az elnyelő pontoktól. Pontosabban, szüntessük meg a 0 és az N pontok elnyelő jellegét azáltal, hogy ezeket a pontokat szomszédosaknak tételezzük fel, megengedve, hogy a részecske a 0 pontból q valószínűséggel az N pontba, p valószínűséggel az 1 pontba, míg az N pontból megfelelően p, illetve q valószínűségekkel a 0, illetve $N-1$ pontba menjen át. A részecske ún. ciklikus véletlen bolyongását leíró Markov-lánc átmeneti valószínűségeinek mátrixát az előző példában szereplő mátrixból úgy kapjuk, hogy annak első sorát a $0, p, 0, \ldots, 0, q$ sorral, az utolsót pedig a $p, 0, \ldots, 0, q, 0$ sorral helyettesítjük.

III. **Egy telefonforgalmi probléma**. Tekintsünk egy m csatornás telefonközpontot, melybe a hívások a $t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \ldots$ véletlen időpontokban érkeznek be. Egy hívás csak akkor marad a központban, ha beérkezésének pillanatában van szabad csatorna, melyen keresztül elkezdődhet a beszélgetés. Minden más esetben elvész a hívás. Az egyes hívások beszélgetési ideje legyen valószínűségi változó, s jelöljük őket $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$-nel. Feltesszük, hogy az η_i-k függetlenek és azonos μ paraméterű exponenciális eloszlásúak, azaz minden $i \geq 0$-ra

$$\mathbb{P}(\xi_i < x) = 1 - e^{-\mu x} \qquad (x \geq 0).$$

Az egyes hívások beérkezése közti időtartamokról, azaz a $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ $(i \geq 1)$ sorozat elemeiről tegyük fel, hogy függetlenek és azonos $F(x)$ eloszlású valószínűségi változók. Ekkor, ha ξ_n jelenti az n-edik hívás beérkezésének pillanatában (azaz a t_n pillanatban) a foglalt vonalak számát, akkor a $\{\xi_n,\ n \geq 0\}$ sorozat homogén Markov-lánc.

Annak, hogy a beszélgetési idők exponenciális eloszlásúak, lényeges szerepe van problémánkban. Ezen feltevés nélkül a $\{\xi_n,\ n \geq 0\}$ sorozat nem rendelkezhetne a Markov-tulajdonsággal. Legyen ugyanis a t_n pillanatban a központ m csatornája közül $1 \leq k \leq m$ csatorna foglalt. Ezek a csatornák már bizonyos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ideje foglaltak. Mi viszont ezeket az időket nem ismerjük, ezért az általános esetben nem tudjuk megadni annak a valószínűségét, hogy egy csatorna a következő hívás beérkezéséig felszabadul-e vagy sem. Ha viszont a beszélgetési idők exponenciális eloszlásúak, akkor az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ időtartamok nincsenek befolyással a csatornák további foglaltságára. Bebizonyítjuk ugyanis az exponenciális eloszlás ún. örökifjú tulajdonságát, melyet a beszélgetési időtartam nyelvén a következőképpen fogalmazhatunk meg: ha egy beszélgetési idő elért már bizonyos t értéket, akkor a további időtartamának eloszlása független a t értéktől, s ismét exponenciális lesz.

Legyen tehát η egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó:

$$\mathbb{P}(\eta < x) = 1 - e^{-\mu x}, \qquad x \geq 0.$$

Be kell látnunk, hogy

$$\mathbb{P}(\eta < t + x \,|\, \eta \geq t) = 1 - e^{-\mu x}.$$

A feltételes valószínűség értelmezése szerint

$$\mathbb{P}(\eta < t + x \,|\, \eta \geq t) = \frac{\mathbb{P}(t \leq \eta < t + x)}{\mathbb{P}(\eta \geq t)}.$$

A számlálóban szereplő valószínűség $1-e^{-\mu(t+x)} - (1-e^{-\mu t}) = e^{-\mu t}(1-e^{-\mu x})$, a nevezőben szereplő pedig $e^{-\mu t}$. Egyszerűsítve $e^{-\mu t}$–vel, állításunk igazolást nyert.

Határozzuk most meg a $\{\xi_n,\ n \geq 0\}$ lánc átmenetvalószínűségeit. Megjegyezzük, hogy a lánc állapothalmazát a $0, 1, \ldots, m$ egész számok alkotják. Ha $\xi_n = k$ $(0 \leq k < m)$, akkor ξ_{n+1} lehetséges értékei $k+1$ (az n-edik beérkezett hívás lefoglal egy vonalat, s a következő hívás beérkezéséig nem szabadul fel vonal); $k, k-1, \ldots, 1, 0$ (az n-edik beérkezett hívás lefoglal egy vonalat, s a következő hívás beérkezésig a foglalt vonalak közül $1, 2, \ldots, k, k+1$ vonal felszabadul). Tegyük fel most, hogy az n-edik hívás után az $n+1$-edik hívás x idő múlva érkezik be, azaz, hogy $\tau_{n+1} = t_{n+1} - t_n = x$, és határozzuk meg a

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} = j \,|\, \xi_n = i,\ \tau_{n+1} = x) = p_{ij}(x), \qquad 0 \leq i \leq m,$$

feltételes valószínűségeket. Legyen $0 \leq i < m$, ekkor az előbb mondottak értelmében

$$p_{ij}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } j > i+1, \\ \binom{i+1}{j}(1 - e^{-\mu x})^{i+1-j}(e^{-\mu x})^j, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen most $i = m$. Ekkor a t_n pillanatban beérkező hívás elvész (ξ_{n+1} maximális értéke csak m lehet). Az előzőekhez hasonlóan:

$$p_{mj}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } j > m, \\ \binom{m}{j}(1 - e^{-\mu x})^{m-j}(e^{-\mu x})^j, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Alkalmazva ezek után a teljes valószínűség tételét, a $\{\xi_n,\ n \geq 0\}$ Markov-lánc átmenetvalószínűségeit a

$$p_{ij} = \int_0^\infty p_{ij}(x) dF(x)$$

formula alapján határozhatjuk meg.

Az állapotok osztályozása

Bevezetjük az állapotoknak egy osztályozását, melynek segítségével könnyen körülírhatjuk azokat a feltételeket, amelyek biztosítják, hogy a $p_{jk}^{(n)}$ mennyiségek $n \to \infty$ esetén a j állapottól független határértékhez tartsanak.

5.4. definíció. Ha egy j állapotba bizonyos idő múltán eljuthatunk az i állapotból, azaz ha valamely $n \geq 1$-re $p_{ij}^{(n)} > 0$, akkor j-t az i-ből *elérhetőnek* mondjuk. Erre a kapcsolatra az $i \rightharpoonup j$ jelölést fogjuk használni. Előfordulhat, hogy $i \rightharpoonup j$-vel együtt $j \rightharpoonup i$ is fennáll. Ez esetben azt fogjuk mondani, hogy az i, j állapotok egymásból *kölcsönösen elérhetők*. Ennek jelölésére az $i \rightleftharpoons j$ jelölést vezetjük be.

Tehát az $i \rightleftharpoons j$ reláció akkor és csak akkor áll fenn, ha léteznek olyan $n, m > 0$ egész számok, hogy mind $p_{ij}^{(n)} > 0$, mind $p_{ji}^{(m)} > 0$.

A $\rightleftharpoons$ reláció szimmetrikus. Ez a definícióból következik. Az, hogy ez a reláció tranzitív is, abból következik, hogy már a $\rightharpoonup$ reláció tranzitív. Ugyanis, ha $i \rightharpoonup j$ és $j \rightharpoonup k$, akkor léteznek olyan $n, m > 0$ egész számok, amelyekre $p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$. Viszont az (5.7) azonosság alapján

$$p_{ik}^{(n+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0,$$

azaz $i \rightharpoonup k$. A $\rightleftharpoons$ reláció nem feltétlenül reflexív. A reflexivitás csak azokra az állapotokra érvényes, amelyekre vagy $p_{ii} > 0$, vagy amelyekbe vissza lehet jutni.

A $\rightleftharpoons$ reláció szimmetrikus és tranzitív volta lehetővé teszi, hogy az állapotok terét diszjunkt halmazok uniójára, ún. osztályokra bontsuk. Két állapotot, i-t és j-t akkor sorolunk ugyanazon osztályba, ha $i \rightleftharpoons j$, továbbá minden olyan i állapot, amelyre $i \rightleftharpoons j$ semmilyen j-re sem teljesül, külön osztályt alkot.

A következőkben bizonyos tulajdonságokat fogunk értelmezni az állapotokra. Egy tulajdonságot, amely olyan, hogy ha valamely állapot rendelkezik vele, akkor ezen állapotot tartalmazó osztály bármely tagja is rendelkezik vele, *osztálytulajdonságnak* fogjuk nevezni. Ha egy tulajdonsággal az összes állapot rendelkezik, akkor azt mondjuk, hogy a Markov-lánc rendelkezik az adott tulajdonsággal.

5.5. definíció. Egy i állapotot, amelyre $i \rightharpoonup j$-ből $j \rightharpoonup i$ következik, azaz a belőle elérhető állapotokból vissza lehet jutni önmagába, *lényeges állapotnak* nevezzük. Ellenkező esetben *lényegtelen állapotról* beszélünk. Tehát az i lényegtelen állapot, ha létezik olyan j, hogy $i \rightharpoonup j$, de $j \rightharpoonup i$ nem teljesül.

5.2. tétel. *Lényegtelen állapot nem érhető el lényeges állapotból.*

Bizonyítás. A bizonyítás indirekt módon történhet. Tegyük fel, hogy az i lényeges állapotból elérhető a j lényegtelen állapot, továbbá k legyen tetszőleges, a j-ből elérhető állapot. Ekkor $i \rightharpoonup j$ és $j \rightharpoonup k$-ból következik, hogy $i \rightharpoonup k$. Minthogy i lényeges állapot, ezért $k \rightharpoonup i$ is fennáll. A $k \rightharpoonup i$, $i \rightharpoonup j$ relációk fennállásából következik, hogy $j \rightharpoonup k$-val egyidejűleg $k \rightharpoonup j$ is érvényes, ami viszont ellentmond annak, hogy j lényegtelen állapot. □

5.1. következmény. Az állapotok „lényeges" (vagy „lényegtelen") tulajdonsága osztálytulajdonság.

Tekintsük a előző I. példát. Ha $0 < k < N$, akkor a k állapotba pozitív valószínűséggel visszajuthatunk, azaz valamilyen $n \geq 1$-re $p_{kk}^{(n)} > 0$. Ha szemügyre vesszük e példa átmenetvalószínűségi mátrixát, akkor azt tapasztaljuk, hogy $p_{kk}^{(n)} > 0$ csak páros n-ekre teljesülhet. Azt mondjuk ilyenkor, hogy a $0 < k < N$ állapotok periodikusak, s periódusuk 2.

5.6. definíció. Legyen i egy Markov-lánc olyan állapota, amelybe pozitív valószínűséggel vissza lehet jutni, azaz legyen $p_{ii}^{(n)} > 0$ bizonyos $n > 0$-ákra. Ezen n számok legnagyobb közös osztóját az *i állapot periódusának* nevezzük, és d_i-vel jelöljük. Ha $d_i = 1$, akkor az i állapotot *aperiodikusnak* nevezzük.

5.3. tétel. *Egy osztályon belül minden állapot ugyanazon periódussal rendelkezik.*

Bizonyítás. Legyen $i \rightleftharpoons j$, azaz i, j legyenek egy osztályba tartozók. Ekkor léteznek olyan m, n pozitív egész számok, amelyekre $p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(n)} > 0$. Ha most $p_{ii}^{(s)} > 0$, akkor

$$p_{jj}^{(n+s+m)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(s)} p_{ij}^{(m)} > 0.$$

Mivel $p_{ii}^{(2s)} > 0$, ezért az előzőhöz hasonlóan nyerjük, hogy $p_{jj}^{(n+2s+m)} > 0$. Következésképpen d_j osztója mind $n+s+m$-nek, mind $n+2s+m$-nek. De ekkor kell, hogy osztója legyen e két szám különbségének is, azaz s-nek. Viszont s lehet bármilyen pozitív egész szám, amelyre $p_{ii}^{(s)} > 0$. Innen következik, hogy d_j osztója d_i-nek. Vegyük most észre, hogy i és j szerepe felcserélhető az előbbi érvelésben. Így arra jutunk, hogy d_i osztója d_j-nek, s innen már következik állításunk. □

A 5.3. tétel állítását úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a „d-periodicitás" osztálytulajdonság.

5.7. definíció. Azt fogjuk mondani, hogy az állapotoknak egy A halmaza *zárt*, ha bármely $i \in A$-ra

$$\sum_{j \in A} p_{ij} = 1.$$

Innen az is következik, hogy $n \geq 1$ esetén

$$\sum_{j \in A} p_{ij}^{(n)} = 1$$

érvényes. Egy A zárt halmazt *minimálisnak* mondunk, ha nincs valódi zárt részhalmaza. Megjegyezzük, hogy a teljes állapottér zárt halmazt alkot. Ha egy láncnak az állapotok egész terén kívül nincs más zárt halmaza, azaz, ha az állapottér minimális zárt halmaz, akkor a láncot *irreducibilisnek* nevezzük, míg ellenkező esetben *reducibilisnek.*

Az értelmezésekből könnyen belátható, hogy minden lényeges osztály minimális zárt halmazt alkot, és hogy lényegtelen osztály nem lehet zárt halmaz. Az elmondottakból következik az alábbi tétel.

Irreducibilitási kritérium. Egy Markov-lánc akkor és csak akkor irreducibilis, ha az állapottere egy lényeges osztályt alkot, azaz, ha minden állapota elérhető a lánc minden állapotából.

Legyen A egy lánc lényeges osztálya. Rendezzük az állapotokat úgy, hogy az A-ba tartozó állapotok mind megelőzzék az A-ba nem tartozókat. Ekkor, ha tekintjük a lánc átmenetvalószínűségi mátrixának az A halmazra való korlátozását, azaz a

$$(p_{ij}), \qquad i,j \in \{0,1,2,\dots\},$$

mátrix helyett csak a

$$(p_{ij}), \qquad i,j \in A \subset \{0,1,2,\dots\},$$

mátrixot, akkor ezen utóbbi mátrix is sztochasztikus. Minden $i,j \in A$-ra a $p_{ij}^{(n)}$ átmenetvalószínűség $n \to \infty$ melletti viselkedésnek tanulmányozásához elegendő ezen szűkített mátrix vizsgálata. Ha most egy lánc több lényeges osztályból áll, akkor az átmenetvalószínűségi mátrixa az állapotoknak megfelelő átrendezése után

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 & \\ 0 & P_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

alakra hozható, ahol a fődiagonálisban szereplő nem azonosan zérus elemű P_i-k az egyes lényeges osztályoknak megfelelő sztochasztikus mátrixok. A legáltalánosabb esetben, amikor egy láncnak lényegtelen állapotai is vannak, az átmenetvalószínűségi mátrix

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 & & \\ 0 & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & R & & \end{pmatrix}$$

alakra hozható, ahol R elemei azon i, j párokhoz tartozó átmeneti valószínűségek, amelyekre $i \notin \cup A_k$, $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ (a lényeges osztályokat A_k-kal jelöltük).

Visszatérőség

5.8. definíció. Vezessük most be a következő valószínűségeket: $f_{ij}^{(n)}$ jelentse annak a valószínűségét, hogy a lánc az i állapotból kiindulva pontosan n lépés múlva jut először a j állapotba. Ha $j = i$, akkor $f_{ii}^{(n)}$ annak a valószínűsége, hogy a lánc az i állapotba először n lépés után tér vissza.

g_{ij}-vel jelöljük annak a valószínűségét, hogy a lánc az i állapotból kiindulva végtelen sokszor tér vissza a j állapotba.

