Arató Mátyás, Baran Sándor, Fazekas Gábor

Lineáris dinamikai rendszer négyzetes veszteséggel

mobiDIÁK könyvtár

Arató Mátyás, Baran Sándor, Fazekas Gábor

Lineáris dinamikai rendszer négyzetes veszteséggel

mobiDIÁK könyvtár

SOROZATSZERKESZTŐ

Fazekas István

Arató Mátyás, Baran Sándor, Fazekas Gábor

Lineáris dinamikai rendszer négyzetes veszteséggel

Oktatási segédanyag

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
4010 Debrecen, Pf. 12
http://mobidiak.inf.unideb.hu/

A mű „A mobiDIÁK önszervező mobil portál” (IKTA, OMFB-00373/2003)) projekt keretében készült.

1. Bevezetés

A lineáris rendszerek vizsgálata a folyamatirányítás egyik legfontosabb problémája, mivel számtalan jelenség vagy közvetlenül modellezhető, vagy pedig jól közelíthető egy lineáris dinamikai rendszerrel. A vezérlés szempontjából két különböző megközelítési mód ismert. Az egyik a hagyományos vezérlés, amikor a rendszert leíró egyenleteket analizálva azokat úgy alakítjuk, hogy a rendszer megfeleljen a kívánt kritériumoknak (pl. legyen stabilis) A másik, az ún. modern vezérlés, amelynek legfontosabb fogalmai a vezérelhetőség illetve a megfigyelhetőség (lásd pl. [4], vagy magyar nyelven [6, 7]). Ebben az esetben adott egy dinamikai rendszer és hozzá kapcsolódóan egy veszteségfüggvény, ami függ a rendszer bemenő jelétől, a rendszer állapotától valamint az időtől. A cél az, hogy találjunk egy olyan optimális vezérlő jelet, ami minimalizálja ezt a veszteségfüggvényt. Ilyen vezérlőfüggvény általában létezik és bizonyos feltételek mellett egyértelműen definiált (lásd pl. [3, 5]). Jelen dolgozatban ennek a problémának a megoldását vizsgáljuk egy speciális esetben, négyzetes veszteségfüggvényt tételezve fel. Ekkor, amint azt a továbbiakban látni fogjuk, az optimális vezérlés az állapotfüggvény egy lineáris transzformáltja. A 2. fejezetben megadjuk a probléma pontos megfogalmazását. A 3. fejezetben leírjuk a megoldás klasszikus, Pontrjagin féle módját, valamint egy modernebb, a Riccati egyenletekkel kapcsolatos megközelítést. Ezek az egyenletek általában csak numerikusan oldhatóak meg, de amint azt a 4. fejezetben látni fogjuk, időinvariáns rendszerek esetén az optimális vezérlőfüggvény közvetlenül is megadható.

2. A probléma felvetése

Tekintsük az alábbi lineáris dinamikai rendszert

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t), \qquad\qquad t \in I, \end{aligned} \tag{2.1}$$

ahol I egy valós intervallum, az $x(t)$ állapotfüggvény n, az $u(t)$ vezérlőfüggvény r, az $y(t)$ kimeneti függvény pedig m dimenziós vektor. Ennek megfelelően $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B : I \to \mathbb{R}^{n\times r}$ és $C : I \to \mathbb{R}^{m\times n}$ és tegyük fel, hogy $0 < m \leq r \leq n$. Tételezzük fel azt is, hogy az $u(t)$ szakaszosan folytonos vezérlő függvény értékeinek nagyságára nem adott semmilyen korlátozó feltétel.

Legyen adott egy $z : I \to \mathbb{R}^m$ vektorfüggvény. Célunk egy olyan vezérlőfüggvény meghatározása, melynek hatására a (2.1) dinamikai rendszer kimeneti függvénye „közel lesz” a $z(t)$ függvényhez, azaz az

$$e(t) := z(t) - y(t)$$

hibafüggvény ,,kicsi". Ezen kívül célszerű lenne elkerülni a nagyon kicsi vagy túl nagy értékeket felvevő vezérlőfüggvényeket, hiszen a gyakorlati alkalmazásoknál az ilyen vezérlés túlságosan költséges.

