Barczy Mátyás és Pap Gyula

Sztochasztikus folyamatok
Példatár és elméleti kiegészítések
I. Rész
(Gauss-folyamatok, Poisson-folyamat)

mobiDIÁK könyvtár

Barczy Mátyás és Pap Gyula

Sztochasztikus folyamatok

Példatár és elméleti kiegészítések

I. Rész

(Gauss-folyamatok, Poisson-folyamat)

mobiDIÁK könyvtár

SOROZATSZERKESZTŐ

Fazekas István

Barczy Mátyás és Pap Gyula
Debreceni Egyetem

Sztochasztikus folyamatok
Példatár és elméleti kiegészítések
I. Rész
(Gauss-folyamatok, Poisson-folyamat)

Egyetemi jegyzet

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem

Szerzők

Barczy Mátyás
egyetemi tanársegéd
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
4010 Debrecen, Pf. 12
barczy@inf.unideb.hu

Pap Gyula
egyetemi tanár
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
4010 Debrecen, Pf. 12
papgy@inf.unideb.hu

Lektor

Iglói Endre
számítástechnikai munkatárs
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
4010 Debrecen, Pf. 12

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
4010 Debrecen, Pf. 12
http://mobidiak.inf.unideb.hu

A mű „A mobiDIÁK önszervező mobil portál” (IKTA, OMFB-00373/2003)) projekt keretében készült.

Bevezetés

Jelen munka a Debreceni Egyetem alkalmazott matematikus és matematikus szakos hallgatói részére tartott Sztochasztikus folyamatok Gyakorlat anyagát öleli fel. A gyakorlathoz kapcsolódó előadás anyagának gerincét *Dr. Pap Gyula: Sztochasztikus folyamatok* című jegyzete [5] adta, így főként az ott szereplő elméleti részekhez kapcsolódó feladatokat tárgyalunk. A gyakorló feladatokon kívül szerepelnek példatárunkban az előadás anyagához kapcsolódó elméleti részek, kiegészítések is. A *Poisson-folyamat* és a *Nemstacionárius Poisson-folyamat, összetett Poisson-folyamat* című fejezetekben főként Sheldon M. Ross: Introduction to Probability Models című könyvének [7] ötödik fejezetére támaszkodunk, illetve az ott kitűzött gyakorló feladatokat oldjuk meg. A *Kolmogorov alaptétel* című fejezetben pedig főként Medvegyev Péter: Valószínűségszámítás című könyvére [4] támaszkodunk.

Ezúton is szeretnénk köszönetet mondani Iglói Endrének figyelmes, lelkiismeretes lektori munkájáért. Észrevételeit, kiegészítéseit figyelembe véve a jegyzetet sok helyen pontosítottuk.

Tartalomjegyzék

1. Elmélet

1.1. Alapfogalmak

1.1.1. Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mező,* T *tetszőleges halmaz, és minden* $t \in T$ *esetén* $\xi_t : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó. Ekkor ezek* $\{\xi_t : t \in T\}$ *seregét* ***sztochasztikus folyamatnak*** *nevezzük. Azt mondjuk, hogy* T *a folyamat* ***paramétertere****,* $\mathbb{R}$ *pedig a* ***fázistere*** *(vagy állapottere).*

A folyamat értékének jelölésére használni fogjuk a $\xi(t)$, illetve $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$ jelöléseket is (ugyanis a folyamatot lehet tekinteni természetes módon egyetlen $\xi : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ leképezésnek is: $\xi(t, \omega) := \xi_t(\omega)$). A rögzített $\omega \in \Omega$ esetén adódó $\xi(\cdot, \omega) : T \to \mathbb{R}$ függvényeket (azaz a $t \mapsto \xi_t(\omega)$ függvényeket) a folyamat **trajektóriáinak** (realizációinak, mintafüggvényeinek) nevezzük.

(Természetes módon lehet definiálni olyan folyamatokat, melyek fázistere egy $(X, \mathcal{X})$

mérhető tér.)