Ezeket a valószínűségeket a következőképpen írhatjuk fel tömörebb jelöléssel. Legyen $\{\xi_n,\ n \geq 0\}$ Markov-lánc, s legyen az $\{\omega : \xi_0(\omega) = i\}$ halmaz valószínűsége pozitív: $\mathbb{P}(\xi_0 = i) > 0$. Ekkor

$$f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(\xi_t \neq j, \quad 1 \leq t < n, \quad \xi_n = j \,|\, \xi_0 = i),$$

$$g_{ij} = \mathbb{P}(\xi_n = j \text{ végtelen sok } n \geq 1\text{-re} \,|\, \xi_0 = i).$$

5.9. definíció. Használni fogjuk még a továbbiakban az

$$f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

mennyiséget, amely annak a valószínűségét jelenti, hogy az i állapotból kiindulva a lánc előbb vagy utóbb bekerül a j állapotba:

$$f_{ij}^* = \mathbb{P}(\xi_n = j \text{ legalább egy } n \geq 1\text{-re} \,|\, \xi_0 = i).$$

Megmutatjuk, hogy

$$g_{ij} = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(\xi_n = j \text{ legalább egy } n \geq m\text{-re} \,|\, \xi_0 = i). \tag{5.10}$$

Legyen

$$\Omega(j) = \{\omega : \xi_n(\omega) = j \text{ végtelen sok } n \geq 1\text{-re}\},$$

$$\Omega_m(j) = \{\omega : \xi_n(\omega) = j \text{ legalább egy } n \geq m\text{-re}\}.$$

Ekkor $\Omega(j) \subset \Omega_{m+1}(j) \subset \Omega_m(j)$ és $\Omega(j) = \bigcap_m \Omega_m(j)$. A mértékelméletből ismeretes, hogy ekkor $\mathbb{P}(\Omega(j)) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(\Omega_m(j))$, s éppen ezt kellett belátnunk. [1]

(5.10) ekvivalens a

$$g_{ij} = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(m)} f_{kj}^*$$

relációval.

[1] Valójában a mérték (a valószínűség) folytonosságát itt a $\mathbb{P}(\cdot \,|\, \xi_0 = i)$ feltételes valószínűségre kell alkalmaznunk. Azonban rögzített feltétel esetén a feltételes valószínűség rendelkezik a valószínűség tulajdonságaival.

5.4. tétel. *Az* $i \rightharpoonup j$ reláció *akkor és csak akkor* teljesül, *ha* $f_{ij}^* > 0$. *Az* $i \rightleftharpoons j$ reláció *akkor és csak akkor* teljesül, *ha* $f_{ij}^* f_{ji}^* > 0$.

Bizonyítás. A bizonyítás a

$$\sup_n p_{ij}^{(n)} \le f_{ij}^* \le \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

egyenlőtlenségekre való hivatkozással történhet. □

5.10. definíció. Egy i állapotot *visszatérőnek* mondunk, ha $f_{ii}^* = 1$ (az $f_{ii}^* < 1$ esetén az i állapotot *nem visszatérőnek* nevezzük.)

5.5. tétel. *Bármely* i *esetén*

$$g_{ij} = \begin{cases} f_{ij}^*, & \text{ha } j \text{ visszatérő,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen $m \ge 1$ és

$$g_{ij}(m) = \mathbb{P}(\xi_n = j \text{ legalább } m \text{ darab } n > 0 \text{ értékre} \mid \xi_0 = i).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} g_{ij}&(m+1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\big(\xi_\nu \ne j\ (1 \le \nu < n),\ \xi_n = j,\ \xi_{n+k} = j \\ &\qquad\qquad \text{legalább } m \text{ darab } k \text{ értékre} \mid \xi_0 = i\big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_{n+k} = j \text{ legalább } m \text{ darab } k > 0 \text{ értékre} \mid \xi_n = j) \\ &\qquad\qquad \times \mathbb{P}(\xi_\nu \ne j\ (1 \le \nu < n),\ \xi_n = j \mid \xi_0 = i) \\ &= f_{ij}^* g_{jj}(m). \end{aligned}$$

Minthogy $g_{ij}(1) = f_{ij}^*$, ezért az utolsó egyenlőségből m-re vonatkozó teljes indukcióval arra következtethetünk, hogy

$$g_{ij}(m+1) = f_{ij}^* (f_{jj}^*)^m.$$

Figyelembe véve, hogy $g_{ij} = \lim_{m\to\infty} g_{ij}(m)$, az 5.5. tétel állítása innen közvetlenül leolvasható. □

5.2. következmény. (a) A fenti

$$g_{ij}(m+1) = f_{ij}^* g_{jj}(m)$$

egyenlőségből

$$g_{ij} = f_{ij}^* g_{jj}.$$

(b) Magából a fenti tételből

$$g_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \text{ visszatérő,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Azaz, ha egy i állapot visszatérő, akkor a lánc 1 valószínűséggel végtelen sokszor visszatér i-be.

5.6. tétel. *Lényegtelen állapot nem lehet visszatérő.*

Bizonyítás. Tetszőleges i, j és $m \geq 0$-ra

$$g_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(m)} g_{kj}.$$

Ha i lényegtelen állapot, akkor létezik olyan l és $m > 0$, amelyekre $p_{il}^{(m)} > 0$ és $f_{li}^{*} = 0$. (Erre a következtetésre a lényegtelen állapot definíciója és az 5.4. tétel alapján jutunk).

Ekkor viszont (lásd 5.5. tétel) $g_{li} = 0$, s ezért

$$g_{ii} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(m)} g_{ki} \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(m)} - p_{il}^{(m)} < 1.$$

Az előbbi következmény alapján i nem visszatérő. □

A továbbiakban levezetünk egy szükséges és elégséges feltételt (5.9. tétel) arra vonatkozólag, hogy egy állapot visszatérő legyen. E célból szükségünk lesz az alábbi lemmára.

5.1. lemma. *Legyen az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nem negatív számokból álló sorozatban végtelen sok elem zérustól különböző* [2]*, s teljesüljön a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sum_{k=0}^{n} a_k} = 0 \tag{5.11}$$

feltétel. Ekkor tetszőleges $\{b_n,\ n \geq 0\}$ sorozatra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{\sum_{k=0}^{n} a_k} = \lim_{n\to\infty} b_n, \tag{5.12}$$

hacsak létezik a jobboldali határérték ($\lim_{n\to\infty} b_n$ lehet $\pm\infty$ is).

Bizonyítás. (5.11)-ből következik, hogy bármely rögzített N-re

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=n-N+1}^{n} a_k}{\sum_{k=0}^{n} a_k} = 0. \tag{5.13}$$

Tegyük fel először, hogy $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ véges. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan $N = N(\varepsilon)$ szám, hogy $n \geq N$-re $|b_n - b| < \varepsilon$. Az is világos, hogy ez esetben található olyan B, hogy $|b_n - b| < B$ minden $n \geq 0$-ra. Legyen most $n \geq N$. Ekkor

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k(b_{n-k} - b)\right| < \left(\sum_{k=0}^{n-N} a_k\right)\varepsilon + \left(\sum_{k=n-N+1}^{n} a_k\right)B.$$

Osztva ezen egyenlőtlenség mindkét oldalát $\sum_{k=0}^{n} a_k$-val, majd felhasználva (5.13)-at, nyerjük, hogy

$$\limsup_{n} \left|\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{\sum_{k=0}^{n} a_k} - b\right| < \varepsilon.$$

Miután $\varepsilon > 0$-t tetszőlegesen megválaszthatjuk, innen következik az állításunk, ha $\lim_{n\to\infty} b_n$ véges.

Legyen most $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, azaz bármely $M > 0$-hoz létezzen olyan $N = N(M)$, hogy $n \geq N$-re $b_n \geq M$. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \geq \left(\sum_{k=0}^{n-N} a_k\right)M + \left(\sum_{k=n-N+1}^{n} a_k\right) \cdot \min_{0\leq s\leq N-1} b_s.$$

[2] Elegendő feltenni, hogy nem minden a_n nulla.

Végigosztva ezen egyenlőtlenség oldalait $\sum_{k=0}^{n} a_k$-val, ismét (5.13)-ra hivatkozva kapjuk, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{\sum_{k=0}^{n} a_k} \geq M.$$

M-et tetszőlegesen választottuk, ezért (5.12) bizonyítását $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ esetére is elvégeztük. Ha $\lim_{n\to\infty} = -\infty$, akkor a most igazolt állítást alkalmazzuk a $\{-b_n,\ n \geq 0\}$ sorozatra. □

Jegyezzük meg, hogy (5.11) mindig fennáll, hacsak

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty, \tag{I}$$

vagy

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty, \text{ de } \{a_k,\ k \geq 0\} \text{ felülről korlátos.} \tag{II}$$

A továbbiakban igen fontos szerepet fog játszani az alábbi tétel.

5.7. tétel. *Tetszőleges i, j állapotokra és $n \geq 1$-re*

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} f_{ij}^{(\nu)} p_{jj}^{(n-\nu)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} f_{ij}^{(n-\nu)} p_{jj}^{(\nu)}. \tag{5.14}$$

Bizonyítás. E tétel bizonyítása az ún. „j-edik állapotba való első megérkezés" módszerével történhet. Ezt a módszert használtuk az 5.5. tétel bizonyítása során is a $g_{ij}(m+1) = f_{ij}^{*} g_{jj}(m)$ formula igazolásakor. A jelen esetben eltekintünk a bizonyítás részletezésétől. Tételünk a következő magától értetődő szemléletes tényen alapul: az i állapotból kiindulva az n-edik lépés során a j állapotba úgy juthatunk, hogy a j állapotba először a ν-edik ($1 \leq \nu \leq n$) lépésben kerülünk, majd a visszamaradó $n-\nu$ lépés befejeztével ismét a j állapotba jutunk. □

5.8. tétel. *Bármilyenek legyenek is az i, j állapotok,*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} p_{ij}^{(n)}}{1 + \sum_{n=1}^{N} p_{jj}^{(n)}} = f_{ij}^{*}.$$

Bizonyítás. Összegezzük (5.14) mindkét oldalát $n = 1$-től $n = N$-ig, ekkor

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{\nu=0}^{n-1} f_{ij}^{(n-\nu)} p_{jj}^{(\nu)} \\ &= \sum_{\nu=0}^{N-1} p_{jj}^{(\nu)} \sum_{n=\nu+1}^{N} f_{ij}^{(n-\nu)} \\ &= \sum_{\nu=0}^{N-1} p_{jj}^{(\nu)} \sum_{n=1}^{N-\nu} f_{ij}^{(n)}.\end{aligned}$$

Legyen ezután

$$p_{jj}^{(0)} = 1, \quad a_\nu = p_{jj}^{(\nu)}, \quad b_0 = 0, \quad b_\nu = \sum_{n=1}^{\nu} f_{ij}^{(n)} \qquad (\nu > 0),$$

s alkalmazzuk ezen mennyiségekre az 5.1. lemmát. Mivel az (I) illetve a (II) feltételek közül valamelyik biztosan teljesül az $a_\nu = p_{jj}^{(\nu)}$ $(\nu \geq 0)$ sorozatra, állításunk az 5.1. lemmából következik. □

5.9. tétel. [3] *Az i állapot visszatérő, vagy nem visszatérő attól függően, hogy divergens vagy konvergens a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$$

sor. Az utóbbi esetben a sor összege $(1 - f_{ii}^*)^{-1}$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 5.8. tételt az $i = j$ esetre. Kapjuk, hogy

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)}}{1 + \sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)}} = f_{ii}^*.$$

Ezután mindkét állításunk a visszatérő tulajdonság értelmezéséből következik, minthogy a baloldali határérték akkor és csak akkor lehet 1, ha a $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ sor divergál. □

5.10. tétel. *Legyen az i állapot visszatérő, s tegyük fel, hogy $i \rightleftharpoons j$. Ekkor a j állapot is visszatérő, azaz a „visszatérő tulajdonság” osztálytulajdonság.*

Bizonyítás. $i \rightleftharpoons j$ miatt léteznek olyan $n, m \geq 1$ egész számok, hogy $p_{ji}^{(n)} > 0$, s $p_{ij}^{(m)} > 0$. Továbbá minden pozitív ν egészre

$$p_{jj}^{(n+\nu+m)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(\nu)} p_{ij}^{(m)}.$$

Innen máris következik, hogy ha $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ sor értéke is végtelen. Az előző egyenlőtlenségben az i, j állapotok szerepének a felcserélésével láthatjuk be, hogy ha i nem visszatérő, akkor a vele egy osztályba tartozó bármely más állapot sem lehet visszatérő. □

5.11. tétel.

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \begin{cases} = \infty, & \text{ha } g_{ij} > 0, \\ < \infty, & \text{ha } g_{ij} = 0. \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen $g_{ij} = 0$. Ekkor (az 5.2. következmény (a) része miatt fennálló) $g_{ij} = f_{ij}^* g_{jj}$ alapján vagy $f_{ij}^* = 0$, s ekkor bármely $n \geq 1$-re $p_{ij}^{(n)} = 0$, vagy $g_{jj} = 0$. Az utóbbi eset viszont (az 5.2. következmény (b) része szerint) azt jelenti, hogy a j állapot nem visszatérő, s így $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$. A 5.8. tételből következik, hogy ez esetben $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ sor is konvergál.

Legyen most $g_{ij} > 0$. Ez esetben $f_{ij}^* > 0$, következésképpen $g_{jj} = g_{ij}(f_{ij}^*)^{-1} > 0$. Ekkor az 5.2. következmény (b) része szerint a j állapot visszatérő, s ezért a $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ sor divergál, mely ismét a 5.8. tétel alapján azt jelenti, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ sor sem lehet konvergens. Állításunk bizonyítása ezáltal teljes. □

5.3. következmény. Ha a j állapot nem visszatérő, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$, bármilyen is az i állapot. Ha viszont a j állapot visszatérő, és $i \rightharpoonup j$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \infty$. Végül pedig ha $i \not\rightharpoonup j$, akkor $p_{ij}^{(n)} = 0$ $(n \geq 1)$, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$.

Az alábbi tétel összegzi az osztályok visszatérőségéből következő tulajdonságokat.

[3] A visszatérőség kritériuma.

5.12. tétel. *Ha az i és a j állapotok ugyanazon visszatérő osztályhoz tartoznak, akkor*

$$f_{ij}^* = g_{ij} = 1 \quad \textit{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \infty.$$

Egy nem visszatérő osztályon belül

$$f_{ii}^* < 1, \quad g_{ij} = 0 \quad \textit{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty.$$

Bizonyítás. Itt $f_{ij}^* = 1$ igényel bizonyítást. Tegyük fel indirekt, hogy $f_{ij}^* < 1$. Ha most $p_{ki} > 0$ és $f_{ij}^* < 1$, akkor $f_{kj}^* = \sum_l p_{kl} f_{lj}^* < 1$. Válasszunk most egy olyan $j, k_1, k_2, \ldots, k_n, i$ állapotsorozatot, melyen egy lépésenként eljuthatunk j-ből i-be. Az előző tényt ezen az úton „visszafelé haladva" alkalmazva kapjuk, hogy $f_{k_n j}^* < 1, \ldots, f_{k_1 j}^* < 1, f_{jj}^* < 1$. Ez ellentmond j visszatérőségének. □

E pont befejezéseként tekintsünk néhány példát, melyek szép illusztrációját adják a lehetséges eseteknek. A példák egydimenziós véletlen bolyongással kapcsolatosak.

Példák

1. **Korlátlan véletlen bolyongás**. Bolyongjon egy részecske a számegyenes egész koordinátájú pontjaiban a

$$p_{i,i+1} = p, \quad p_{i,i-1} = 1 - p \qquad (-\infty < i < \infty)$$

átmenetvalószínűségeknek megfelelően. Tegyük fel, hogy $0 < p < 1$. Ekkor bármely két állapot kölcsönösen elérhető egymásból, azaz az állapothalmaz maga alkot egy lényeges osztályt. Világos, hogy a lánc periodikus, s a periódus 2. Ahhoz, hogy eldöntsük visszatérő-e a lánc avagy sem, elegendő a

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} \tag{5.15}$$

sor konvergenciáját vizsgálni. Ha megfontoljuk, hogy a 0 állapotból elindulva a $2n$-edik lépésnél csak akkor lehet a részecske ismét a 0 állapotban, ha a $2n$ lépés alatt a jobb- és bal irányú ugrások száma megegyezik, akkor világossá válik, hogy

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

Az (5.15) sor konvergenciájának vizsgálatakor használhatjuk a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n = (1-4x)^{-\frac{1}{2}} \qquad (0 < 4x < 1)$$

formulát. Ennek alapján, ha $0 < 4p(1-p) < 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} = (1 - 4p + 4p^2)^{-\frac{1}{2}} = |1-2p|^{-1}.$$

Innen leolvashatjuk, hogy ha $p \neq \frac{1}{2}$, akkor az (5.15) sor konvergens, azaz a tekintett Markov-láncunk nem visszatérő. Legyen most $p = \frac{1}{2}$. Egy jól ismert Ábel-tétel szerint (lásd Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei, I-II, Közoktatásügyi Kiadó, Budapest, 1951) ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} = \lim_{x \to \frac{1}{4} - 0} (1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \infty.$$

Ebben az esetben a lánc visszatérő.[4]

2. **Elnyelő határfalú véletlen bolyongás** (lásd az I-es példát). Legyen $0 < p < 1$. Könnyen észrevehető, hogy a 0 és az N állapotoktól eltekintve a lánc többi állapotai egy lényegtelen osztályt alkotnak. Ugyanis belőlük elérhető mind a 0, mind az N állapot, de ezekből vissza más állapotba nem juthat a részecske. A 0 és az N állapot külön-külön alkot egy-egy visszatérő osztályt.