Tekintsük tehát az alábbi négyzetes veszteségfüggvényt:

$$J(u) = \frac{1}{2}\langle e(T), Fe(T)\rangle + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T} \big[\langle e(t), Q(t)e(t)\rangle + \langle u(t), R(t)u(t)\rangle\big]dt, \tag{2.2}$$

ahol a T végső időpont rögzített, F egy $m \times m$-es nemnegatív definit mátrix, $Q(t)$ egy $m \times m$-es nemnegatív definit mátrixfüggvény, a $P(t)$ $r \times r$-es mátrixfüggvény pedig pozitív definit.

Feladat. *Tekintsük az* (2.1) *rendszert és keressük azt a szakaszonként folytonos* $u(t)$ *vezérlőfüggvényt, mely minimalizálja a* (2.2) *veszteségfüggvényt.*

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy mivel az F, $Q(t)$ és $P(t)$ mátrixok nemnegatív definit mátrixok, a (2.2) veszteségfüggvény ,,bünteti" a nagy hibaértéket a T végső időpontban, valamint ,,bünteti" azt is, ha a $[t_0, T]$ intervallumon átlagosan is nagy az $e(t)$ hiba vagy az $u(t)$ vezérlőfüggvény.

Itt jegyeznénk meg, hogy a fenti problémának létezik sztochasztikus megfelelője is. Az optimális vezérlőfüggvény meghatározási módja hasonló a 3.3. és 4.1. szakaszokban leírtakhoz (lásd pl. [1, 2]).

3. Állapot-regulátor

Tekintsük az előző fejezetben megfogalmazott probléma egy speciális esetét, az ún. állapot-regulátor problémát (lásd [8]). Tegyük fel, hogy $m = n$, $C(t) = I$ (ahol I a megfelelő dimenziós egységmátrix), $z(t) \equiv 0$, azaz $y(t) = x(t) = -e(t)$. Ekkor az (2.2) kifejezéssel definiált veszteségfüggvény alakja

$$J(u) = \frac{1}{2}\langle x(T), Fx(T)\rangle + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T} \big[\langle x(t), Q(t)x(t)\rangle + \langle u(t), R(t)u(t)\rangle\big]dt, \tag{3.1}$$

ahol az $x(t)$ kielégíti az

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{3.2}$$

állapotegyenletet. Belátjuk, hogy ennél a problémánál az optimális vezérlőfüggvény az állapotfügvény egy lineáris transzformáltja, azaz

$$u(t) = G(t)x(t), \qquad t \in [t_0, T], \tag{3.3}$$

ahol $G(t)$ egy $r \times n$-dimenziós mátrix-függvény.

3.1. A hagyományos megoldási mód, a Pontrjagin-féle elv

Tegyük fel, hogy tetszőleges $x(t_0)$ kezdeti álapothoz létezik egy optimális vezérlőfüggvény. Ennek meghatározásához alkalmazhatjuk a Pontrjagin-féle minimumelvet, melynek részletes tárgyalására azonban itt nem térünk ki (lásd pl. [3]). A (3.2) állapotegyenlethez és (3.1) veszteségfüggvényhez tartozó Hamilton függvény

$$\begin{aligned} H(x,p,u,t) :=& \frac{1}{2}\langle x(t), Q(t)x(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle u(t), R(t)u(t)\rangle \\ &+ \langle A(t)x(t), p(t)\rangle + \langle B(t)u(t), p(t)\rangle, \end{aligned} \tag{3.4}$$

ahol a $p(t)$ ún. multiplikátor (vö. a feltételes optimumszámítással) a

$$p'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)}$$

differenciálegyenlet-rendszer megoldása, mely egyenletrendszer jelen esetben a

$$p'(t) = -Q(t)x(t) - A^\top(t)p(t) \tag{3.5}$$

alakra redukálódik. A minimumelv alapján az optimális $u(t)$ vezérlőfüggvény éppen a Hamilton függvény u-ban vett minimuma, azaz ezen $u(t)$ függvény mentén

$$\frac{\partial H}{\partial u(t)} = R(t)u(t) + B^\top(t)p(t) = 0. \tag{3.6}$$

Mivel az $R(t)$ mátrix invertálható, az optimális vezérlőfüggvény alakja szükségképpen

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^\top(t)p(t). \tag{3.7}$$

Mivel

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u(t)^2} = R(t),$$

ami pozitív definit, az (3.7) kifejezéssel definiált vezérlőfüggvény valóban a H minimumát adja.