Csak olyan folyamatokról lesz szó, amikor $T \subseteq \mathbb{R}$, azaz a paraméter idő jellegű, például $T = [0, \infty)$, $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

A $\{\xi_t : t \in T\}$ sztochasztikus folyamat viselkedéséről nyilván sok információt tartalmaznak a folyamat **véges dimenziós eloszlásai:** a

$$\{(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}) : k \in \mathbb{N},\, t_1, \ldots, t_k \in T,\, t_1 < \ldots < t_k\}$$

valószínűségi vektorváltozók eloszlásai. (A $(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k})$ valószínűségi vektorváltozó eloszlása egy valószínűségi mérték az $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ mérhető téren.) Ezeket a véges dimenziós eloszlásokat az

$$\left\{F_{\xi_{t_1},\ldots,\xi_{t_k}} : k \in \mathbb{N},\, t_1, \ldots, t_k \in T,\, t_1 < \ldots < t_k\right\}$$

eloszlásfüggvény-sereggel lehet megadni. A véges dimenziós eloszlássereg ismeretében még nem lehet eldönteni milyen tulajdonságokkal bírnak a folyamat trajektóriái. Az a kérdés, hogy ha megadjuk eloszlásfüggvényeknek egy

$$\{F_{t_1,\ldots,t_k} : k \in \mathbb{N},\, t_1, \ldots, t_k \in T,\, t_1 < \ldots < t_k\}$$

seregét, akkor létezik-e $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és rajta $\{\xi_t : t \in T\}$ sztochasztikus folyamat, melynek véges dimenziós eloszlásai éppen az adott eloszlások:

$$F_{\xi_{t_1},\ldots,\xi_{t_k}} = F_{t_1,\ldots,t_k}, \qquad k \in \mathbb{N},\, t_1, \ldots, t_k \in T,\, t_1 < \ldots < t_k.$$

Könnyen belátható, hogy ehhez feltétlenül teljesülnie kell az úgynevezett **kompatibilitási feltételnek**: ha $t_1, \ldots, t_k \in T$, $t_1 < \ldots < t_k$ és $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_\ell \leqslant k$ egészek, akkor

$$F_{t_{i_1},\ldots,t_{i_\ell}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_\ell}) = F_{t_1,t_2,\ldots,t_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

ahol $x_j = +\infty$ ha $j \notin \{i_1, \ldots, i_\ell\}$, amit úgy értünk, hogy az illető koordinátában az $x_j \to +\infty$ határértéket vesszük. (Ugyanis, ha $F_{t_1,t_2,\ldots,t_k}$ valóban egy $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2} \ldots, \xi_{t_k})$ vektor eloszlásfüggvénye, akkor a $(\xi_{t_{i_1}}, \xi_{t_{i_2}} \ldots, \xi_{t_{i_\ell}})$ „részvektor” eloszlásfüggvénye éppen a fenti egyenlet jobboldalán álló függvény, melynek meg kell egyeznie az $F_{t_{i_1},t_{i_2},\ldots,t_{i_\ell}}$ függvénnyel.)

1.1.2. Tétel. (Kolmogorov-alaptétele) *Ha adott eloszlásfüggvényeknek egy*

$$\{F_{t_1,t_2,\ldots,t_k} : k \in \mathbb{N},\, t_1, \ldots, t_k \in T,\, t_1 < \ldots < t_k\}$$

kompatibilis serege, akkor létezik $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mező és rajta* $\{\xi_t : t \in T\}$ *sztochasztikus folyamat, melynek véges dimenziós eloszlásai éppen az adott eloszlások.*

Kolmogorov-alaptétele érvényes abban az általánosabb esetben is, amikor a folyamat fázistere teljes, szeparábilis metrikus tér. A következő alfejezetben részletesen foglalkozunk vele.

1.1.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $\{\xi_t : t \in T\}$ *és* $\{\eta_t : t \in T\}$ *sztochasztikus folyamatok*

- ***tágabb értelemben ekvivalensek***, *ha megegyeznek a véges dimenziós eloszlásaik;*
- ***ekvivalensek***, *ha* $P(\xi_t = \eta_t) = 1$ *teljesül tetszőleges* $t \in T$ *esetén.*

Az ekvivalens folyamatokat egymás ***modifikációinak*** *nevezzük.*

1.1.4. Megjegyzés. Ha a $\{\xi_t : t \in T\}$ és $\{\eta_t : t \in T\}$ sztochasztikus folyamatok ekvivalensek, akkor tágabb értelemben is ekvivalensek. Ugyanis, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ és $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} F_{\xi_{t_1},\ldots,\xi_{t_n}}(x_1, \ldots, x_n) &= P(\xi_{t_1} < x_1, \ldots, \xi_{t_n} < x_n) \\ &= P(\xi_{t_1} < x_1, \ldots, \xi_{t_n} < x_n, \xi_{t_1} = \eta_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n} = \eta_{t_n}) \\ &= P(\eta_{t_1} < x_1, \ldots, \eta_{t_n} < x_n) = F_{\eta_{t_1},\ldots,\eta_{t_n}}(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Itt felhasználtuk azt, hogy $P(A) = P(A \cap B)$, $\forall\, A, B \in \mathcal{A}$, $P(B) = 1$ esetén. (Ugyanis, $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ és $P(A \cap \overline{B}) \leqslant P(\overline{B}) = 0$.) □

Leellenőrizhető, hogy az 1.1.3. Definícióban megadott relációk ekvivalencia-relációk a folyamatok között.