3. **Ciklikus bolyongás**. Könnyű észrevenni, hogy a II-es példa olyan Markov-láncot illusztrál, amelynél az állapothalmaz bármilyen $0 < p < 1$-re egy visszatérő osztályt alkot.

4. **Baloldali visszaverő falú véletlen bolyongás**. Tekintsük az 1. példát azzal a módosítással, hogy az $x = -\frac{1}{2}$ pont egy visszaverő felületet képez, mely megakadályozza a részecskének a -1 pontba való kerülését azáltal, hogy a részecskét a 0 pontba juttatja vissza. Más szóval, a részecske most csak a $0, 1, 2, \ldots$ pontokban bolyonghat, miközben az átmeneti valószínűségek:

$$p_{00} = 1 - p,\ p_{i\,i+1} = p\ (i \geq 0), \quad p_{i\,i-1} = 1 - p \quad (i \geq 1).$$

Legyen $0 < p < 1$. Az állapothalmaz ez esetben is egyetlen lényeges osztályból áll. A lánc aperiodikus, minthogy $p_{00} > 0$. A visszatérőség vizsgálatához határozzuk meg az f^*_{00} mennyiséget. Világos, hogy $f^{(1)}_{00} = 1 - p = q$, míg $n \geq 1$ esetén $f^{(2n+1)}_{00} = 0$, és

$$f^{(2n)}_{00} = p\, f^{(2n-1)}_{10}.$$

Innen kapjuk, hogy

$$f^*_{00} = p\, f^*_{10} + q. \tag{5.16}$$

Vegyük most észre, hogy az f^*_{10} valószínűség esetünkben ugyanaz, mint az 1. példában. Ugyanis az f^*_{10}-t egyértelműen meghatározzák a p_{ij} $(i > 0, j > 0)$ és a p_{i0} $(i > 0)$ átmeneti valószínűségek, amelyek viszont a két szóban forgó példában megegyeznek. Az 1. példában:

$$p^{(2n+1)}_{10} = \binom{2n+1}{n} p^n (1-p)^{n+1}, \qquad p^{(2n)}_{10} = 0, \quad n \geq 0,$$

$$p^{(2n)}_{00} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n, \qquad p^{(2n+1)}_{00} = 0, \quad n \geq 0.$$

[4] A fenti sor egyszerűen vizsgálható a Stirling-formula segítségével. Most azonban – további alkalmazás miatt – részletesebben a fenti érvelést fejtjük ki. A Newton-féle binomiális tétel az alábbi. Az $(1+x)^\mu$ Maclaurin-sora

$$1 + \binom{\mu}{1} x + \binom{\mu}{2} x^2 + \ldots$$

alakú (ún. binomiális sor). Ezen sor konvergenciasugara $\mu \neq 0, 1, 2, \ldots$ esetén $R = 1$. Továbbá az $x = -1$ helyen a sor $\mu > 0$ esetén konvergens, $\mu < 0$ esetén divergens. Ahol a sor konvergens, ott előállítja $(1+x)^\mu$-t.

Ebből a tételből, a binomiális együttható $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ definícióját használva kapjuk, hogy

$$(1-4y)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} y^n, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{4},$$

ahol az $1/0 = \infty$ megállapodással éltünk. Itt $y = p(1-p)$ választással (hiszen $0 \leq p \leq 1$ estén $0 \leq y \leq \frac{1}{4}$ és csakis $p = \frac{1}{2}$ esetén lesz $y = \frac{1}{4}$) éppen a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n = (1 - 4p(1-p))^{-\frac{1}{2}}, \qquad 0 \leq p \leq 1$$

képletet nyerjük.

Az 1. példa vizsgálatakor láttuk, hogy $p \neq \frac{1}{2}$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} = \frac{1}{|1-2p|}.$$

Határozzuk most meg a $\sum_{n=0}^{\infty} p_{10}^{(2n+1)}$ sor összegét.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+1}{n} p^n q^{n+1} &= \frac{1}{2p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+1)[(2n+1)!]}{(n+1)n!(n+1)!}(pq)^{n+1} \\ &= \frac{1}{2p} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+2}{n+1} (pq)^{n+1} = \frac{1}{2p}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} (pq)^k - 1\right].\end{aligned}$$

Ennek alapján $p \neq \frac{1}{2}$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{10}^{(2n+1)} = \frac{1}{2p}\left[\frac{1}{|1-2p|} - 1\right].$$

A 5.8. tétel (1. példára történő) alkalmazásával kapjuk most, hogy[5]

$$f_{10}^* = \frac{1}{2p}\big(1 - |1-2p|\big).$$

Innen most már könnyen látható, hogy $p \leq \frac{1}{2}$ esetén $f_{10}^* = 1$, míg $p > \frac{1}{2}$-re $f_{10}^* < 1$. (5.16)-ra való tekintettel kaptuk tehát, hogy $f_{00}^* = 1$, hacsak $p \leq \frac{1}{2}$, azaz a tekintett láncunk visszatérő, $p > \frac{1}{2}$ esetén viszont $f_{00}^* < 1$, a lánc nem visszatérő.

Ergodicitás

Egy Markov-lánc minden egyes i állapotára értelmezzük a τ_{ii} valószínűségi változót mint az adott i állapotba való *első visszatérés idejét.* Eszerint $f_{ii}^{(k)} = \mathbb{P}\,(\tau_{ii} = k)$. Az, hogy egy i állapot visszatérő, most azt jelenti, hogy a τ_{ii} változó eloszlása valódi, azaz $\mathbb{P}(\tau_{ii} < \infty | \xi_0 = i) = 1$. Az $m_{ii} = \mathbb{E}(\tau_{ii} | \xi_0 = i)$ várható érték még az utóbbi esetben is lehet végtelen. (m_{ii}-t átlagos visszatérési időnek nevezzük.)

5.11. definíció. Az i állapotot *ergodikusnak* nevezzük, ha

$$m_{ii} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot f_{ii}^{(k)} < \infty.$$

és *nullállapotnak* nevezzük, ha $m_{ii} = \infty$.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az i állapot aperiodikus, azaz, hogy $d_i = 1$. A $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ határértékek tanulmányozásakor alapvető szerepet játszik az alábbi tétel.

5.13. tétel. *Tetszőleges visszatérő aperiodikus állapotra*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{m_{ii}},$$

(ahol $1/\infty$ *alatt 0-t értünk).*

[5] Az f_{10}^*-re kapott képlet $p = \frac{1}{2}$ esetén is érvényes, csak ekkor az 5.8. tételt a fenti két sorra magára, nem pedig a zárt alakjukra kell alkalmazni.

A tétel állítása az ún. diszkrét felújítási folyamatokra vonatkozó Blackwell-tétellel ekvivalens. Az utóbbival később részletesen foglalkozunk, s akkor e tétel bizonyítására is rátérünk.[6]

5.4. következmény. Ha $i \rightleftharpoons j$ és j visszatérő aperiodikus, akkor

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{m_{jj}}.$$

Bizonyítás. Ismeretes, hogy

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} f_{ij}^{(\nu)} p_{jj}^{(n-\nu)}.$$

A 5.12. tétel értelmében $f_{ij}^* = 1$. Állításunk az 5.1. lemmából következik, ha azt az $a_\nu = f_{ij}^{(\nu)}$, $b_\nu = p_{jj}^{(\nu)}$ szereposztás mellett alkalmazzuk. □

5.14. tétel. *Az ergodicitás osztálytulajdonság.*

Bizonyítás. Legyen $i \rightleftharpoons j$ és $p_{ij}^{(m)} > 0$, $p_{ji}^{(n)} > 0$. Ekkor

$$p_{ii}^{(m+\nu+n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(\nu)} p_{ji}^{(n)},$$

és

$$p_{jj}^{(n+\nu+m)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(\nu)} p_{ij}^{(m)}.$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből látható, hogy a $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$ és a $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}$ határértékek vagy mind zérusak, vagy mindkettő pozitív. □

Most már feleletet adhatunk a $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ határértékkel kapcsolatosan felvetett kérdésünkre. Eredményeinket a következőképpen foglalhatjuk össze.

5.15. tétel. *Ha egy homogén Markov-lánc aperiodikus, akkor*

α) *bármely nem visszatérő j állapotra, tetszőleges kiinduló i állapot esetén*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0;$$

β) *ha i és j két különböző lényeges osztályba tartozó állapotok, akkor*

$$p_{ij}^{(n)} = 0 \quad \textit{minden} \quad n \geq 0\text{-}ra;$$

γ) *ha i és j egy visszatérő osztály két állapota, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{m_{jj}};$$

[6] Valójában ebben a jegyzetben a bizonyítás nem szerepel. Viszont megtalálható W. Feller: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978) c. könyv 120–122. oldalain. Maga az eredmény az alábbi.

Legyen adott nemnegatív számok egy $f_1, f_2, \dots$ sorozata. A $p_0, p_1, \dots$ számsorozatot az alábbi rekurzív módon definiáljuk. Legyen $p_0 = 1$ és $n \geq 1$-re $p_n = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu p_{n-\nu}$. Ezt az egyenletet (speciális) diszkrét felújítási egyenletnek nevezzük.

Tétel. Legyen $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu = 1$, és legyen 1-gyel egyenlő azon ν-k legnagyobb közös osztója, melyekre $f_\nu > 0$. Legyen $m = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n$. Ekkor a fent definiált p_n sorozatra

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{m},$$

ahol $1/\infty$ alatt 0-t értünk.

Ezt az 5.13. tétel igazolására $p_n = p_{ii}^{(n)}$ és $f_\nu = f_{ii}^{(\nu)}$ választással használhatjuk. Meg kell még jegyezni, hogy ha a lánc periódusa d, akkor d-vel egyenlő azon ν-k legnagyobb közös osztója, melyekre $f_{ii}^{(\nu)} > 0$.

δ) ha i lényegtelen, j viszont visszatérő állapot, akkor

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{*}\frac{1}{m_{jj}}.$$

Bizonyítás. Csak a δ) állítás szorul igazolásra. Ez viszont könnyen elvégezhető a

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} f_{ij}^{(\nu)} p_{jj}^{(n-\nu)}$$

formula és az 5.1. lemma felhasználásával. □

Az előző eredményeink csak aperiodikus Markov-láncokra vonatkoznak. A gyakorlati alkalmazásokat tekintve ezek az eredmények az esetek túlnyomó többségében elegendőek a felmerülő problémák vizsgálatához. Ha eltekintünk az aperiodicitás feltételezésétől, akkor a 5.15. tétel állításai bizonyos módosításokra szorulnak. A teljesség kedvéért az alábbiakban ismertetjük ezeket a módosításokat anélkül, hogy ezek részletesebb igazolására kitérünk. Az érdeklődő olvasó megtalálhatja ezen állítások bizonyításait az [**1**] könyv I. részének 3. illetve a 7. §-ában.

Legyen A egy Markov-lánc állapotainak bizonyos lényeges osztálya, A minden eleme azonos *periodicitású.* Jelöljük a közös periódust d-vel. $d > 1$ esetén az A osztály felbontható diszjunkt $C_1, C_2, \dots, C_d$ részhalmazok, ún. ciklikus alosztályok összegére:

$$A = \bigcup_{r=1}^{d} C_r$$

oly módon, hogy $i \in C_r$, $j \in C_s$ esetén $p_{ij}^{(n)} > 0$ csak akkor, ha $n \equiv s - r \mod (d)$. Szemléletesen, ha A elemeit úgy rendezzük, hogy bármely $1 \le r < s \le d$ esetén C_r elemei megelőzzék C_s elemeit, akkor pl. $d = 3$ esetén az átmenetvalószínűségnek az A lényeges osztályra korlátozott sztochasztikus mátrixa az alábbi struktúrával rendelkezik:

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & C_1 & C_2 & C_3 \\ \hline C_1 & 0 & P_{12} & 0 \\ \hline C_2 & 0 & 0 & P_{23} \\ \hline C_3 & P_{31} & 0 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Itt csak a P_{12}, P_{23}, P_{31} rész-mátrixok elemei különbözhetnek zérustól. Könnyen látható, hogy ekkor a szóbanforgó sztochasztikus mátrix második és harmadik hatványai az alábbi szerkezetűek:

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & C_1 & C_2 & C_3 \\ \hline C_1 & 0 & 0 & P_{12}P_{23} \\ \hline C_2 & P_{23}P_{31} & 0 & 0 \\ \hline C_3 & 0 & P_{31}P_{12} & 0 \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & C_1 & C_2 & C_3 \\ \hline C_1 & P_{12}P_{23}P_{31} & 0 & 0 \\ \hline C_2 & 0 & P_{23}P_{31}P_{12} & 0 \\ \hline C_3 & 0 & 0 & P_{31}P_{12}P_{23} \\ \hline \end{array}.$$

Rögzítsük most az A osztály két állapotát, i-t és j-t. Világos, hogy ha bizonyos $n = kd+r$, $1 \le r < d$, $k \ge 0$ mellett $p_{ij}^{(n)} > 0$, akkor valamilyen más $m \ge 0$-ra $p_{ij}^{(m)} > 0$ csak akkor lehetséges, ha $m \equiv n \mod (d)$. Ez arra enged következtetni, hogy periodikus esetben a $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ határértékek nem léteznek. Ehelyett a

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)}$$

típusú határértékekről beszélhetünk, ahol $i \in C_u$, $j \in C_s$ esetén $r \equiv s - u \mod (d)$. Pontosabban, ha a Markov-lánc állapottere periodikus osztályokra bomlik, akkor az 5.15. tétel γ) illetve δ) állításai a következőképpen módosulnak.

5.2. megjegyzés. γ') Legyen i és j egy $d > 1$ periódusú visszatérő osztály két állapota. Ekkor, ha $i \in C_u$, $j \in C_s$ és r az 1 és d közé eső azon egész szám, amelyre $r \equiv s - u \mod (d)$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = \frac{d}{m_{jj}}.$$

δ') Ha i lényegtelen állapot, j viszont $d > 1$ periódusú visszatérő állapot, akkor bármely $r \geq 0$-ra

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = f_{ij}^*(r) \cdot \frac{d}{m_{jj}},$$

ahol

$$f_{ij}^*(r) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}^{(kd+r)}, \quad i \in C_u,\ j \in C_s,\ r \equiv s - u \mod (d).$$

Az alkalmazások többségében a tekintendő Markov-lánc aperiodicitásán kívül az is teljesül, hogy a lánc fázistere minimális zárt halmazt alkot, azaz, hogy a lánc irreducibilis. Ez esetben az állapottér önmaga alkot egy lényeges osztályt.

5.16. tétel. Ha a Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus, akkor *két eset lehetséges:*

(a) *vagy minden i, j elempárra*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0;$$

(b) *vagy az állapotok ergodikusak, azaz tetszőleges i, j-re a kiinduló i állapottól függetlenül*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = u_j > 0. \tag{5.17}$$

Stacionaritás, stacionárius eloszlás

5.12. definíció. A $\{q_0, q_1, \dots\}$ számsorozatot, amelyre a $q_i \geq 0 \quad (i \geq 0)$, $\sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1$ feltételek teljesülnek, a $P = (p_{ij})$ átmenetvalószínűségi mátrixszal rendelkező Markov-lánc *stacionárius eloszlásának* nevezzük, ha bármely $j \geq 0$-ra

$$q_j = \sum_{i=0}^{\infty} q_i p_{ij}. \tag{5.18}$$

Más szóval a $Q = \{q_0, q_1, \dots\}$ eloszlás egy Markov-lánc stacionárius eloszlása, ha Q-t kezdeti eloszlásként választva, a lánc eloszlása (az abszolút valószínűségek) időben nem változik. Ha egy Markov-láncnak létezik stacionárius eloszlása, és ha a kezdeti eloszlás megegyezik a stacionárius eloszlásával, akkor a Markov-láncot *stacionáriusnak* nevezzük.

Megmutatjuk most, hogy ha a lánc irreducibilis és ergodikus, akkor az (5.17) alatt szereplő $\{u_j,\ j \geq 0\}$ sorozat a láncnak stacionárius eloszlása.

5.17. tétel. Ha a Markov-lánc irreducibilis, aperiodikus és ergodikus, akkor az (5.17) alatt szereplő $\{u_j,\ j \geq 0\}$ sorozat a láncnak stacionárius eloszlása.