Az (3.7) egyenlet által meghatározott függvényt az (3.2) egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$x'(t) = A(t)x(t) - S(t)p(t), \tag{3.8}$$

ahol az

$$S(t) := B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)$$

egy $n\times n$-dimenziós szimmetrikus mátrix. A (3.5) és (3.8) egyenletek tehát az alábbi $2n$ dimenziós változó együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszert határozzák meg:

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ p'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -S(t) \\ -Q(t) & -A^\top(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

A fenti egyenletrendszer egyértelmű megoldásához szükségünk van még $2n$ darab kezdeti értékre. Ebből n kezdeti értéket meghatároz az $x(t_0)$ kezdőállapot megadása, a hiányzó kezdeti értékeket pedig onnan kapjuk, hogy a minimumelv alapján a T végső időpontban

$$p(T) = \frac{\partial}{\partial x(t)}\Big(\frac{1}{2}\langle x(T), Fx(T)\rangle\Big) = Fx(T).$$

Jelölje $\Omega(t;t_0)$ a (3.9) egyenletrendszer $2n \times 2n$ dimenziós alapmátrixát, azaz az egyenletrendszer tetszőleges megoldása

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \Omega(t;t_0) \begin{bmatrix} x(t_0) \\ p(t_0) \end{bmatrix}$$

alakú. Így a $t = T$ időpillanatban (felszabadítva a t_0 kezdeti időpillanatot)

$$\begin{bmatrix} x(T) \\ p(T) \end{bmatrix} = \Omega(T;t) \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Bontsuk fel az $\Omega(T;t)$ mátrixot négy $n \times n$ dimenziós mátrixra:

$$\Omega(T;t) = \begin{bmatrix} \Omega_{11}(T;t) & \Omega_{12}(T;t) \\ \Omega_{21}(T;t) & \Omega_{22}(T;t) \end{bmatrix}.$$

Ezt felhasználva a (3.10) alakja

$$x(T) = \Omega_{11}(T;t)x(t) + \Omega_{12}(T;t)p(t), \tag{3.11}$$

$$p(T) = \Omega_{21}(T;t)x(t) + \Omega_{22}(T;t)p(t) = Fx(T). \tag{3.12}$$

Egyszerű számolás után a (3.11) és (3.12) egyenletekből az alábbi kifejezéshez jutunk (feltéve, hogy a benne szereplő inverz létezik)

$$p(t) = \big[\Omega_{22}(T;t) - F\Omega_{12}(T;t)\big]^{-1}\big[F\Omega_{11}(T;t) - \Omega_{21}(T;t)\big]x(t), \tag{3.13}$$

vagyis

$$p(t) = K(t)x(t), \qquad t \in [t_0, T]. \tag{3.14}$$

Az itt szereplő $K(t)$ mátrix a T végső időpillanat és az F mátrix függvénye, viszont független a kezdeti állapottól. Az is világos, hogy $\Omega(T;T) = I$, azaz

$$\Omega_{11}(T;T) = \Omega_{22}(T;T) = I,$$
$$\Omega_{12}(T;T) = \Omega_{21}(T;T) = 0.$$

Így

$$K(T) = \big[\Omega_{22}(T;T) - F\Omega_{12}(T;T)\big]^{-1}\big[F\Omega_{11}(T;T) - \Omega_{21}(T;T)\big] = F. \tag{3.15}$$

A gyakorlatban, ha az $A(t)$, $S(t)$ és $Q(t)$ mátrixok ténylegesen függenek az időtől, akkor az $\Omega(T;t)$ alapmátrix kiszámítására nincs általános módszer, így a $K(t)$ mátrix legtöbbször csak numerikusan határozható meg. Időinvariás $A(t)$, $S(t)$ és $Q(t)$ mátrixok esetén az $\Omega(T;t)$ (pl. Laplace transzformáltak segítségével) kiszámítható ugyan, de megadása és a $K(t)$ mátrix kiszámítása meglehetősen munkaigényes feladat (ez utóbbinál ki kell számolnunk egy $n \times n$-dimenziós mátrix inverzét).

Felmerül azonban a következő kérdés. *A $K(t)$ mátrix meghatározásához nyújt-e valami pótlólagos segítséget az, hogy beláttuk, $p(t) = K(t)x(t)$? Ez az információ elegendő-e ahhoz, hogy elkerüljük az alapmátrix kiszámításakor fellépő nehézségeket, illetve a mátrix invertálást?*

Amint azt a következőkben látni fogjuk, a fenti kérdésekre a válasz igen.