1.1.5. Definíció. *Legyen* $\{\xi_t : t \in T\}$ *valós értékű sztochasztikus folyamat, úgy, hogy* ξ_t*-nek létezik a várható értéke minden* $t \in T$ *esetén. Ekkor az*

$$m : T \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \qquad t \mapsto m(t) := \mathbb{E}\xi_t,$$

függvényt a folyamat várható érték függvényének hívjuk. Továbbá, ha $\mathbb{E}\xi_t^2 < \infty$, $t \in T$ *esetén, akkor a*

$$K : T \times T \to \mathbb{R}, \qquad (s, t) \mapsto K(s, t) := \operatorname{cov}(\xi_s, \xi_t),$$

függvényt a folyamat kovariancia függvényének hívjuk.

1.1.6. Megjegyzés. Ha $\{\xi_t : t \in T\}$ egy olyan valós értékű sztochasztikus folyamat, hogy $\mathbb{E}\xi_t^2 < \infty$, $t \in T$, akkor a várható érték függvénye valós értékű. Ugyanis a Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenség alapján $|\mathbb{E}\xi_t| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\xi_t^2 \mathbb{E}1^2} < \infty$. □

1.1.7. Állítás. *Legyen* $\{\xi_t : t \in T\}$ *egy olyan valós értékű sztochasztikus folyamat, hogy* $\mathbb{E}\xi_t^2 < \infty$, $t \in T$. *Ekkor kovariancia függvénye szimmetrikus és pozitív szemidefinit, azaz*

(i) $K(s, t) = K(t, s)$, $s, t \in T$,

(ii) $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\forall\, t_1, \ldots, t_k \in T$ *esetén a* $(K(t_j, t_l))_{j,l=1,\ldots,k}$ *mátrix pozitív szemidefinit, azaz* $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\forall\, t_1, \ldots, t_k \in T$, $\forall\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ *esetén*

$$\sum_{i,j=1}^{k} \lambda_i \overline{\lambda_j} K(t_i, t_j) \geqslant 0.$$

Bizonyítás. **(i):** $K(s,t) = \operatorname{cov}(\xi_s, \xi_t) = \operatorname{cov}(\xi_t, \xi_s) = K(t,s)$, $s, t \in T$,

(ii):

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{k} \lambda_i \overline{\lambda_j} K(t_i, t_j) &= \sum_{i,j=1}^{k} \lambda_i \overline{\lambda_j} \operatorname{cov}(\xi_{t_i}, \xi_{t_j}) = \sum_{i,j=1}^{k} \lambda_i \overline{\lambda_j} \mathbb{E}\big[(\xi_{t_i} - \mathbb{E}\xi_{t_i})(\xi_{t_j} - \mathbb{E}\xi_{t_j})\big] \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i,j=1}^{k} \lambda_i \overline{\lambda_j} (\xi_{t_i} - \mathbb{E}\xi_{t_i})(\xi_{t_j} - \mathbb{E}\xi_{t_j}) \right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\xi_{t_i} - \mathbb{E}\xi_{t_i}) \sum_{j=1}^{k} \overline{\lambda}_j (\xi_{t_j} - \mathbb{E}\xi_{t_j}) \right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\xi_{t_i} - \mathbb{E}\xi_{t_i}) \overline{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j (\xi_{t_j} - \mathbb{E}\xi_{t_j})} \right) \\
&= \mathbb{E}\left| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\xi_{t_i} - \mathbb{E}\xi_{t_i}) \right|^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

□

1.2. Kolmogorov-alaptétel

A Kolmogorov-alaptételről szóló részek Medvegyev [4]-ből származnak, részletesebben kifejtve az ottani gondolatmeneteket.

Topológiai alapfogalmak, Baire-, Borel- és szorzatmérhetőség

Az alábbiakban egy-két fontos topológiai alapfogalmat elevenítünk fel.

1.2.1. Definíció. *Egy topologikus tér teljesíti a 2. megszámlálhatósági axiómát, ha van megszámlálható bázisa.*

1.2.2. Definíció. *Az $(E, \mathcal{O})$ topologikus tér $\mathcal{O}$ topológiájának $\mathbb{B} \subseteq \mathcal{O}$ nyílt halmazokból álló osztálya bázisa, ha $\mathcal{O}$ tetszőleges eleme előáll $\mathbb{B}$-beli elemek uniójaként.*

1.2.3. Definíció. *Legyen (E, d) egy metrikus tér. A d metrika által indukált topológia az a topológia, melynek bázisa a következő halmazrendszer*

$$\{y \in E : d(x, y) < r\}, \quad x \in E,\ r > 0.$$

Ezt a topológiát $\mathcal{O}_d$ módon jelöljük.