Bizonyítás. Tetszőleges N és n pozitív egészre

$$\sum_{j=0}^{N} p_{ij}^{(n)} \leq 1.$$

Következésképpen

$$\sum_{j=0}^{\infty} u_j \leq 1.$$

A Chapman-Kolmogorov egyenlet alapján

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj},$$

s ezért bármely N-re

$$p_{ij}^{(n+1)} \geq \sum_{k=0}^{N} p_{ik}^{(n)} p_{kj}.$$

Az $n \to \infty$ határátmenetre térve, minthogy N tetszőleges, kapjuk, hogy

$$u_j \geq \sum_{k=0}^{\infty} u_k p_{kj}. \tag{5.19}$$

Azonban itt minden $j \geq 0$-ra csak az egyenlőség lehet igaz. Összegezzük ugyanis (5.19) mindkét oldalát $j \geq 0$-ra, s a jobboldalon előforduló kettős összeg összegzési sorrendjét cseréljük fel. Így mindkét oldalon a $\sum u_j$ összeget kapjuk, ami csak akkor lehetséges, ha (5.19)-ben minden $j \geq 0$-ra az egyenlőség érvényes. Kaptuk tehát, hogy az (5.17) alatti ún. ergodikus valószínűségekből álló sorozat kielégíti az (5.18) feltételt. Következésképpen az $\{u_i^* = u_i / \sum_j u_j\ :\ i \geq 0\}$ sorozat a lánc egy stacionárius eloszlása.

Megmutatjuk ezután, hogy $\sum_{j=0}^{\infty} u_j = 1$. Ehhez előbb megjegyezzük, hogy ha a $Q = \{q_0, q_1, \dots\}$ eloszlás a $P = (p_{ij})$ átmenetvalószínűségi mátrixszal rendelkező lánc stacionárius eloszlása, akkor (5.18)-cal egyidejűleg tetszőleges $n > 0$-ra

$$q_j = \sum_{i=0}^{\infty} q_i p_{ij}^{(n)}. \tag{5.20}$$

A bizonyítás n-re vonatkozó teljes indukcióval történhet, felhasználva az alábbi egyenlőség-sorozatot:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} q_i p_{ij}^{(n+1)} &= \sum_{i=0}^{\infty} q_i \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik} p_{kj}^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} q_i p_{ik} p_{kj}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k p_{kj}^{(n)}. \end{aligned}$$

Legyen most $\{q_i,\ i \geq 0\}$ (5.18)-at kielégítő eloszlás. Ekkor (5.20)-ra való tekintettel bármely $j \geq 0$-ra

$$q_j = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{\infty} q_i p_{ij}^{(n)}.$$

Minthogy $\sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1$ és $p_{ij}^{(n)} \leq 1$, a határérték-képzés és az összegzési sorrend felcserélhető[7]. Azt kaptuk tehát, hogy bármely $j \geq 0$-ra

$$q_j = (q_0 + q_1 + \dots)u_j = u_j,$$

ami egyrészt azt jelenti, hogy $\sum u_j = 1$ másrészt, hogy az ergodikus (lásd (b)) esetben a stacionárius eloszlás egyértelműen meghatározott. □

Végül belátjuk, hogy az (a) esetben nem létezhet stacionárius eloszlás.

5.18. tétel. Ha a Markov-lánc irreducibilis, aperiodikus, akkor az (a) esetben nem létezhet stacionárius eloszlása.

Bizonyítás. Ugyanis ha létezne, akkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz megadható volna olyan $N = N(\varepsilon)$, hogy bármely k állapotra és n időpontra

$$q_k \leq \sum_{i=0}^{N} q_i p_{ik}^{(n)} + \varepsilon.$$

Innen már következik, hogy az (a) esetben az (5.18)-at kielégítő sorozat csak tiszta 0-ból álló sorozat lehet, amely értelmezésünk szerint nem eloszlás. □

5.3. megjegyzés. Befejezésül megjegyezzük még, hogy az elmondottak szerint az (5.17) határvalószínűségek sorozata, a lánc ergodikus eloszlása, az (5.18)-as egyenletrendszer egyértelmű megoldása. E tény gyakran megkönnyíti az ergodikus valószínűségek meghatározását.

Feladatok

1. Osztályozzuk az alábbi átmenetvalószínűségi mátrixokkal rendelkező Markov-láncok állapotait:

   a)

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix};$$

   b)

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

[7] A dominált konvergencia-tétel miatt.

c)

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Melyik átmeneti mátrixnak megfelelő lánc irreducibilis? Ergodikus-e ez az irreducibilis lánc, s ha igen, határozzuk meg az ergodikus eloszlását.

2. Egy megszámlálható állapothalmazú lánc átmenet-valószínűségei legyenek:

$$p_{ij} = c_i e^{-a|i-j|} \qquad (i, j = 0, 1, 2, \dots).$$

Határozzuk meg a c_i állandókat, a $\left(p_{ij}^{(2)}\right)$ kétlépéses átmenetvalószínűségeket és a lánc stacionárius eloszlását.

3. Legyen $\{p_1, p_2, \dots\}$ egy sztochasztikus mátrix első sora. A többi soraiban a $p_{j\,j-1} = 1$ elemen kívül mind legyen 0. Osztályozzuk az állapotokat, vizsgáljuk meg az ergodikusság kérdését. Ha az utóbbira pozitív a felelet, úgy határozzuk meg az ergodikus eloszlást.

4. Legyen a P sztochasztikus mátrix a következőképpen megadva:

$$\begin{aligned} &p_{i0} = q_i, \qquad q_i \geq 0, && i \geq 0; \\ &p_{i\,i+1} = 1 - q_i, && i \geq 0; \\ &p_{ij} = 0, && i \geq 0,\ j \neq 0,\ j \neq i+1; \end{aligned}$$

azaz

$$P = \begin{pmatrix} q_0 & 1-q_0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & 0 & 1-q_1 & 0 & \dots \\ \vdots & & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Igazoljuk, hogy az állapotok akkor és csak akkor visszatérők, ha $\sum_{i=0}^{\infty} q_i = \infty$. Adjuk meg annak a feltételét, hogy az állapotok zérus-állapotok legyenek. Határozzuk meg a stacionárius eloszlást, feltéve, hogy az létezik.

5. N fehér és N fekete golyót szétosztunk két urnába úgy, hogy mindegyik urnában N golyó legyen. Azt mondjuk, hogy a rendszer i állapotban van, ha az első urnában i fehér golyó van. Mindegyik lépésnél mindkét urnából kiveszünk egy-egy golyót véletlenszerűen, és felcserélve tesszük vissza őket az urnába. Meghatározandók a p_{ij} átmenetvalószínűségek és a stacionárius $\{p_j : j = 0, \dots, N\}$ eloszlás.

6. Mutassuk meg, hogy az elnyelő határfalú véletlen bolyongás esetén bármely $0 < i < N$-re

$$f_{i0}^* + f_{iN}^* = 1.$$

Igazoljuk, hogy

$$f_{iN}^* = \left[1 - \left(\frac{p}{q}\right)^i\right] \left[1 - \left(\frac{q}{N}\right)^N\right]^{-1}.$$

7. Bizonyos sorbanállási probléma olyan nem-negatív egész értékű Markov- lánc vizsgálatát veti fel, melynek átmenetvalószínűségi mátrixa:
$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ 0 & p_0 & p_1 & \dots \\ 0 & 0 & p_0 & \dots \\ \dots & & & \end{pmatrix},$$
ahol $\{p_k : k \geq 0\}$ tetszőleges eloszlás. A generátor-függvények módszerének felhasználásával adjuk meg a lánc ergodicitásának feltételét. Határozzuk meg, feltéve, ha létezik, az ergodikus eloszlás generátorfüggvényét a $\pi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ függvény segítségével.
8. Mutassuk meg, hogy egy irreducibilis lánc, amelynek valamely p_{jj} átmenetvalószínűsége pozitív, nem lehet periodikus.
9. Igazoljuk, hogy egy véges állapothalmazú irreducibilis lánc akkor és csak akkor aperiodikus, ha létezik olyan $n > 0$ egész szám, hogy $p_{ij}^{(n)} > 0$ minden i, j-re.
10. Bizonyítsuk be, hogy véges számú állapottal rendelkező Markov-lánc egy állapota akkor és csak akkor nem visszatérő, ha ez az állapot lényegtelen. Mutassunk példát arra, hogy végtelen sok állapot esetén ez az állítás nem igaz.

6. fejezet

Folytonos paraméterű Markov-láncok

Amikor az előző fejezetben megadtuk a Markov-lánc fogalmát, említettük, hogy értelmezésük egyaránt jó mind diszkrét, mind folytonos idő esetére. Megismételjük most korábbi fogalomalkotásunkat, kihangsúlyozva az idő folytonosságát.

6.1. definíció. A $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ folytonos idejű, nem negatív egész értékű sztochasztikus folyamatot *folytonos idejű Markov-láncnak* nevezzük, ha tetszőleges $t > t_n > \cdots > t_1 \geq 0$ időpillanatokra és olyan $j,\ i_n, \ldots, i_1$ állapotsorozatra, amelyre $\mathbb{P}(\xi_{t_n} = i_n, \ldots, \xi_{t_1} = i_1) > 0$, teljesül a

$$\mathbb{P}(\xi_t = j \mid \xi_{t_n} = i_n, \ldots, \xi_{t_1} = i_1) = \mathbb{P}(\xi_t = j \mid \xi_{t_n} = i_n) \tag{6.1}$$

egyenlőség.

Átmenetvalószínűségek

6.2. definíció. Legyen $t_n = s$, $i_n = i$, és vezessük be a

$$p_{ij}(s,t) = \mathbb{P}(\xi_t = j \mid \xi_s = i)$$

jelölést. Ezeket a függvényeket, melyek tetszőleges $i, j \geq 0$ egészekre és $0 \leq s < t$ időpillanatokra értelmezettek, a szóbanforgó Markov-lánc *átmenetvalószínűségeinek*, a belőlük alkotott

$$P(s,t) = (p_{ij}(s,t))$$

mátrixot a lánc *átmenetvalószínűségi mátrixának* nevezzük.

Részletesebben **csak azzal az esettel fogunk foglalkozni, amikor az átmenetvalószínűségek csak az időpillanatok különbségétől függnek**, azaz amikor tetszőleges $s, t \geq 0$-ra

$$p_{ij}(s, s+t) = p_{ij}(t).$$

Ilyen esetben azt mondjuk, hogy a Markov-lánc *(időben) homogén*, s a megfelelő átmenetvalószínűségi mátrixra a

$$P(t) = (p_{ij}(t))$$

jelölést vezetjük be.

Egy folytonos idejű Markov-lánc átmenetvalószínűségeinek ki kell elégíteni a következő feltételeket.

$$p_{ij}(t) \geq 0,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) = 1 \tag{6.2}$$

minden i, j állapotra és $t \geq 0$-ra;

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \tag{6.3}$$

minden i, j állapotra és $s, t \geq 0$-ra.

Mátrixos jelölésben az utóbbi követelmény a

$$P(s+t) = P(s)P(t)$$

egyenlet teljesülését jelenti. Ezt az egyenletet szokás *Chapman-Kolmogorov-egyenletnek* nevezni.

A $p_i = \mathbb{P}(\xi_0 = i)$, $i \geq 0$, valószínűségeket a lánc *kezdeti eloszlásának* nevezzük. A lánc tetszőleges $t > 0$ pillanathoz tartozó $p_i(t) = \mathbb{P}(\xi_t = i)$, $i \geq 0$, eloszlása (*abszolút valószínűségek*) felírható a kezdeti és az átmenetvalószínűségek segítségével:

$$p_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k p_{ki}(t).$$

Hasonlóan a diszkrét esethez, a lánc végesdimenziós eloszlásait is meghatározza a kezdeti eloszlás és az átmenetvalószínűségi mátrix:

$$\mathbb{P}(\xi_{t_1} = i_1, \xi_{t_2} = i_2, \ldots, \xi_{t_n} = i_n) = \\ = p_{i_1}(t_1) \prod_{r=2}^{n} p_{i_{r-1}i_r}(t_r - t_{r-1}).$$

Úgyszintén érvényes az előző fejezet 5.1. tételével analóg egzisztencia tétel. Ennek megfogalmazásától most eltekintünk.

Egy sztochasztikus $P(t)$ mátrix elemei mint függvények a legkülönbözőbb tulajdonságúak lehetnek. Konstruálható például olyan folytonos idejű lánc, amelynek átmenetvalószínűségei nem mérhető függvények (lásd [**1**], 259. oldal, 8. pl.). Azonban a gyakorlati problémákkal kapcsolatba hozott Markov-láncok átmeneti mátrixáról mindig feltehetjük a mérhetőséget.

A mérhetőség teljesülése esetén az átmenetvalószínűségi függvények viselkedése már nem lehet tetszőleges. Többek között igazolva van, hogy tetszőleges mérhető sztochasztikus mátrix elemei folytonosak a $(0, \infty)$ szakaszon, egyenletesen folytonosak bármely $[\delta, \infty)$, $\delta > 0$, balról zárt félegyenesen, továbbá, hogy vagy azonosan, vagy sehol sem zérusak a $0 < t < \infty$ pozitív időtengelyen. Ezen állításokkal nem fogunk részletesen foglalkozni.[1]

Kolmogorov egyenletei

Egy $P(t)$ átmenetvalószínűségi mátrixnak a $t = 0$ pontban való viselkedésére vonatkozó elég kézenfekvő feltevések mellett le lehet vezetni $P(t)$-re az ún. Kolmogorov-féle egyenleteket. Az egyik feltétel a Markov-lánc sztochasztikus folytonossága.

6.3. definíció. Általában egy valós értékű $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ folyamatot *sztochasztikusan folytonosnak* nevezünk, ha tetszőleges $t \geq 0$ és $\delta > 0$-ra

$$\lim_{s \to t} \mathbb{P}(|\xi_t - \xi_s| < \delta) = 1. \tag{6.4}$$

Egy folyamat sztochasztikus folytonossága szemléletesen azt jelenti, hogy két közeli időpillanatban a folyamat értékei nagy valószínűséggel közel esnek egymáshoz. Markov-láncok esetére, minthogy a fázistér most diszkrét, a sztochasztikus folytonosság azt jelenti, hogy rövid idő alatt a láncban nagy valószínűséggel nem történik változás. Ha $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$

[1] Lásd [**16**], 120. oldal, Theorem 1 és 126. oldal, Theorem 5.

$P(t)$ átmenetvalószínűségű Markov-lánc, $\tau = \min\{s,t\}$, akkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi_t \neq \xi_s) &= \sum_i \mathbb{P}(\xi_\tau = i)\,[1 - p_{ii}(|s-t|)] \\ &\leq \max_i\,[1 - p_{ii}(|s-t|)]\,.\end{aligned}$$

6.1. megjegyzés. Innen adódik, hogy Markov-lánc sztochasztikus folytonosságának (az egyenlőségből következően) szükséges és (az egyenlőtlenségből kifolyólag) elégséges feltétele, hogy átmenetvalószínűségei a $t = 0$-ban a

(6.5) $$\lim_{t\to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{máskor,} \end{cases}$$

követelménynek megfelelően viselkedjenek.[2]

6.4. definíció. A továbbiakban azokat a sztochasztikus mátrixokat, amelyek a (6.5) feltételnek eleget tesznek, *standardnak* fogjuk nevezni.

A (6.5)-ön kívül tegyük még fel, hogy $P(t)$ a $t = 0$ pontban differenciálható, azaz, hogy bármely i-re

(6.6) $$\lim_{t\to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = -a_{ii}\,;$$

tetszőleges $i \neq j$-re

(6.7) $$\lim_{t\to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = a_{ij}.$$

Valójában ezeknek a határértékeknek a létezése következik a $P(t)$ mátrix elemeinek mérhetőségéből és a (6.2), (6.3), (6.5) feltételekből. Emellett minden $i \neq j$-re $a_{ij} < \infty$, viszont előfordulhat, hogy a_{ii} végtelen $(-\infty)$. Ezen állítások igazolására nem térünk ki, bár elég egyszerű meggondolásokat igényelnek, de ezek hosszadalmasak, s inkább technikai jellegűek.[3]

Szükségünk lesz még egy további feltételre, mely lényegesen új megszorítás, előző feltevéseinkből nem következik.

(6.8) $$\left[\begin{array}{c}\text{(6.7)-ben a konvergencia minden rögzített } j \text{ mellett} \\ i\text{-ben egyenletes.}\end{array}\right]$$

6.5. definíció. Az a_{ij} $(i,j \geq 0)$ mennyiségekből álló $A = (a_{ij})$ mátrixot a $(p_{ij}(t))$ átmenetvalószínűségi mátrix (ill. a szóbanforgó Markov-lánc) *infinitézimális mátrixának* nevezzük.