3.2. A Riccati egyenlet

Induljunk ki a (3.14) összefüggésből. Ezt t szerint deriválva kapjuk, hogy

$$p'(t) = K'(t)x(t) + K(t)x'(t). \tag{3.16}$$

A (3.14) kifejezést a (3.8) egyenletbe helyettesítve láthatjuk, hogy

$$x'(t) = \big[A(t) - S(t)K(t)\big]x(t). \tag{3.17}$$

Ezt beírva a (3.16) egyenletbe

$$p'(t) = \big[K'(t) + K(t)A(t) - K(t)S(t)K(t)\big]x(t), \tag{3.18}$$

a (3.14) kifejezést a (3.5) egyenletbe helyettesítve pedig az

$$p'(t) = \big[-Q(t) - A^\top(t)K(t)\big]x(t) \tag{3.19}$$

egyenlethez jutunk. A (3.18) és (3.19) kifejezések azt eredményezik, hogy tetszőleges $t \in [t_0, T]$ esetén

$$\big[K'(t) + K(t)A(t) - K(t)S(t)K(t) + A^\top(t)K(t) + Q(t)\big]x(t) = 0. \tag{3.20}$$

Mivel fenti egyenlőség az $x(t_0)$ kezdeti érték tetszőleges megválasztás esetén igaz, $x(t)$ a (3.17) homogén, lineáris egyenletrendszer megoldása, $K(t)$ pedig (amint azt korábban láttuk) független a kezdeti értéktől, a (3.20) egyenlőség az $x(t)$ tetszőleges értéke mellett teljesül. Ez pedig azt jelenti, hogy

$$K'(t) + K(t)A(t) + A^\top(t)K(t) - K(t)S(t)K(t) + Q(t) = 0,$$

azaz, figyelembe véve az $S(t)$ alakját, a

$$K'(t) = -K(t)A(t) - A^\top(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)K(t) - Q(t) \tag{3.21}$$

differenciálegyenlethez jutunk. A $K(t)$ egyértelmű meghatározásához szükség van még egy kezdeti értékre. Egyrészt,

$$p(T) = Fx(T),$$

másrészről pedig a (3.14) egyenletbe $t = T$-t helyettesítve

$$p(T) = K(T)x(T).$$

Mivel ezen összefüggések az $x(T)$ tetszőleges értéke esetén fennállnak, $K(T) = F$ teljesül (vö. (3.15)).

A (3.21) egyenlet egy ún. *Riccati* típusú egyenlet, amire a továbbiakban csak Riccati egyenletként fogunk hivatkozni. Első látásra úgy tűnik, hogy ez egy n^2 elemből álló elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer. Könnyű azonban megmutatni, hogy $K(t)$ és $K(t)^\top$ ugyanazon differenciálegyenlet megoldása ugyanazon kezdeti érték melett, tehát a $K(t)$ mátrix szükségképpen szimmetrikus. Ez pedig azt jelenti, hogy csupán $n(n+1)/2$ elsőrendű egyenlettel van dolgunk.

A (3.21) összefüggéssel definiált Riccati egyenlet általános esetben nem oldható meg analitikusan. A gyakorlati alkalmazásoknál általában a

$$K(t+\Delta) \approx K(t) + \Delta\big[-K(t)A(t) - A^\top(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)K(t) - Q(t)\big]$$

közelítő formulát alkalmazzák, figyelembe véve természetesen a $K(T) = F$ kezdeti feltételt.

3.3. Az állapot-regulátor probléma megoldása

A fenti meggondolások és számítások az általános állapot-regulátor probléma alábbi megoldásához vezettek (lásd [3]).

Vezérlési elv. *Tekintsük a*

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

állapotegyenlettel megadott lineáris rendszert és a

$$J(u) = \frac{1}{2}\langle x(T), Fx(T)\rangle + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \big[\langle x(t), Q(t)x(t)\rangle + \langle u(t), R(t)u(t)\rangle\big]dt,$$

veszteségfüggvényt, ahol az $u(t)$ vezérlőfüggvény szakaszosan folytonos, korlátozás nélküli, T adott, F és $Q(t)$ nemnegatív definit mátrixok, az $R(t)$ mátrix pedig pozitív definit. Ekkor létezik pontosan egy optimális vezérlőfüggvény, amit az

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^\top(t)K(t)x(t)$$

összefüggés definiál. Az itt megadott $n \times n$-dimenziós szimmetrikus $K(t)$ mátrix a

$$K'(t) = -K(t)A(t) - A^\top(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)K(t) - Q(t)$$

Riccati egyenlet $K(T) = F$ kezdeti feltételhez tartozó megoldása. Az optimálisan vezérelt rendszer állapotfüggvénye a

$$x'(t) = \big[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)K(t)\big]x(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldása.

3.1. Példa Tekinsük az

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= u(t) \end{aligned} \tag{3.22}$$

állapotegyenlettel megadott rendszert és tegyük fel, hogy a veszteségfüggvény

$$J(u) = \frac{1}{2}\big[2x_1^2(4) + x_2^2(4)\big] + \frac{1}{2}\int_0^4 \big[x_1^2(t) + 2x_2^2(t) + 2tx_1(t)x_2(t) + \frac{1}{4}u^2(t)\big]dt.$$

Így tehát

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad Q(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{bmatrix},$$

valamint $R(t) = \frac{1}{4},\ t_0 = 0,\ T = 3.$ Legyen

$$K(t) := \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix}.$$

Ekkor az optimális vezérlőfüggvény

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1}(t)B^\top(t)K(t)x(t) = -4[0\ 1]\begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ &= -4\big[k_{12}(t)x_1(t) + k_{22}(t)x_2(t)\big]. \end{aligned}$$

A Riccati egyenlet

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k_{11}'(t) & k_{12}'(t) \\ k_{12}'(t) & k_{22}'(t) \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 4[0\ 1]\begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

a kezdeti feltétel pedig

$$\begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A szorzások elvégzése után kapjuk, hogy a $K(t)$ mátrix elemei az alábbi kezdeti érték probléma megoldásai:

$$\begin{aligned} k_{11}'(t) &= 4k_{12}^2(t) - 1 & k_{11}(4) &= 2, \\ k_{12}'(t) &= -k_{11}(t) + 4k_{12}(t)k_{22}(t) - t & k_{12}(4) &= 0, \\ k_{22}'(t) &= -2k_{12}(t) + 4k_{22}^2(t) - 2 & k_{22}(4) &= 1. \end{aligned}$$

4. Az időinvariáns állapot-regulátor

Tekintsük most azt a speciális esetet, a vizsgált állapot-regulátor időinvariáns, azaz az állapotegyenlet

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{4.1}$$

a veszteségfüggvény pedig

$$J(u) = \frac{1}{2}\langle x(T), Fx(T)\rangle + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \big[\langle x(t), Qx(t)\rangle + \langle u(t), Ru(t)\rangle\big]dt, \tag{4.2}$$

ahol T adott, F és Q nemnegatív definit mátrixok, a R mátrix pedig pozitív definit.

4.1. A Riccati egyenlet megoldása

A fenti esetben a Riccati egyenlet

$$K'(t) = -K(t)A - A^\top K(t) + K(t)BR^{-1}B^\top K(t) - Q, \tag{4.3}$$

a hozzá tartozó kezdeti feltétel pedig $K(T) = F$. Az egyenlet megoldásával kapcsolatban kimondhatjuk a következő lemmát (lásd [1]).

4.1. Lemma *Tegyük fel, hogy az $F - \widehat{K}$ mátrix valamint tetszőleges $t \in [t_0, T]$ esetén az*

$$\Phi(t) = (F - \widehat{K})^{-1} + \int_t^T e^{G(T-u)}BR^{-1}B^\top e^{G^\top(T-u)}du$$

mátrixok invertálható, ahol

$$G = A - BR^{-1}B^\top \widehat{K},$$

a $\widehat{K}$ mátrix pedig a

$$\widehat{K}A + A^\top \widehat{K} - \widehat{K}BR^{-1}B^\top \widehat{K} + Q = 0 \tag{4.4}$$

ún. algebrai Riccati egyenlet stabilis megoldása, azaz a vele képzett G mátrix minden sajátértékének a valós része negatív. Ekkor a (4.3) *Riccati egyenlet megoldása*

$$K(t) = e^{G^\top (T-t)}\Phi^{-1}(t)e^{G(T-t)} + \widehat{K}. \tag{4.5}$$

Bizonyítás. Felhasználva, hogy

$$\big(\Phi^{-1}(t)\big)' = \Phi^{-1}(t)\Phi'(t)\Phi^{-1}(t),$$

az állítás közvetlen számolással igazolható. □

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a G mátrix sajátértékeire tett feltétel miatt

$$\lim_{T\to\infty} K(t) = \widehat{K}.$$

4.2. Példa Tekintsük ismét a (3.22) állapotegyenlettel megadott rendszert, a veszteségfüggvény pedig legyen

$$J(u) = \frac{1}{2}\big[2x_1^2(4) + x_2^2(4)\big] + \frac{1}{2}\int_0^4 \big[x_1^2(t) + 2x_2^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + \frac{1}{4}u^2(t)\big]\,dt.$$