Ennek elemei kielégítik az

(6.9) $$a_{ii} \leq 0; \qquad a_{ij} \geq 0 \quad (i \neq j);$$

(6.10) $$\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \leq 0$$

[2] Ha a lánc standard, akkor a fenti egyenlőségből a dominált konvergencia-tétel alapján következik a lánc sztochasztikus folytonossága. Megfordítva, ha a lánc sztochasztikusan folytonos, akkor $\lim_{s\to t} \mathbb{P}(\xi_t \neq \xi_s) = 0$. Ugyancsak a fenti egyenlőségből ekkor $p_{ii}(|s-t|) \to 1$ az olyan i állapotokra, amelyekre $\mathbb{P}(\xi_\tau = i) \neq 0$. Azaz, ha az állapottér olyan i állapotokból áll, melyekre $\mathbb{P}(\xi_u = i) \geq 0$ (valamely $u \geq 0$-ra), akkor a sztochasztikus folytonosságból következik a lánc standard volta.

[3] Lásd [**16**], 131–132. oldal.

feltételeket.

Itt csak (6.10) teljesülése igényel indoklást, amely azonban igen egyszerű. Ugyanis tetszőleges $N > i$-re

$$\sum_{j=0}^{N} a_{ij} = \lim_{t\to 0}\left(\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N} \frac{p_{ij}(t)}{t} + \frac{p_{ii}(t)-1}{t}\right) \leq 0,$$

s innen (6.10) valóban következik.

6.6. definíció. Abban az esetben, amikor (6.10)-ben az egyenlőség érvényes, és $q_i = -a_{ii} < \infty$ minden $i \geq 0$-ra, a szóban forgó Markov-láncot, ill. a $P(t)$ *átmenetvalószínűségi mátrixot konzervatívnak* nevezzük.

Vegyük észre, hogy ha az állapotok száma véges, akkor (6.10)-ben az egyenlőség érvényes, azaz ilyenkor a konzervativitás feltétele a q_i mennyiségek végessége.

Bebizonyítjuk az alábbi tételt.

6.1. tétel. *Legyen* $P = (p_{ij}(t))$ *a* (6.5)–(6.8) *feltételeket kielégítő konzervatív átmenet-valószínűségi mátrix. Ekkor tetszőleges* $t > 0$ *pontban a* $p_{ij}(t)$ *függvények differenciálhatók és eleget tesznek a (Kolmogorov első)*

(i) $$p'_{ij}(t) = a_{ii}p_{ij}(t) + \sum_{k\neq i} a_{ik}p_{kj}(t),$$

és a (Kolmogorov második)

(ii) $$p'_{ij}(t) = p_{ij}(t)a_{jj} + \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)a_{kj}$$

differenciálegyenletének. Mátrixos alakban ezek az egyenletek a következők:

$$\frac{dP(t)}{dt} = A\cdot P(t),$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)\cdot A.$$

Bizonyítás. (ii) A Chapman-Kolmogorov-egyenlet alapján tetszőleges $t, h > 0$-ra

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t)p_{kj}(h).$$

Ezért

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} = p_{ij}(t)\frac{p_{jj}(h)-1}{h} + \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)\frac{p_{kj}(h)}{h}.$$

Tartson most h 0-hoz, ekkor (6.6) miatt

$$\frac{p_{jj}(h)-1}{h} \to a_{jj}.$$

Tekintsük a

(6.11) $$\sum_{k\neq j} p_{ik}(t)\left(\frac{p_{kj}(h)}{h} - a_{kj}\right)$$

viselkedését $h \to 0$ esetén. A (6.7) és a (6.8) feltételek értelmében bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $h \leq \delta$, akkor minden k-ra

$$\left| \frac{p_{kj}(h)}{h} - a_{kj} \right| < \varepsilon.$$

Ennek értelmében $h \to 0$ esetén a (6.11) alatti összeg tetszőlegesen kicsinnyé tehető, s ezáltal tételünk (ii) pontja igazolást nyert.

(i) Az (i) igazolásához alkalmazzuk most a Chapman-Kolmogorov-egyenletet

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(h) p_{kj}(t)$$

alakban. Ekkor

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} p_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t).$$

Állításunk bizonyításához csak azt kell megmutatni, hogy az egyenlőség jobboldalán szereplő összegben a ($h \to 0$ esetére vonatkozó) határérték képzés és az összegzés sorrendje felcserélhető. Ehhez elegendő belátni, hogy elég nagy l-re a

$$\lim_{h \to 0} \sum_{k > l} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t)$$

tetszőlegesen kicsivé válik. Ez viszont következik az alábbi egyenlőtlenség sorozatból: $l > i$ esetén

$$\lim_{h \to 0} \sum_{k > l} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t) \leq \lim_{h \to 0} \sum_{k > l} \frac{p_{ik}(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[1 - \sum_{k=0}^{l} p_{ik}(h) \right] = - \sum_{k=0}^{l} a_{ik}.$$

Valóban, ha l elegendő nagy, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} = 0$ feltételre való tekintettel $-\sum_{k=0}^{l} a_{ik}$ tetszőleges $\varepsilon > 0$-nál kisebbé tehető. □

A Kolmogorov-egyenletek kezdeti feltétele a (6.5) követelmény, melyet tömören a $P(0) = I$ alakban írhatunk fel, ahol I az egységmátrix. Felmerül a kérdés, vajon a Kolmogorov-egyenletek egyértelműen megoldhatóak-e, azaz egy tágabb értelemben vett folytonos idejű konzervatív Markov-láncot egyértelműen meghatározza-e az infinitézimális mátrixa. E kérdésre egyszerű a felelet, ha a lánc állapottere véges.

Legyen ugyanis az állapotok száma n, a lánc infinitézimális mátrixa A. Ekkor a Kolmogorov-egyenletnek a $P(0) = I$ kezdeti feltételt kielégítő egyértelmű megoldása

$$P(t) = e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \dots . \tag{6.12}$$

Világos, hogy $P(t)$ kielégíti a (6.5)–(6.7) feltételekkel egyidejűleg a Chapman-Kolmogorov-egyenletet. Meg kell még mutatni, hogy $P(t)$ sztochasztikus mátrix. A (6.12) megoldásra a $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) = 1$ feltétel következik abból, hogy A akárhányadik hatványának elemeire teljesül a $\sum_j a_{ij}^{(n)} = 0$ feltétel. Ugyanis

$$\sum_j a_{ij}^{(n)} = \sum_j \sum_k a_{ik}^{(n-1)} a_{kj} = \sum_k a_{ik}^{(n-1)} \sum_j a_{ij} = 0.$$

A nemnegatívitás bizonyításához legyen

$$Q(t) = e^{-\mu t} \cdot P(t),$$

ahol

$$\mu = \min_i a_{ii} \le 0.$$

Ekkor

$$Q'(t) = (A - \mu I)Q(t) = B \cdot Q(t).$$

Az utóbbi egyenlet megoldása

$$Q(t) = e^{Bt} = I + Bt + \frac{B^2}{2!}t^2 + \dots .$$

Minthogy B elemei nem negatívak, $Q(t)$ elemei sem lehetnek negatívak. Következésképpen a

$$P(t) = e^{\mu t} Q(t)$$

mátrixot is nem negatív elemek alkotják.

Végtelen állapottér esetén a Kolmogorov-egyenletek (egyértelmű) megoldhatóságának kérdésére már nem válaszolhatunk ilyen egyszerűen. Még ha az A infinitézimális mátrixra a konzervativitás követelményét ki is rójuk, akkor is lehetséges a Kolmogorov-egyenleteknek végtelen sok megoldása.

Ha kikötjük az A infinitézimális mátrixra a konzervatívitáson felül a

$$\sup_i(-a_{ii}) \le K$$

feltételt,[4] akkor a véges állapottér esetéhez hasonlóan a Kolmogorov-egyenleteknek megoldása lesz a

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \dots$$

végtelen sorral értelmezett függvény. Ehhez lényegében az kell belátnunk, hogy a fenti sor elemenként abszolút konvergens. E célból vegyük észre, hogy érvényesek a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned} |a_{ij}^{(2)}| &= \Big|\sum_k a_{ik}a_{kj}\Big| \le \sum_k |a_{ik}|\,|a_{kj}| \\ &\le K\sum_k |a_{ik}| = K\Big(-a_{ii} + \sum_{j\ne i} a_{ij}\Big) \le 2\cdot K^2. \end{aligned}$$

Következésképpen tetszőleges n-re A^n bármely elemére

$$\big|a_{ij}^{(n)}\big| \le K\cdot(2K)^{n-1},$$

amiből az elemenkénti abszolút konvergencia következik.

Mind elméleti, mind alkalmazási szempontból érdekes a Markov-láncok azon esete, amikor az átmenetvalószínűségi mátrixra csak a gyengébb, $\sum_j p_{ij}(t) \le 1$ feltétel teljesül. Ilyen esetekben azt mondhatjuk, hogy a nem negatív egész számok nem merítik ki a Markov-lánc lehetséges állapotait. Az alkalmazási példákban ilyenkor még egy állapot figyelembe vétele szükséges, mely rendszerint a végtelen távoli pont, s ez arra utal, hogy „bizonyos eseményekből" véges t idő alatt végtelen sok következhet be pozitív, $1 - \sum_j p_{ij}(t) > 0$ valószínűséggel. Markov-láncok ilyen esete „bizonyos részecskék" (pl. biológiaiak vagy fizikaiak) szaporodásának valószínűségelméleti leírásakor fordul elő.

Az előbb láttuk, hogy ha egy konzervatív Markov-láncra a $\mu = \sup_i(-a_{ii})$ véges, akkor átmenetvalószínűségi mátrixára a $\sum_j p_{ij}(t) = 1$ feltétel minden i-re teljesül. Még konzervatív infinitézimális mátrix esetén is lehetséges, hogy az átmenetvalószínűségi mátrixa

[4] Ekkor a $\sum_j a_{ij} = 0$, $a_{ii} \le 0$, $a_{ij} \ge 0$ $(j \ne i)$ miatt teljesül, hogy $|a_{ij}| \le K$ minden i, j-re.

nem sztochasztikus. Egyszerű példát fogunk látni erre az ún. tiszta születési folyamatok tárgyalásakor.

A Kolmogorov-egyenletek megoldhatóságának, a megoldások tulajdonságainak vizsgálata komoly nehézségű kérdéseket vet fel, melyek részletesebb tárgyalására a továbbiakban nem térünk ki.

Az állapotváltozások mechanizmusa

Folytonos idejű Markov-láncokra érdekes, és amint látni fogjuk, igen fontos annak a kérdésnek a tanulmányozása, hogy milyen mechanizmus szerint megy végbe az idő folyamán a lánc állapotának változása. Látni fogjuk, hogy e mechanizmus leírásában jelentős szerepet játszanak az infinitézimális mátrix elemei. Jogosnak látszik az az elképzelés, hogy a lánc bizonyos, véletlen hosszúságú időtartamokat tölt az egyes állapotokban. Továbbá, minthogy Markov-láncról van szó, egy i állapotot, az abban való tartózkodási idő végén adott a^*_{ij} valószínűséggel követ a j állapot. A feladatunk ezek után az, hogy jellemezzük az egyes állapotokban való tartózkodási időket, és hogy meghatározzuk az a^*_{ij} átmeneti valószínűségeket.

Az első feladat megoldása lényegében ekvivalens a

$$\mathbb{P}(\xi_u = i,\ s \le u \le s+t \,|\, \xi_s = i) \tag{6.13}$$

valószínűség meghatározásával tetszőleges i állapotra. Minthogy feltételezzük a lánc homogenitását, s-et választhatjuk 0-nak is. Vizsgáljuk meg kicsit részletesebben a szóban forgó

$$\{\omega : \xi_u = i,\ 0 \le u \le t\} \tag{6.14}$$

eseményt. Valójában nincs is jogunk e halmazra eseményként hivatkozni, hiszen az valószínűségi változóknak megszámlálhatónál nagyobb számosságú halmazától függ. Pontosabban, a (6.14) alatti halmaz a $\{\xi_u = i\}$, $0 \le u \le t$, események metszete, mely nem feltétlenül esemény.

Ilyen jellegű problémák mindig fellépnek, amikor valamely folytonos idejű folyamat analitikus tulajdonságait vizsgáljuk, s ahhoz, hogy e problémákat egyáltalán tárgyalhassuk, további feltételeket kell kikötnünk a folyamatra vonatkozóan.

6.7. definíció. Egy valós értékű $\{\eta_t,\ t \in T\}$ sztochasztikus folyamatot *szeparábilisnak* nevezzük, ha létezik a T paramétertartománynak egy olyan megszámlálható R részhalmaza és az eseménytérnek egy zérus valószínűségű N eseménye úgy, hogy tetszőleges A zárt halmazra és bármely nyílt G intervallumra

$$\{\omega : \eta_t \in A,\ t \in G \cap R\} \setminus \{\omega : \eta_t \in A,\ t \in G \cap T\} \subseteq N. \tag{6.15}$$

Az R halmazt *szeparábilitási halmaznak* szokás nevezni. Könnyű észrevenni, hogy ha $R^* \supset R$ megszámlálható részhalmaza T-nek, akkor $\{\eta_t,\ t \in T\}$ R^*-gal is szeparábilis. Következésképpen feltehetjük, hogy a R szeparátibilitási halmaz T-ben mindenütt sűrű. Egy folyamatot *teljesen szeparábilisnak* mondunk, ha a T paramétertartományának bármely, mindenütt sűrű, megszámlálható részhalmaza szeparábilitási halmaz.

Vegyük észre, hogy a (6.15) baloldalán álló különbség-halmaz nem feltétlenül esemény. Ha azonban az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőt illetően kikötjük, hogy minden zérus valószínűségű eseménynek bármely részhalmaza esemény legyen, akkor a rajta értelmezett $\{\eta_t,\ t \in T\}$ szeparábilis folyamatra az

$$\{\omega : \eta_t \in A,\ t \in G \cap T\}$$

típusú halmazok is események.

A szeparábilitási követelmény kirovása a folyamatokra nem jelent erősebb korlátozást. Ugyanis lényegében bármely sztochasztikus folyamathoz lehet véle sztochasztikusan ekvivalens szeparábilis folyamatot konstruálni, s emellett, ha feltételezzük a kiindulási folyamat sztochasztikus folytonosságát, akkor teljesen szeparábilis modifikáció konstruálható. Nem térhetünk ki ezen állítások precízebb megfogalmazására és bizonyítására, miután egyrészt ezek speciálisabb függvénytani és mértékelméleti meggondolásokat igényelnének, másrészt a jövőben tárgyalásra kerülő kérdések többsége a szeparábilitás feltétele nélkül is kezelhető lesz.

A folytonos idejű Markov-láncok állapotváltozásainak mechanizmusával kapcsolatosan fontos az alábbi eredmény.

6.2. tétel. *Tegyük fel, hogy a $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ folytonos idejű Markov-lánc $P(t)$ átmenet-valószínűségi mátrixának elemei minden $t > 0$-ra pozitívak. Ekkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzen a láncnak teljesen szeparábilis modifikációja (a lánccal sztochasztikusan ekvivalens teljesen szeparábilis lánc) az, hogy $P(t)$ standard legyen.*

E tétel bizonyítása jelentősen támaszkodik a fentebb említett konstrukciókra, ezért erre sem térhetünk ki.[5]

Most már meghatározhatjuk a (6.13) alatti valószínűséget. Ehhez tegyük fel a láncunk sztochasztikus folytonosságát, s legyen $s = 0$. A 6.2. tétel értelmében feltehető, hogy a lánc teljesen szeparábilis. Válasszuk a $[0, t]$ intervallumban szeparábilitási halmaznak a

$$T_n = \left\{ t_k^{(n)} : t_k^{(n)} = \frac{k \cdot t}{2^n},\ 0 < k < 2^n \right\}$$

halmazok $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ egyesítését. A lánc teljes szeparábilitása miatt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_n = i,\ 0 \leq u \leq t \,|\, \xi_0 = i) &= \mathbb{P}(\xi_r = i,\ r \in R \,|\, \xi_0 = i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\xi_{t_k^{(n)}} = i,\ 0 < k < 2^n \,|\, \xi_0 = i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[p_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right]^{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left[1 - q_i \frac{t}{2^n} + o\left(\frac{t}{2^n}\right)\right]^{2^n} = e^{-tq_i}.
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a bizonyításunk akkor is jó, ha $q_i = \infty$. Ekkor ugyanis K-tól függő, elegendő nagy N_K-tól kezdve $1 - p_{ii}(\frac{t}{2^n}) > K \cdot \frac{t}{2^n}$, $n \geq N_K$, s így $\lim_{n\to\infty} \left[p_{ii}(\frac{t}{2^n})\right]^{2^n} \leq e^{-tK}$. Minthogy K-t tetszőleges nagyra választhatjuk, így valóban zérus a (6.13) alatti valószínűség.