A 3.1. példához képest a változás tehát csak annyi, hogy

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A Riccati egyenlet ebben az esetben

$$\begin{aligned}
k_{11}'(t) &= 4k_{12}^2(t) - 1 & \qquad k_{11}(4) &= 2,\\
k_{12}'(t) &= -k_{11}(t) + 4k_{12}(t)k_{22}(t) - 1 & \qquad k_{12}(4) &= 0,\\
k_{22}'(t) &= -2k_{12}(t) + 4k_{22}^2(t) - 1 & \qquad k_{22}(4) &= 1.
\end{aligned}$$

Legyen

$$\widehat{K} := \begin{bmatrix} \widehat{k}_{11} & \widehat{k}_{12} \\ \widehat{k}_{12} & \widehat{k}_{22} \end{bmatrix}.$$

A $\widehat{K}$ elemeit meghatározó algebrai Riccati egyenlet:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{k}_{11} & \widehat{k}_{12} \\ \widehat{k}_{12} & \widehat{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{k}_{11} & \widehat{k}_{12} \\ \widehat{k}_{12} & \widehat{k}_{22} \end{bmatrix}$$
$$- \begin{bmatrix} \widehat{k}_{11} & \widehat{k}_{12} \\ \widehat{k}_{12} & \widehat{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 4[0\ 1] \begin{bmatrix} \widehat{k}_{11} & \widehat{k}_{12} \\ \widehat{k}_{12} & \widehat{k}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

amiből egyszerűsítések után az alábbi három egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} -4\widehat{k}_{12}^2 + 1 &= 0, \\ \widehat{k}_{11} - 4\widehat{k}_{12}\widehat{k}_{22} - 1 &= 0, \\ 2\widehat{k}_{12} - 4\widehat{k}_{22}^2 + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Ezen egyenletek stabil megoldása $\widehat{k}_{11} = 1 + \sqrt{5}$, $\widehat{k}_{12} = 1/2$, $\widehat{k}_{22} = \sqrt{5}/2$, így

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Ezek alapján

$$e^{Gt} = e^{-\sqrt{5}t} \begin{bmatrix} \cosh\sqrt{3}t + \sqrt{\frac{5}{3}}\sinh\sqrt{3}t & \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh\sqrt{3}t \\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\sinh\sqrt{3}t & \cosh\sqrt{3}t - \sqrt{\frac{5}{3}}\sinh\sqrt{3}t \end{bmatrix},$$
$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \phi_{12}(t) & \phi_{22}(t) \end{bmatrix},$$

ahol

$$\begin{aligned} \phi_{11}(t) &:= \frac{31\sqrt{5}+80}{110} - e^{-2\sqrt{5}(4-t)}\Big(\frac{\sqrt{5}}{6}\cosh 2\sqrt{3}(4-t) + \frac{\sqrt{3}}{6}\sinh 2\sqrt{3}(4-t) - \frac{\sqrt{5}}{15}\Big), \\ \phi_{12}(t) &:= -\frac{36\sqrt{5}+89}{33} + \frac{1}{3}e^{-2\sqrt{5}(4-t)}\sinh 2\sqrt{3}(4-t), \\ \phi_{22}(t) &:= \frac{464\sqrt{5}+1020}{165} - e^{-2\sqrt{5}(4-t)}\Big(\frac{\sqrt{5}}{3}\cosh 2\sqrt{3}(4-t) \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{3}\sinh 2\sqrt{3}(4-t) - \frac{\sqrt{5}}{15}\Big). \end{aligned}$$

4.2. A $T = \infty$ eset

Tekintsük az időinvariáns állapot-regulátor problémát és tegyük fel, hogy $F = 0$, valamint $T \to \infty$. Ebben az esetben az alábbi megoldást kapjuk.

Vezérlési elv. *Tekintsük a*

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

állapotegyenlettel megadott lineáris rendszert és a

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{\infty} \big[\langle x(t), Qx(t)\rangle + \langle u(t), Ru(t)\rangle\big] dt,$$

veszteségfüggvényt, ahol az $u(t)$ vezérlőfüggvény szakaszosan folytonos, korlátozás nélküli, Q nemnegatív definit, az R pedig pozitív definit mátrix. Ekkor létezik pontosan egy optimális vezérlőfüggvény, amit az

$$u(t) = -R^{-1}B^{\top}\widehat{K}x(t)$$

összefüggés definiál. Az itt megadott $n \times n$-dimenziós szimmetrikus $\widehat{K}$ mátrix a

$$\widehat{K}A + A^{\top}\widehat{K} - \widehat{K}BR^{-1}B^{\top}\widehat{K} + Q = 0$$

algebrai Riccati egyenlet stabilis megoldása, azaz a vele képzett

$$G = A - BR^{-1}B^{\top}\widehat{K}$$

mátrix minden sajátértékének valós része negatív. Az optimálisan vezérelt rendszer állapotfüggvénye a

$$x'(t) = Gx(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldása

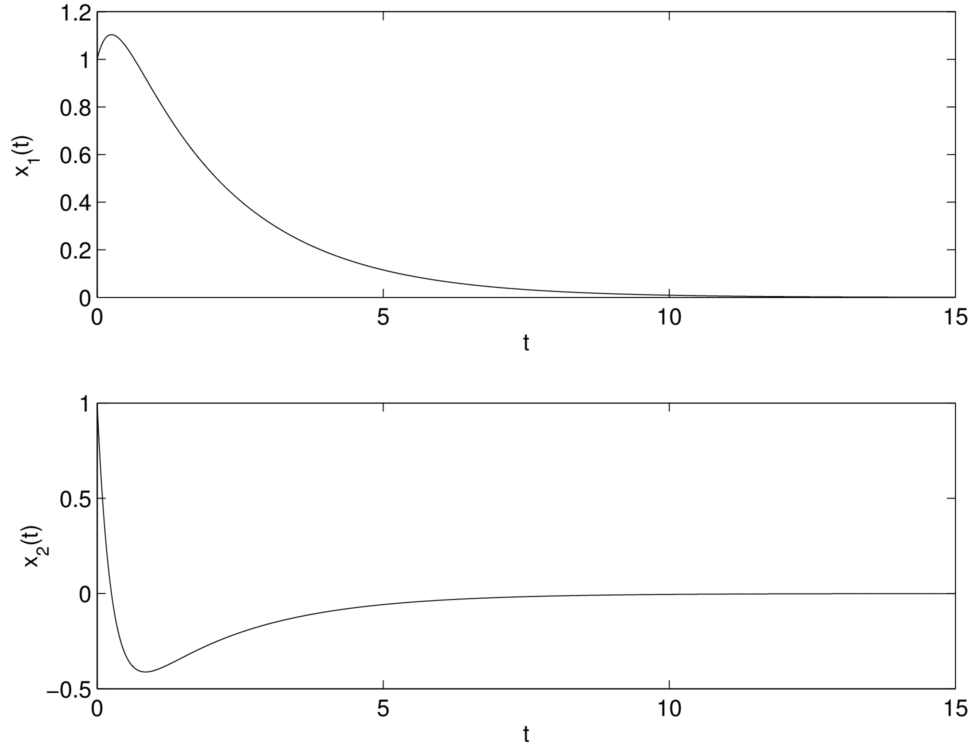
Megjegyzés. A G mátrix sajátértékeire tett feltétel az $x(t)$ optimális trajektória stabilitásához szükséges. Ellenkező esetben ugyanis az $x(t)$ állapotvektornak létezik nem nullához tartó komponense, ami miatt a J_1 veszteség végtelen.

4.3. Példa Tekintsük az előző példákban szereplő (3.22) állapotegyenlettel megadott rendszert, a veszteségfüggvény viszont legyen

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \big[x_1^2(t) + 2x_2^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + \frac{1}{4}u^2(t)\big] dt.$$

A 4.2. Példa eredményei alapján az optimális vezérlőfüggvény

$$u(t) = -2x_1(t) - 2\sqrt{5}x_2(t),$$



1. ábra. A 4.3. Példához tartozó optimális trajektóriák az $x_1(0) = x_2(0) = 1$ kezdeti állapotok esetén

a hozzá tartozó $x(t) = (x_1(t)\ x_2(t))^\top$ optimális trajektória pedig az

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= x_2(t),\\
x_2'(t) &= -2x_1(t) - 2\sqrt{5}x_2(t).
\end{aligned}
$$

lineáris differenciálegyenlet megoldása. Tetszőleges $x_1(t_0) = x_{10},\ x_2(t_0) = x_{20}$ kiinduló állapotok esetén ez a megoldás