Tetszőleges i állapotra az $\Omega_i = \{\omega : \xi_0(\omega) = i\}$ halmazon értelmezzük az i állapotból való első kilépés időpontját:

$$\tau_1^{(i)}(\omega) = \inf\{t \ :\ \xi_t(\omega) \neq i\}.$$

Ha feltesszük, hogy az alap valószínűségi mező $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ teljes ($A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = 0$ és $A' \subset A$-ből következik $A' \in \mathcal{F}$), és hogy a $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ folyamat szeparábilis, akkor $\tau_1^{(i)}$ az Ω_i halmazon értelmezett valószínűségi változó.[6]

Világos, hogy

$$\mathbb{P}(\tau_1^{(i)} > t \,|\, \xi_0 = i) = \mathbb{P}(\xi_u = i,\ 0 \leq u \leq t \,|\, \xi_0 = i),$$

[5]Lásd [**16**], 146. oldal, Theorem 3.

[6]Legyen $H \subset \Omega$, $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér. Az $\eta : H \to X$ leképezést a H részhalmazon értelmezett $(X, \mathcal{X})$ fázisterű sztochasztikus elemnek nevezzük, ha tetszőleges $B \in \mathcal{X}$-re $\eta^{-1}(B) \in \mathcal{F}_H$, ahol $\mathcal{F}_H$ elemei az $\mathcal{F}$-beli eseményeknek (halmazoknak) H-val való metszetei. Ilyen esetben η eloszlásán a $\mathbb{P}(\xi^{-1}(B)|H)$, $B \in \mathcal{X}$ feltételes valószínűségeket értjük.

ezért $\tau_1^{(i)}$ eloszlása exponenciális $q_i = -a_{ii}$ paraméterrel. Minthogy egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke éppen eloszlása paraméterének reciproka, ezért kézenfekvő a sztochasztikusan folytonos Markov-lánc állapotainak következő osztályozása.

6.8. definíció. A $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ sztochasztikusan folytonos Markov-lánc i állapotát *reguláris-nak* nevezzük, ha az $A = (a_{ij})$ infinitézimális mátrixában $0 < q_i = -a_{ii} < \infty$, és *pillanatnyinak* nevezzük, ha $q_i = \infty$, s végül *elnyelőnek* nevezzük, ha $q_i = 0$.

Az állapotváltozások mechanizmusával kapcsolatos második feladat, az a^*_{ij} valószínűségek vizsgálata céljából tekintsük az alábbi halmazt: rögzített i, n egészekre és $\beta > 0$-ra

$$\Lambda_{n,\beta}^{(j)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \omega : \xi(t,\omega) = i,\ 0 < t \leq \frac{k-1}{n},\ \xi(u,\omega) = j,\ \frac{k}{n} \leq u \leq \frac{k}{n} + \beta \right\}.$$

Ekkor $n \to \infty$ esetén (ha $i \neq j$)

$$\mathbb{P}\left(\Lambda_{n,\beta}^{(j)} \,|\, \xi_0 = i\right) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-q_i \frac{k-1}{n}} p_{ij}\left(\frac{1}{n}\right) e^{-q_j\beta} \to$$

$$\to a_{ij} \int_0^{\infty} e^{-q_i t} dt\, e^{-q_j \beta} = \frac{a_{ij}}{q_i} e^{-q_j \beta}.$$

Ha most $\Lambda_{\beta}^{(j)}$-t azon $\omega \in \{\xi_0 = i\}$ elemei események alkotják, amelyekre az i állapotból való első kilépési pillanat után legalább $\beta > 0$ ideig a lánc egyfolytában a j állapotban tartózkodik, akkor

$$\Lambda_{\beta}^{(j)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \Lambda_{n,\beta}^{(j)},$$

és

$$\mathbb{P}\left(\Lambda_{\beta}^{(j)} \,|\, \xi_0 = i\right) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \Lambda_{n,\beta}^{(j)} \,|\, \xi_0 = i \right) \geq \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\Lambda_{k,\beta}^{(j)} \,|\, \xi_0 = i\right) = \frac{a_{ij}}{q_i} e^{-q_j\beta}.$$

Vegyük ezután észre, hogy $\Lambda_{\beta}^{(j)} \subseteq \Lambda_{\beta'}^{(j)}$, hacsak $\beta \geq \beta'$. Ezért ha $0 < \beta_k \searrow 0 \quad (k \to \infty)$, akkor a

$$\Lambda^{(j)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_{\beta_k}^{(j)}$$

halmaz esemény, és független a $\{\beta_k,\ k > 0\}$ sorozat választásától. $\Lambda^{(j)}$-hez azok az ω elemei események tartoznak, amelyekre $\xi_0 = i$ és az i állapotból való első kilépési pillanat után a lánc valamely $\tau_1^{(i)}$ kezdőpontú nyílt intervallumon a j állapotban tartozkodik. Ezen nyílt intervallum hossza, δ, függhet ω-tól, $\delta = \delta(\omega)$, de minden $\omega \in \Lambda^{(j)}$-re $\delta(\omega) > 0$. Világos, hogy

$$\mathbb{P}\big(\Lambda^{(j)} \,|\, \xi_0 = i\big) \geq \frac{a_{ij}}{q_i}. \tag{6.16}$$

Tekintsük az előző egyenlőtlenséget minden $j \neq i$-re, és összegezzük a megfelelő oldalakat j szerint. Kapjuk, hogy

$$1 = \sum_{j \neq i} \mathbb{P}\big(\Lambda^{(j)} \,|\, \xi_0 = i\big) \geq \frac{\sum_{j\neq i} a_{ij}}{q_i}.$$

Ha feltesszük, hogy a láncunk konzervatív, akkor $\sum_{j \neq i} a_{ij} = q_i$, ahonnan következik, hogy konzervatív lánc esetében (6.16)-ban minden j-re az egyenlőségnek kell teljesülnie.

Megjegyezzük, hogy érveléseink problémamentesek, ha mind q_i, mind q_j pozitív, más esetek nem is igen érdekesek.

Végül azt kellene még belátnunk, hogy a $\Lambda^{(j)}$-hez tartozó ω elemei eseményekre, ha $\tau_1^{(i)}$ az i állapotból való első kilépés pillanata, akkor

$$\xi_{\tau_1^{(i)}(\omega)}(\omega) \in \{i, j\}, \tag{6.17}$$

azaz, hogy a $t = 0$ pillanatban az i állapottal kezdődő trajektoriáknak az i állapot elhagyásának pillanatában a $\Lambda^{(j)}$ halmazon vagy i, vagy j az értéke. Az, hogy ez valójában így van, a lánc szeparábilitásának következménye. Ennek megmutatásához kicsit mélyebben bele kellene menni a szeparábilis folyamatok trajektoriái tulajdonságainak vizsgálatába, melyre azonban e jegyzet keretében nem vállalkozhatunk (ajánljuk e kérdést illetően [**1**]-et).

Ha most elfogadjuk (6.17)-et, akkor $\Lambda^{(j)}$ azt az eseményt jelenti, hogy az i állapot után közvetlenül a j állapot következik. Az a^*_{ij}-gal ezen esemény valószínűségét jelöltük, azt kaptuk tehát, hogy $a^*_{ij} = a_{ij}/q_i$.

Eredményeinket foglaljuk össze az alábbi tételbe.

6.3. tétel. *Legyen a $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ folytonos idejű Markov-lánc sztochasztikusan folytonos, konzervatív és teljesen szeparábilis. Ekkor tetszőleges i állapotára*

$$\mathbb{P}(\xi_u = i,\ 0 \leq u \leq t \,|\, \xi_0 = i) = e^{-q_i t},$$

s ha q_i és q_j pozitívak, akkor annak valószínűsége, hogy az i állapot után a j állapot következik, a_{ij}/q_i.

Állapotosztályozás, ergodicitás és stacionaritás

Hasonlóan a diszkrét esethez, a folytonos idejű Markov-láncok állapotaira is bevezethető egy osztályozás, melynek terminológiájában több (gyakorlati szempontból is) fontos tulajdonság fogalmazható meg.

Mindenekelőtt emlékeztetünk azon korábbi megjegyzésünkre, amely szerint egy $P(t)$ átmenetvalószínűségi mátrix elemei mint idő-függvények vagy azonosan zérusak, vagy szigorúan pozitívak. Ezért folytonos idő esetén az állapotok osztályozását szolgáló értelmezések az alábbiak szerint adhatók meg.

6.9. definíció. Azt fogjuk mondani, hogy az i *állapot után következik* a j állapot ($i \rightharpoonup j$), ha a $p_{ij}(t)$ függvény pozitív. Ha $i \rightharpoonup j$ esetén $j \rightharpoonup i$ is fennáll, akkor ezt a tényt $i \rightleftharpoons j$ módon jelöljük, s azt mondhatjuk, hogy az i, j *állapotok egymásból kölcsönösen elérhetők.*

Ugyanazokkal az érvelésekkel, mint amelyeket diszkrét esetben alkalmaztunk, megmutatható, hogy már a $\rightharpoonup$ reláció tranzitív, következésképpen tranzitív a $\rightleftharpoons$ reláció is. Nyilvánvaló, hogy a $\rightleftharpoons$ reláció szimmetrikus, további reflexív minden olyan i állapotra, amelyre $p_{ii}(t) > 0$. Ha $p_{ii}(t) = 0$, akkor nincs olyan j állapot, amelyre $i \rightleftharpoons j$ fennállna.

Mint diszkrét esetben, az állapottérnek egy diszjunkt halmazokra (osztályokra) való felbontását kapjuk, ha az egymásból kölcsönösen elérhető állapotokat ugyanazon osztályba soroljuk, s továbbá ha kikötjük, hogy ha egy i állapotra $p_{ii}(t) \equiv 0$, akkor az i állapot önmaga alkosson egy osztályt. Természetesen egy i állapot alkothat önmaga is egy osztályt, akkor is ha $p_{ii}(t) > 0$. Például, ha $p_{ii}(t) \equiv 1$, továbbá előfordulhat az is, hogy $0 < p_{ii}(t) < 1$ minden t-re, de nincs olyan j állapot, amelyre $i \rightleftharpoons j$ fennállna. Ilyen esetekben is i önmaga alkot egy osztályt. Nyilvánvaló, hogy az állapottérnek ilymódon történő felbontása egyértelmű.

A diszkrét idejű láncok esetében adott értelmezésekkel definiáljuk most is az állapotok lényeges és lényegtelen tulajdonságát, melyek ez esetben is osztálytulajdonságoknak bizonyulnak.

Mielőtt a visszatérőség tárgyalására térnénk, definiálunk egy fogalmat, mely a továbbiakban igen hasznos lesz számunkra.

6.10. definíció. Legyen $\mathcal{C} : \{\xi_t,\ t \geq 0\}$ folytonos idejű Makov-lánc. Tetszőleges $h > 0$-ra tekintsük a

$$\mathcal{C}_h\ :\ \{\xi_{nh},\ n = 0, 1, 2, \dots\}$$

diszkrét idejű láncot, melyet szokás a $\mathcal{C}$ *h-lépéses vázának* nevezni.

A $\mathcal{C}_h$ átmeneti mátrixa $(p_{ij}(h))$, n-lépéses átmeneti mátrixa $(p_{ij}(nh))$.

6.2. megjegyzés. Minthogy a $\mathcal{C}$ lánc $p_{ij}(t)$ átmenetvalószínűségi függvénye tetszőleges i, j-re vagy azonosan 0, vagy sehol sem zérus, ezért ha $i \rightleftharpoons j$ a $\mathcal{C}$ láncra nézve, akkor $i \rightleftharpoons j$ tetszőleges $\mathcal{C}_h$ vázra is. Ennek fordítottja triviális. Ezért $\mathcal{C}$ és a $\mathcal{C}_h$ láncok közös állapotterének a $\rightleftharpoons$ reláció alapján történő felbontásai azonosak. Vegyük még észre, hogy $i \rightleftharpoons i$ esetén $p_{ii}(nh) > 0$ minden $n \geq 1$-re, azaz bármely $\mathcal{C}_h$ vázra az i állapot periódusa 1. Ezen megjegyzésünkből következik, hogy azok a „tulajdonságok", amelyek diszkrét esetben osztálytulajdonságoknak bizonyultak, folytonos idejű láncokra is ilyenek maradnak.

6.11. definíció. A $\mathcal{C}$ folytonos idejű lánc egy i állapotát *visszatérőnek* nevezzük, ha valamely $h > 0$-ra a

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(nh) \tag{6.18}$$

sor divergál, azaz ha az i állapot valamely $\mathcal{C}_h$ váznak visszatérő állapota.

6.4. tétel. *Egy sztochasztikusan folytonos láncra a* (6.18) *sor valamely* $h > 0$*-ra akkor és csak akkor divergál, ha*

$$\int_0^\infty p_{ii}(t)dt = \infty.$$

Továbbá a (6.18) *sor vagy minden* $h > 0$*-ra végtelen, vagy minden* $h > 0$*-ra véges.*

Bizonyítás. Legyen

$$\delta(h) = \min_{0 \leq r \leq h} p_{ii}(r).$$

A lánc sztochasztikus folytonosságából és a Chapman-Kolmogorov-egyenletekből következik, hogy $\lim_{h \to 0} \delta(h) = 1$, és

$$\min_{0 \leq r \leq h} p_{ii}(t + r) \geq p_{ii}(t) \min_{0 \leq r \leq h} p_{ii}(r) = p_{ii}(t) \cdot \delta(h),$$

következésképpen

$$m_n(h) = \min_{nh \leq t \leq (n+1)h} p_{ii}(t) \geq \delta(h) p_{ii}(nh).$$

Hasonlóan $0 < r < h$, $t = nh + r$-re

$$p_{ii}((n + 1)h) \geq p_{ii}(nh + r) p_{ii}(h - r) \geq p_{ii}(t)\delta(h),$$

azaz

$$M_n(h) = \max_{nh \leq t \leq (n+1)h} p_{ii}(t) \leq \delta^{-1}(h) p_{ii}((n + 1)h).$$

Az $m_n(h)$ és a $M_n(h)$-ra vonatkozó egyenlőtlenségekből kapjuk, hogy bármely $N \geq 1$-re

$$h\delta(h)\sum_{n=0}^{N-1} p_{ii}(nh) \leq h\sum_{n=0}^{N-1} m_n(h) \leq \int_0^{Nh} p_{ii}(t)dt$$
$$\leq h \cdot \sum_{n=0}^{N-1} M_n(h) \leq h\delta^{-1}(h)\sum_{n=0}^{N-1} p_{ii}((n+1)h).$$

Minthogy N-et tetszőlegesen választottuk, innen tételünk első része következik. Az előző egyenlőtlenségsorozat igaz bármely $h > 0$-ra, ezért állításunk második része is következik. □

6.12. definíció. Folytonos idejű láncokra egy visszatérő i állapotot *ergodikusnak* mondunk, ha létezik és pozitív a

$$\lim_{t\to\infty} p_{ii}(t)$$

határérték.

6.3. megjegyzés. A diszkrét idejű láncokra vonatkozó (5. fejezet) 5.15. tétel értelmében bármely $\mathcal{C}_h$ $(h > 0)$ lánc tetszőleges (i,j) elempárjára létezik a $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(nh) = \pi_{ij}$ határérték.

Innen elég egyszerűen belátható (lásd [**1**], II. rész, 10.1 tételét), hogy a folytonos idejű láncok tetszőleges (i,j) elempárjára is tétezik a

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_{ij}$$

határérték. Eszerint egy visszatérő i állapot ergodikus, ha $\pi_{ii} > 0$. Ha egy visszatérő i állapotra $\pi_{ii} = 0$, akkor az i állapotot *zérus állapotnak* nevezzük. Világos, hogy az állapotoknak ezen tulajdonságai folytonos idő esetén is megtartják osztálytulajdonság jellegüket.

Az állapotok visszatérő tulajdonsága folytonos idő esetén is kifejezhető, a diszkrét esetben tárgyaltakhoz hasonlóan, az „első megérkezési", ill. az „első visszaérkezési" valószínűségek segítségével. Az utóbbiakat most a következőképpen értelmezzük.

6.13. definíció. Az első megérkezési valószínűség (i-ből a j-be a t idő alatt):

$$F_{ij}(t) = \mathbb{P}(\xi_s = j \text{ valamely } 0 < s < t\text{-re} \mid \xi_0 = i);$$

az első visszaérkezés valószínűsége (i-ből i-be a t idő alatt):

$$F_{ii}(t) = \mathbb{P}(\xi_{t_1} \neq i,\ \xi_{t_2} = i \text{ valamely } 0 < t_1 < t_2 < t\text{-re} \mid \xi_0 = i).$$

6.4. megjegyzés. Az 5. fejezet 5.7. tételének megfelelő állítás:

$$p_{ij}(t) = \delta_{ij}e^{-q_i t} + \int_0^t p_{jj}(t-s)dF_{ij}(s). \tag{6.19}$$

Ennek bizonyítása a diszkrét esetben alkalmazott érvelések ismétlésével történhet.[7]

Bevezetve a $p_{ij}(t)$, $F_{ij}(t)$, $F_{ii}(t)$ függvények Laplace-transzformáltjait, majd a szóban forgó esetnek megfelelően alkalmazva Abel-, ill. Tauber-típusú tételeket, igazolhatók a következő állítások.