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= e^{-\sqrt{5}(t-t_0)}\left(x_{10}\cosh\sqrt{3}(t-t_0) + \Big(x_{10}\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{x_{20}}{\sqrt{3}}\Big)\sinh\sqrt{3}(t-t_0)\right),\\
x_2(t) &= e^{-\sqrt{5}(t-t_0)}\left(x_{20}\cosh\sqrt{3}(t-t_0) - \Big(\frac{2x_{10}}{\sqrt{3}} + x_{20}\sqrt{\frac{5}{3}}\Big)\sinh\sqrt{3}(t-t_0)\right).
\end{aligned}
$$

Az 1. ábrán a $x_1(0) = x_2(0) = 1$ kezdeti állapotból kiinduló optimális trajektóriákat, míg a 2. ábrán az optimális vezérlőfüggvényt láthatjuk.

Irodalom

[1] Arató, M. *Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach.* Springer-Verlag, Berlin, 1982 (in Russian: Nauka, Moscow, 1989).

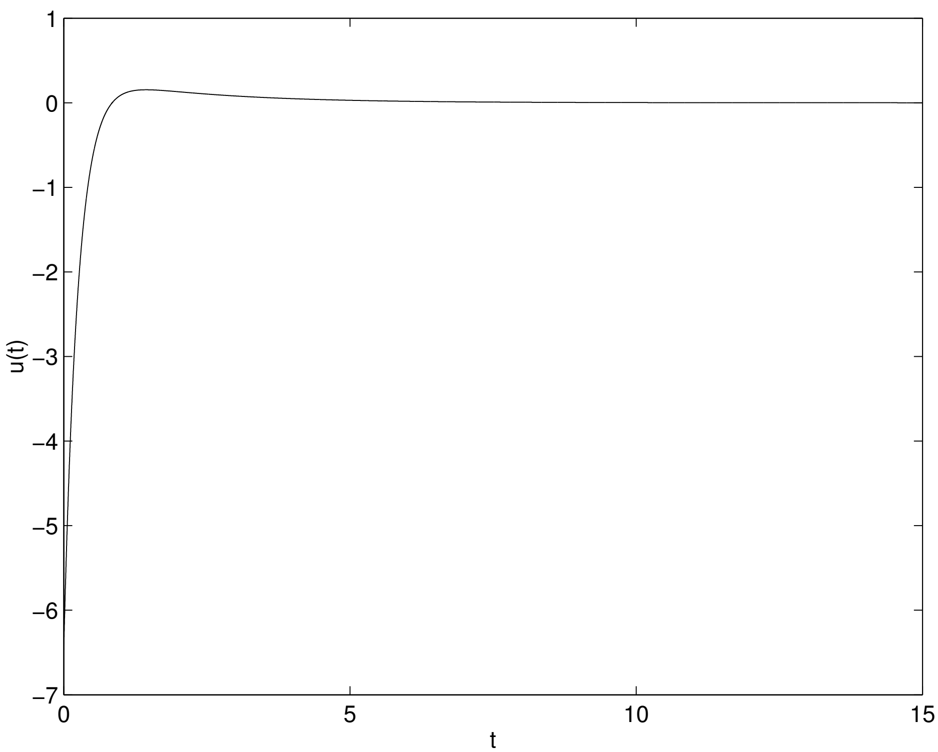
[2] Åström, K. J., *Introduction to Stochastic Control Theory.* Academic Press, New York, 1970 (in Russia: Mir, Moscow, 1973).

[3] Athans, M., Falb, P. L., *Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications.* McGraw-Hill, New York, 1966.

[4] D'Azzo, J. J., Houpis, C. H., *Linear Control System Analysis and Design.* McGraw-Hill, New York, 1981.

[5] Fazekas, G., *Lineáris folyamatok vezérelhetősége és optimalizációja.* Diplomamunka, KLTE Debrecen, 1976.

[6] Fazekas, G., Gesztelyi, E., *Bevezetés a rendszerelméletbe.* Egyetemi jegyzet, KLTE TTK, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.



2. ábra. A 4.3. Példához tartozó optimális vezérlőfüggvény az $x_1(0) = x_2(0) = 1$ kezdeti állapotok esetén

[7] Fodor, Gy., *Lineáris rendszerek analízise.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967.

[8] Kálmán, R. E., Contributions to the Theory of Optimal Control. *Bol. Soc. Mat. Mex.* **5** (1960), 102–119.