[7] Lásd [**16**], 213. oldal, (3).

6.5. tétel. *α) (Az 5. fejezet 5.8. tételével analóg tétel) $i \neq j$-re*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t p_{ij}(u)du}{\int_0^t p_{jj}(u)du} = F_{ij}(\infty).$$

β) az i állapot akkor és csak akkor visszatérő ha $F_{ii}(\infty) = 1$.

γ) minden visszatérő i állapotra

$$\lim_{t\to\infty} p_{ii}(t) = \frac{1}{q_i m_{ii}},$$

ahol

$$m_{ii} = \int_0^\infty t d\, F_{ii}(t).$$

(Ha $m_{ii} = \infty$, akkor a határérték nullával egyenlő.)

α)-t lásd **[16]**, 213. oldal, (5); β)-t és γ)-t lásd **[16]**, 214. oldal, Theorem 3.

A γ) állítás értelmében egy visszatérő i állapot akkor és csak akkor ergodikus, ha $m_{ii} < \infty$. Hasonlóan az 5. fejezet 5.13. tételéhez, a γ) állítás bizonyítása a folytonos felújítási folyamatokra vonatkozó Blackwell-tétel alapján történik, melyre szintén rámutatunk majd a felújítási folyamatok tárgyalásakor.[8]

A (6.19) formula alapján γ)-ból következik az alábbi állítás:

γ') ha $i \rightleftharpoons j$ és j visszatérő, akkor

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \frac{1}{q_j m_{jj}}.$$

6.5. megjegyzés. A gyakorlati problémákban felmerülő folytonos idejű Markov-láncok állapottere általában maga alkot egy lényeges osztályt. Ekkor két eset lehetséges:

a) minden i, j állapotárra

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = 0;$$

b) minden állapot ergodikus és minden i, j-re

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = u_j > 0.$$

Az 5. fejezet végén tárgyaltakhoz hasonló módon belátható, hogy a b) esetben $\sum_j u_j = 1$, és minden j és $t > 0$-ra

$$u_j = \sum_i u_i p_{ij}(t). \tag{6.20}$$

6.14. definíció. A (6.20) egyenletrendszert kielégítő $\{u_j,\ j \geq 0\}$ eloszlást a $P(t) = (p_{ij}(t))$ átmenetvalószínűségű folytonos idejű lánc *stacionárius eloszlásának* nevezzük.

A diszkrét idő esetéhez hasonlóan most is igaz, hogy egy folytonos idejű Markov-lánc akkor és csak akkor rendelkezik egyértelmű stacionárius eloszlással, ha a lánc ergodikus.

Egy folytonos idejű ergodikus Markov-lánc ergodikus eloszlásának meghatározása vagy a

$$\lim_{t\to\infty} p_{ii}(t)$$

határértékek kiszámítását jelenti, vagy valamilyen $t > 0$ mellett a (6.20) egyenletrendszer $\sum_j u_j = 1$ feltételt kielégítő megoldásának megkeresésével történhet. Rámutatunk egy harmadik útra is mely sok esetben előnyös. Ez az út akkor követhető, ha a lánc kielégíti a Kolmogorov-egyenleteknél szereplő (6.5)–(6.8) feltételeket.

[8] A jegyzetben nem kerül rá sor.

Tegyük fel tehát, hogy a $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ folytonos idejű láncra érvényesek a 6.1. tételben szereplő (i), (ii) Kolmogorov-egyenletek. Jelölje a

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_0(t) \\ Q_1(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

oszlopvektor a lánc t pillanatbeli eloszlását. Ekkor

$$Q(t) = P(t)^* Q(0),$$

ahol $P(t)$ a lánc átmenetvalószínűségi mátrixa, $Q(0)$ a kezdeti eloszlás (oszlopvektora), s a * a transzpozíció műveletét jelenti, Kolmogorov második egyenlete alapján, ha A a lánc infinitézimális mátrixa, akkor

$$\begin{aligned}\frac{dQ(t)}{dt} &= (P'(t))^* Q(0) = (P(t) \cdot A)^* Q(0) \\ &= A^* P(t)^* Q(0) = A^* Q(t).\end{aligned}$$

6.6. megjegyzés. Más szóval, Kolmogorov második egyenletéből következik a $Q(t)$ abszolút eloszlásra a

$$Q'(t) = A^* Q(t) \tag{6.21}$$

differenciálegyenlet-rendszer, melyre szokás *állapotegyenletként* is hivatkozni.

6.7. megjegyzés. Ha most a lánc stacionárius és $\mathcal{U} = \{u_0, u_1, \dots\}^*$ a stacionárius eloszlása, akkor

$$\mathcal{U} = P(t)^* \cdot \mathcal{U}.$$

Mindkét oldal differenciálása után kapjuk, hogy a stacionárius eloszlás kielégíti az

$$A^* \mathcal{U} = 0 \tag{6.22}$$

homogén lineáris egyenletrendszert. A stacionárius eloszlás (vektor) ennek az egyenletrendszernek a $\sum u_j = 1$ feltételt kielégítő megoldása.

Születési és kihalási folyamatok

Legyen $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ folytonos idejű homogén Markov-lánc $(p_{ij}(t))$ átmenetvalószínűségi mátrixszal. Az állapotterét alkossák a nem negatív egész számok. A láncot születési és kihalási folyamatnak nevezzük, ha az átmenetvalószínűségi mátrixára teljesülnek az alábbi feltételek, $h \to 0$ esetén

$$\begin{aligned}
&p_{i\,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h), && i \geq 0,\\
&p_{i\,i-1}(h) = \mu_i h + o(h), && i \geq 1,\\
&p_{ii}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i) h + o(h), && i \geq 1,\\
&p_{00}(h) = 1 - \lambda_0 h + o(h), && \\
&p_{ij}(h) = o(h), && |i-j| > 1.
\end{aligned}$$

A λ_i $(i \geq 0)$, μ_i $(i \geq 1)$ nem negatív valós számok, melyeket a születési és kihalási folyamat *átmenetintenzitásainak* szokás nevezni. A fenti feltételek valójában azt jelentik, hogy a születési és kihalási folyamatra teljesülnek a (6.5)-(6.8) feltételek, azaz, hogy érvényesek a Kolmogorov-egyenletek, és hogy a lánc $A = (a_{ij})$ infinitézimális mátrixa

$$\begin{aligned}
&a_{i\,i+1} = \lambda_i, && && i \geq 0,\\
&a_{i\,i-1} = \mu_i, && && i > 0,\\
&a_{ii} = -(\mu_i + \lambda_i), && && i > 0,\\
&a_{00} = -\lambda_0, && && \\
&a_{ij} = 0, && \text{hacsak} && |i-j| > 1.
\end{aligned}$$

A Kolmogorov-egyenletek jobboldalain most csak véges számú tag szerepel. Pontosabban

$$p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} p_{i\,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_{ij}(t) + \mu_{j+1} p_{i\,j+1}(t)$$

az első egyenlet,

$$p'_{ij}(t) = \mu_i p_{i-1\,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_{ij}(t) + \lambda_i p_{i+1\,j}(t)$$

második egyenlet. Az $i = 0$, ill. $j = 0$-ra megfelelően módosítani kell az egyenleteket.

Értelmezzük most a

$$Q(x) = \{Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x), \dots\}$$

polinomsorozatot a

$$-x \cdot Q^*(x) = A \cdot Q^*(x)$$

egyenlet alapján. Részletesebben, $Q_0(x) = 1$ és minden $n \geq 1$-re

$$-xQ_n(x) = \mu_n Q_{n-1}(x) - (\lambda_n + \mu_n) Q_n(x) + \lambda_n Q_{n+1}(x).$$

Tetszőleges $n \geq 1$-re a $Q_n(x)$ polinom pontosan n-edfokú, s teljes indukcióval megmutatható, hogy főegyütthatója

$$\frac{(-1)^n}{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n}.$$

J. L. McGregor és S. Karlin [**5**], [**6**] dolgozataiban a születési és kihalási folyamatok tanulmányozása a $(P_{ij}(t))$ átmenetvalószínűségi mátrixnak a következő integrál előállításán alapul:

$$p_{ij}(t) = \pi_j \int_0^\infty e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x)\, d\,\Psi(x), \tag{6.23}$$

ahol

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_k = \frac{\lambda_0 \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \ldots \mu_k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

és $\Psi(x)$ monoton nem csökkenő függvény, olyan amelyre a $\{Q_n(x),\ n \geq 0\}$ polinomsorozat ortogonális, azaz

$$\int_0^\infty Q_i(x) Q_j(x)\, d\,\Psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ \dfrac{1}{\pi_i}, & \text{ha } i = j. \end{cases} \tag{6.24}$$

A [**5**], [**6**] dolgozatok legfontosabb eredményei a következők.

6.6. tétel. 1) *Ahhoz, hogy a* (6.23)*-ból származó momentum problémának egyértelmű megoldása legyen, szükséges és elégséges, hogy a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\pi_n+\frac{1}{\lambda_n\pi_n}\right) \tag{6.25}$$

sor divergáljon. Ez esetben (6.23) *a Kolmogorov-egyenleteknek a* (6.2) *és* (6.3) *feltételeket kielégítő egyértelmű megoldása.*

2) *A születési és kihalási folyamat akkor és csak akkor visszatérő, ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n\pi_n}=\infty.$$

3) *Az ergodicitás (ill. a stacionárius eloszlás egyértelmű létezésének) szükséges és elégséges feltétele*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n<\infty,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n\pi_n}=\infty.$$

4) *Az állapotok akkor és csak akkor* visszatérő *zérus állapotok, ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n\pi_n}=\infty.$$

5) *Az előzőekből következően, a születési és kihalási folyamat akkor és csak akkor nem visszatérő, ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n=\infty,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n\pi_n}<\infty.$$

6.8. megjegyzés. Ha a (6.25) alatti sor konvergens, akkor (6.24) momentumproblémának, s ezzel egyúttal a Kolomogorov-egyenleteknek végtelen sok megoldása lehetséges, melyekre a (6.2) és a (6.3) feltételek általában nem teljesülnek.

Határozzuk most meg a születési és kihalási folyamat ergodikus eloszlását (feltételezve, hogy létezik). A (6.22) egyenletrendszer most az alábbi rekurzív összefüggéssel ekvivalens: ha $\{p_0,p_1,\dots,p_k,\dots\}$ az ergodikus eloszlás, akkor

$$\lambda_0p_0=\mu_1p_1,$$

és $k\geq 1$-re

$$\lambda_{k-1}p_{k-1}+\mu_{k+1}p_{k+1}=(\lambda_k+\mu_k)p_k.$$

Innen teljes indukcióval belátható, hogy $\frac{p_k}{p_{k-1}}=\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}$, következésképpen

$$p_k=\frac{p_k}{p_{k-1}}\cdot\frac{p_{k-1}}{p_{k-2}}\dots\frac{p_1}{p_0}p_0=\frac{\lambda_{k-1}\dots\lambda_0}{\mu_k\dots\mu_1}p_0=\pi_k\cdot p_0.$$

A p_0 a $\sum_{k=0}^{\infty}p_k=1$ feltételből adódik,

$$p_0=\frac{1}{\sum_0^{\infty}\pi_n},\quad \text{így } p_k=\frac{\pi_k}{\sum_0^{\infty}\pi_n}\quad (k\geq 0).$$

($p_0\neq 0$, minthogy az ergodicitás feltétele: $\sum_0^{\infty}\pi_n<\infty$.)

Tiszta születési folyamat

Ha az átmenetintenzitások olyanok, hogy $\mu_n = 0$ minden $n > 0$-ra, akkor tiszta születési folyamatról beszélünk, mely esetben a t pillanatbeli $\{P_0(t), P_1(t), \dots, P_k(t), \dots\}$ eloszlásra vonatkozó (6.21) egyenletrendszer az alábbi egyszerű formát ölti:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t), \\ P_k'(t) = \lambda_{k-1} P_{k-1}(t) - \lambda_k P_k(t). \end{cases} \tag{6.26}$$

6.7. tétel. *Tiszta születési folyamatra minden véges $t > 0$ mellett $\sum_0^\infty P_k(t) = 1$ akkor és csak akkor, ha $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\lambda_k} = \infty$.*

Bizonyítás. Legyen $S_n(t) = \sum_0^n P_k(t)$. Ekkor (6.26) alapján

$$\frac{dS_0(t)}{dt} = -\lambda_0 S_0(t), \tag{$*$}$$

$$\frac{dS_n(t)}{dt} = -\lambda_n [S_n(t) - S_{n-1}(t)], \quad n > 0. \tag{$**$}$$

Ha $\{q_0, q_1, \dots, q_k, \dots\}$ jelöli a folyamat kezdeti eloszlását, akkor

$$S_n(0) = \sum_{i=0}^n q_i.$$

Vezessük be ezután az $S_n(t)$ függvények Laplace-transzformáltjait: $z > 0$-ra legyen

$$\hat{S}_n(z) = \int_0^\infty e^{-zt} S_n(t) dt, \qquad n \ge 0. \tag{$\dagger$}$$

Ekkor az $S_n(t)$-kre vonatkozó $(**)$ differenciálegyenletekből és a (($\dagger$)-ból parciális integrálással adódó)

$$\int_0^\infty e^{-zt} S_n'(t) dt = z \cdot \hat{S}_n(z) - S_n(0) \tag{$\ddagger$}$$

kapcsolatból következően

$$\hat{S}_n(z) = \frac{S_n(0) + \lambda_n \hat{S}_{n-1}(z)}{\lambda_n + z} < \frac{1 + \lambda_n \hat{S}_{n-1}(z)}{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda_n} + \hat{S}_{n-1}(z).$$

$(*)$-ból (és ($\ddagger$) $n = 0$ra vett alakjából)

$$\hat{S}_0(z) = \frac{q_0}{\lambda_0 + z} < \frac{1}{\lambda_0}.$$

Teljes indukcióval belátható, hogy tetszőleges $n > 0$-ra

$$\hat{S}_n(z) < \sum_0^n \frac{1}{\lambda_k} < \sum_0^\infty \frac{1}{\lambda_k},$$

azaz minden $z > 0$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \hat{S}_n(z) \le \sum_0^\infty \frac{1}{\lambda_k}. \tag{6.27}$$

Vegyük ezután észre, hogy ha $\sum_k P_k(t) = 1$ minden $t > 0$-ra, akkor

$$\lim_{n\to\infty} S_n(t) = 1 \quad (t > 0), \tag{6.28}$$

következésképpen minden $z > 0$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \hat{S}_n(t) = \frac{1}{z}. \tag{6.29}$$

(Ez (†)-ból $n \to \infty$ esetén adódik kihasználva, hogy ze^{-zt} a $(0,\infty)$-en sűrűségfüggvény.) A (6.28) és a (6.29) feltételek ekvivalensek. A tétel állítása ezekután abból következik, hogy a (6.27) és a (6.29) feltételek csak akkor nem ellentmondóak, ha a (6.27) egyenlőtlenség jobb oldala végtelen. □

A Poisson-folyamat

A tiszta születési folyamatot Poisson-folyamatnak nevezzük, ha átmenetintenzitásai állandóak: $\lambda_i = \lambda$ minden $i \geq 0$-ra.

Az elnevezés indoklásaként bebizonyítjuk, hogy ebben az esetben a folyamat bármely t pillanatbeli eloszlása Poisson-eloszlás. Legyen $P_i(t)$ $(i \geq 0)$ annak a valószínűsége, hogy a folyamat a t pillanatban az i állapotban van. Ekkor a (6.26) egyenletrendszer:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t),$$

$$P_k'(t) = \lambda \cdot P_{k-1}(t) - \lambda P_k(t), \qquad k > 0.$$

A megoldás megkeresése céljából legyen $\mathrm{Re}\, s > 0$-ra

$$g_k(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_k(t) dt.$$

(Ebből parciális integrálással, majd a fenti differenciálegyenletek felhasználásával adódik $g_0(s) = \frac{P_0(0)}{\lambda+s}$ és $g_n(s) = \frac{P_n(0)+\lambda g_{n-1}(s)}{\lambda+s}$.) A $P_0(0) = 1$, $P_k(0) = 0$ $(k > 0)$ kezdeti feltételek figyelembe vételével nyerjük, hogy

$$g_0(s) = \frac{1}{\lambda+s}, \quad g_k(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s} g_{k-1}(s) \quad (k > 0).$$

Innen minden $k \geq 0$-ra

$$g_k(s) = \frac{\lambda^k}{(\lambda+s)^{k+1}},$$

amelyből visszatranszformálással végül is a

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad (k \geq 0)$$

formula adódik, s ezzel állításunk igazolása teljes.

Tiszta kihalási folyamat

Az esetben, amikor a λ_i $(i \geq 0)$ átmenetintenzitások azonosan zérusak, tiszta kihalási folyamatról beszélünk. Ilyenkor a 0 pont elnyelő állapot, s egyúttal az egyetlen lényeges állapotot, míg a többi állapot mind lényegtelen.

Legyen $\mu_k = k\mu$, $k > 0$, ahol $\mu > 0$ rögzített. Ekkor a (6.21) egyenletek:

$$P_k'(t) = -\mu k P_k(t) + \mu(k+1) P_{k+1}(t) \quad (k \geq 0).$$

Ennek az egyenletrendszernek a $P_n(0) = 1$, $P_k(0) = 0$ $(k \neq n)$ kezdő feltétel melletti megoldása

$$P_k(t) = \begin{cases} \binom{n}{k} e^{-n\mu t} \left(e^{\mu t} - 1\right)^{n-k}, & 0 \leq k \leq n\,, \\ 0, & \text{máskor}, \end{cases}$$

melyről a Laplace-transzformáltak alkalmazásával meggyőződhetünk.[9]

A többkiszolgálós várakozási probléma

[9] Lásd pl. [2], §2.4. Az eredmény éppen az n és $e^{-\mu t}$ paraméterű binomiális eloszlás.

Befejezésül tekintsük a következő alkalmazási problémát. Álljon a rendelkezésre n számú kiszolgáló készülék bizonyos, azonos típusú igények kiszolgálására. Tegyük fel, hogy az igények érkezése közti időtartamok független és azonos exponenciális eloszlásúak $\lambda > 0$ paraméterrel. Annak valószínűsége, hogy egyszerre egynél több igény érkezik be, legyen zérus. Ezenkívül feltesszük még, hogy a kiszolgálási időtartamok is függetlenek mind egymás között, mind pedig az érkezési folyamattól, továbbá, hogy azonos exponenciális eloszlásúak közös $\mu > 0$ paraméterrel.

Jelentse most ξ_t a rendszerben jelenlévő igények t pillanatbeli számát. Az érkezési időközök és a kiszolgálási időtartamok exponenciális eloszlása következtében a $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ folyamat Markov-tulajdonságú, sőt az egyszerűbb struktúrájú születési és kihalási folyamat típusához tartozik. Az átmenetintenzitások az alábbiak lesznek:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda, && \text{minden } i \geq 0\text{-ra}, \\ \mu_i &= i\mu, && \text{ha } 0 < i < n, \\ \mu_i &= n\mu, && \text{ha } n \leq i. \end{aligned}$$

A (6.21) (állapot) egyenletek a

$$P_k(t) = \mathbb{P}(\xi_t = k), \qquad k \geq 0,$$

valószínűségekre a következők:

$$\begin{aligned} P_0'(t) &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ P_k'(t) &= \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)P_k(t) + \mu(k+1)P_{k+1}(t), && (0 < k < n), \\ P_k'(t) &= \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + n\mu)P_k(t) + n\mu P_{k+1}(t), && (k \geq n). \end{aligned}$$

Most

$$\begin{aligned} \pi_k &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot \frac{1}{k!}, && \text{ha } 0 \leq k < n, \\ \pi_k &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{n \cdot \mu}\right)^{n-k}, && \text{ha } k \geq n. \end{aligned}$$

A tekintetbe vett $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ folyamatra az ergodicitás feltétele a 6.6. tétel alapján

$$\sum_0^\infty \pi_n < \infty, \quad \sum_0^\infty \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \infty$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\varrho = \frac{\lambda}{n \cdot \mu} < 1.$$

A stacionárius eloszlás ez esetben:

$$\lim_{t \to \infty} P_k(t) = \begin{cases} P_0 \dfrac{(n\varrho)^k}{k!}, & \text{ha } 0 \leq k < n, \\ P_0 \dfrac{(n\varrho)^n}{n!} \varrho^{k-n}, & \text{ha } k \geq n, \end{cases}$$

ahol

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n\varrho)^k}{k!} + \frac{\varrho^n}{(1-\varrho)n!}\right]^{-1}.$$

Feladatok

1. Legyen $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ homogén, független növekményű sztochasztikus folyamat, melynek fázisterét a nem negatív egész számok alkotják. A homogenitás azt jelenti, hogy a
$$\mathbb{P}\left(\{\xi_{s+t} - \xi_s = k\}\right), \qquad k \geq 0,$$
valószínűségek csak t-től függnek (azaz s-től nem). Egy folyamatot független növekményűnek mondunk, ha tetszőleges $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$-re a
$$\xi_{t_0},\ \xi_{t_1} - \xi_{t_0},\ \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$$
valószínűségi változók függetlenek. A
$$\pi_i(t) = \mathbb{P}\left(\{\xi_t - \xi_0 = i\}\right), \quad i \geq 0,$$
valószínűségekre legyenek érvényesek a
$$\lim_{t\to 0} \frac{\pi_1(t)}{t} = \lambda > 0 \quad \text{és a} \quad \lim_{t\to 0} \frac{1 - \pi_0(t) - \pi_1(t)}{t} = 0$$
feltételek. Mutassuk meg, hogy akkor
$$\pi_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \quad (i = 0, 1, \ldots),$$
pontosabban, hogy $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ λ-paraméterű homogén Poisson-folyamatot alkot (azaz egy tiszta születési folyamat $\lambda_n = \lambda$ paraméterekkel).
2. Legyen $F(s,t)$ egy ξ_t egész értékű valószínűségi változó generátorfüggvénye. Mutassuk meg, hogy $F(\frac{1}{s}, t)$ a $-\xi_t$ változó generátorfüggvénye.
3. Legyenek $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$, $\{\eta_t,\ t \geq 0\}$ $\lambda_1 > 0$, ill. $\lambda_2 > 0$ paraméterű független Poisson-folyamatok. Ismeretes, hogy ekkor az egyes folyamatok generátorfüggvényei:
$$F(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_t = k) s^k = e^{-\lambda_1(1-s)t},$$
$$G(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\eta_t = k) s^k = e^{-\lambda_2(1-s)t}.$$
Tekintsük a $\zeta_t = \xi_t - \eta_t$ $(t \geq 0)$ folyamatot. Igazoljuk, hogy ennek a folyamatnak a generátorfüggvénye:
$$H(s,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(\zeta_t = k) s^k = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} e^{-\frac{\lambda_1 s^2 + \lambda_2}{s} t}.$$
Ennek alapján (Laurent-sorfejtéssel) határozzuk meg a
$$P_k(t) = \mathbb{P}(\zeta_t = k) \qquad (-\infty < k < \infty)$$
valószínűségeket.
4. Legyen $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ két — 0, illetve 1 — állapottal rendelkező folytonos idejű lánc, melynek infinitézimális mátrixa:
$$A = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}.$$
A Kolmogorov-egyenletek megoldásával határozzuk meg a lánc átmenetvalószínűségi mátrixát. Vizsgáljuk meg a láncot az ergodicitás szempontjából. Ha ergodikus, úgy határozzuk meg az ergodikus eloszlását.

5. Jelölje ξ_t λ paraméterű homogén Poisson-folyamatban a $(0, t)$ időközben előforduló események (átmenetek) számát, és jelölje $\tau_1, \tau_2, \dots$ az események előfordulási időpontjait. Bebizonyítandó, hogy $\xi_t = n$ feltétel mellett a $\tau_1, \dots, \tau_n$ időpontok együttes eloszlása megegyezik a $(0, t)$ időintervallumon n számú, egymástól független, egyenletes eloszlású pont nagyság szerint rendezett koordinátáinak együttes eloszlásával. A megoldást lásd [8], 12.§, 7. feladat.
6. Legyenek $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$, $\{\eta_t,\ t \geq 0\}$ egymástól független, λ, illetve μ paraméterű homogén Poisson-folyamatok. Bebizonyítandó, hogy ekkor $\xi_t + \eta_t = \zeta_t$ $(t \geq 0)$ is Poisson-folyamat, melynek paramétere $\lambda + \mu$. A megoldást lásd [8], 12.§, 6. feladat.
7. Tegyük fel, hogy egy λ paraméterű $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ Poisson-folyamat eseményeit megritkítjuk olyképpen, hogy minden egyes eseményt a többitől függetlenül p valószínűséggel tartunk meg. Jelöljük ζ_t $(t \geq 0)$-vel a $(0, t)$ időközben előforduló ritkított események számát. Igazoljuk, hogy ζ_t Poisson-folyamat λp paraméterrel. A megoldást lásd [8], 12.§, 4. feladat.
8. Jelölje egy λ paraméterű Poisson-folyamat $0 \leq t < \infty$ időközben előforduló eseményeinek előfordulási időpontjait $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$. Meghatározandó τ_n eloszlásfüggvénye, $G_n(t)$; sűrűségfüggvénye, $g_n(t)$; és momentumai. A megoldást lásd [8], 12.§, 14. feladat.
9. *Pólya-folyamat.* Legyenek a $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ változó lehetséges értékei $0, 1, 2, \dots$. Alkosson ez a $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ folyamat Markov-láncot, melynek átmeneti valószínűségeire vonatkozóan tegyük fel, hogy ha a t pillanatban a lánc az n-edik állapotban van, akkor annak a valószínűsége, hogy a $(t,\ t + \Delta t)$ időközben átmenet történik az $(n + 1)$-edik állapotba, $\eta_n(t)\Delta(t) + o(\Delta t)$, ahol $\eta_n(t) = \frac{1+nd}{1+td}$, $d > 0$, és egyéb átmenetek nem lehetségesek. Meghatározandó a $\mathbb{P}(\xi_t = n) = P_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ eloszlás, feltéve, hogy $\xi_0 = 0$. A megoldást lásd [8], 12. §, 26. feladat.
10. Tekintsünk egy születési és kihalási folyamatot, melynek paraméterei λ_n és μ_n. Legyenek T_n az az időtartam, amely az n-edik állapotból az $(n+1)$-edik állapotba való első megérkezésig szükséges. Ha most $T_n^* = \mathbb{E}T_n$, úgy igazoljuk, hogy
$$T_n^* = \frac{1}{\lambda_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n} T_{n-1}^*.$$
11. Legyen $\{\xi_t,\ t \geq 0\}$ születési és kihalási folyamat $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$ $(n > 0)$ paraméterekkel. A 0-állapot legyen elnyelő, azaz legyen $\lambda_0 = 0$. Válasszuk a kezdőállapotot m-nek. Meghatározandó annak a valószínűsége, hogy a t-idő alatt a lánc az elnyelő 0-állapotba kerül. Vizsgáljuk meg ennek a valószínűségnek a viselkedését $t \to \infty$ esetén. Hogyan függ ez a határvalószínűség a kezdeti állapottól, s λ és μ milyen viszonya mellett lesz 1-gyel egyenlő? A megoldást lásd [20], Theorem 7.1.
12. Egy gépalkatrész élettartalmának eloszlásfüggvénye legyen $H(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $(t \geq 0)$. Tegyük fel, hogy az alkatrész igénybevétele nem folyamatosan, hanem szakaszosan történik. Ha a t időpontban az alkatrész nem működik, úgy legyen $\eta\Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy a $(t, t + \Delta t)$ időközben működésbe lép, és ha a t időpontban működik, úgy legyen $\gamma\Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy a $(t, t + \Delta t)$ időköz alatt megszűnik a működése. Meghatározandó az alkatrész élettartamának látszólagos eloszlásfüggvénye, $F(t)$; várható értéke, m; és szórásnégyzete, σ^2.
13. Egy kiszolgálóhoz s paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek a vásárlók. A várakozásra alkalmas helyek száma legyen véges, mondjuk n. Ez azt jelenti, hogy ha egy vásárló olyan pillanatban érkezik, amikor n személy várakozik a sorban,

akkor ez a vásárló lemond rendelési szándékáról, azt mondjuk, hogy elvész. Tegyük fel, hogy az egyes vásárlók rendelési időtartamai függetlenek és, hogy azonos $H(t) = 1 - e^{-x}$ $(x \geq 0)$ exponenciális eloszlásúak. Meghatározandó a kiszolgáló foglaltsági periódusa hosszának várható értéke és szórásnégyzete. Határozzuk meg $t \to \infty$ esetén a vesztési valószínűséget is.

14. Egy gépen $(t, t + \Delta t)$ időköz alatt előforduló hiba valószínűsége függ attól, hogy munkát végez-e a gép, vagy üresen jár. Az első esetben legyen ez a valószínűség $c\mu\Delta t + o(\Delta t)$ $(c > 1)$, a második esetben pedig $\mu\Delta t + o(\Delta t)$. Annak a valószínűsége, hogy a t pillanatban folyó munka befejeződik a $(t, t+\Delta t)$ időköz alatt, legyen $\alpha\Delta t + o(\Delta t)$, míg annak a valószínűsége, hogy a $(t, t + \Delta t)$ időtartam alatt elkezdődik egy munkaperiódus azon feltételek mellett, hogy a t pillanatban a gép üresen járt, legyen $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Ha elromlik a gép, akkor javítás alá kerül, melynek ideje $\beta > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású. A javítás befejeztével a gépet újból elindítják, s szükség szerint munkát végez, vagy üres jár. Meghatározandó annak a valószínűsége, hogy a t pillanatban a gép munkát végez, $\pi_0(t)$; üresen jár, $\pi_1(t)$; javítás alatt van, $\pi_2(t)$. Vizsgáljuk meg e valószínűségeket $t \to \infty$ esetén is.

Irodalomjegyzék

[1] Chung, K.L.: *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*, Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg, 1960.
[2] Bharucha-Reid, A.T.: *Elements of the Theory of Markov Processes and their Applications*, McGraw-Hill, New York – Toronto – London, 1960.
[3] Feller, W.: *An Introduction to Probabilty Theory and its Applications, Vol. I*, Wiley, New York, (second ed.), 1967.
[4] Doob, J.L.: *Stochastic Processes*, Wiley, New York, 1953.
[5] Karlin, S. and McGregor, J.L.: The differential equations of birth-and-death processes and the Stieltjes moment problem, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. **85**, pp. 489–456, 1957.
[6] Karlin, S. and McGregor, J.L. : The classification of birth-and-death processes, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. **86**, pp. 366–400, 1957.
[7] Takács L.: *Introduction to the Theory of Queues*, Oxford University Press, New York, 1962.
[8] Takács L.: *Sztochasztikus folyamatok (Műszaki matematikai gyakorlatok C. V. Valószínűségszámítás, B rész)*, Tankönykiadó, Budapest, 1957.
[9] Takács L.: Várakozási idő problémák tárgyalása Markov-folyamatok segítségével, *MTA III. oszt. közleményei*, **4**, 543–570 old., 1954.
[10] Tomkó József: *A Markov folyamatok elemei és néhány opeációkutatási vonatkozása*, A Bolyai János Matematikai Társulat kiadványa, Budapest, 1968.

Kiegészítés az eredeti irodalomjegyzékhez

[11] Ash, R.B. *Basic Probability Theory*, Wiley, New York, 1970.
[12] Ash, R.B. and Gardner, M.F.: *Topics in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, 1975.
[13] Asmussen, S.: *Applied Probability and Queues*, Wiley, New York, 1987.
[14] Billingsley, P.: *Statistical Inference for Markov Processes*, The University of Chicago Press, 1961.
[15] Bognár J., Mogyoródi J., Prékopa A., Rényi A. és Szász D.: *Valószínűségszámítás feladatgyűjtemény*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.
[16] Chung, K.L.: *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1967.
[17] Feller, W.: *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
[18] Gihman, I.I. és Szkorohod, A.V.: *Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletbe*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.
[19] Gilks, W.R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D.J. (editors): *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, Chapman&Hall/CRC, Boca Raton – London – New York – Washington, 1996.
[20] Guttorp, P. *Stochastic Modeling of Scientific Data*, Chapman&Hall, London, 1995.

[21] Karlin, S.: *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, 1968.
[22] Karlin, S. és Taylor, H.M.: *Sztochasztikus folyamatok*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1986.
[23] Rényi A.: *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
[24] Robert, C.P. and Casella, G.: *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer, New York, 1999.
[25] Shiryayev, A.N.: *Probability*, Springer, Berlin, 1984.
[26] Tusnády G. és Ziermann M. (szerk.): *Idősorok analízise*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.

Tárgymutató