1.2.4. Tétel. (Lindelöf) *Egy megszámlálható bázisú topologikus tér tetszőleges nyílt lefedéséből kiválasztható megszámlálható lefedés.*

1.2.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $(E, \mathcal{O})$ *topológikus tér szeparábilis, ha létezik megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmaza.*

1.2.6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $(E, \mathcal{O})$ *topológikus tér Hausdorff, ha bármely két pontjának vannak diszjunkt környezetei.*

1.2.7. Állítás. *Egy megszámlálható bázisú topológikus tér mindig szeparábilis.*

Az előző állítás megfordítása általában nem igaz. Igaz viszont a következő dolog.

1.2.8. Állítás. *Legyen* (E, d) *egy metrikus tér, és jelölje* $\mathcal{O}_d$ *a* d *metrika által indukált topológiát* E*-n. Ekkor* $(E, \mathcal{O}_d)$ *akkor és csak akkor szeparábilis, ha* E *megszámlálható bázisú.*

1.2.9. Következmény. *Ha az* $(E, \mathcal{O}_d)$ *topológikus tér szeparábilis, akkor tetszőleges nyílt lefedéséből kiválasztható megszámlálható lefedés.*

Topológikus terek szorzata

Legyen $I \neq \emptyset$ és $(E_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$ topológikus terek. Legyen

$$E := \prod_{i \in I} E_i, \qquad x = (x_i)_{i \in I}, \quad x_i \in E_i, \;\; i \in I,$$

és $p_j : E \to E_j$, $p_j(x) := x_j$, $x \in E$ projekció a j-edik komponensre, $j \in I$. (A p_j projekciót szokás π_j módon is jelölni.) Az E szorzatteret ellátva a diszkrét topológiával topológikus teret kapunk, azonban így túl sok nyílt halmaz van; egy ennél durvább topológiát veszünk majd alapul a szorzattopológia definiálásakor.

1.2.10. Állítás. *Létezik olyan legdurvább topológia* E*-n, amire a* $p_j : E \to E_j$, $j \in I$ *projekciók folytonosak. Ennek a topológiának egy bázisa a következő halmazrendszer*

$$\mathbb{B} := \Big\{ \bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(U_j) \,\Big|\, U_j \in \mathcal{O}_j, \; J \;\; \textit{véges} \Big\}.$$

Ezt a topológiát nevezzük **szorzattopológiának**, $\mathbb{B}$ *elemeit pedig elemi nyíltaknak.*

1.2.11. Állítás. *Egy szorzattér akkor és csak akkor Hausdorff szeparábilis, ha minden egyes komponens tere Hausdorff szeparábilis.*

1.2.12. Állítás. *Metrizálható terek szorzata nem feltétlenül metrizálható. Például* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *nem metrizálható.*

1.2.13. Állítás. *Megszámlálható sok metrizálható tér szorzata is metrizálható.*

1.2.14. Definíció. *Legyen* $(E, \mathcal{O})$ *egy topológikus tér.*

(a) *A* $\sigma(\mathcal{O})$ *(azaz* E *nyílt halmazai által generált)* σ*-algebrát az* E *Borel* σ*-algebrájának nevezzük.*

(b) *Az* E*-n értelmezett folytonos, valós értékű függvények által generált* σ*-algebrát az* E *Baire* σ*-algebrájának nevezzük.*

Megjegyezzük, hogy a Baire-féle σ-algebra mindig része a Borel-féle σ-algebrának.

1.2.15. Definíció. *Legyen* $X \neq \emptyset$ *és* $(Y_\alpha, \mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in A}$ *mérhető terek összessége, ahol* $A \neq \emptyset$ *tetszőleges indexhalmaz. Legyenek továbbá* $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ *tetszőleges függvények,* $\alpha \in A$*. Azt a legszűkebb* σ*-algebrát* X*-en, amelyre nézve az összes* f_α *függvény mérhető* $\sigma(f_\alpha : \alpha \in A)$ *módon jelöljük és az* $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ *leképezések által generált* σ*-algebrának mondjuk.*

1.2.16. Megjegyzés. $\sigma(f_\alpha : \alpha \in A)$ mindig létezik és belátható, hogy

$$\sigma(f_\alpha : \alpha \in A) = \sigma(\mathcal{G}),$$

ahol $\mathcal{G} := \{f_\alpha^{-1}(B), \alpha \in A, B \in \mathcal{B}_\alpha\}$. $\square$

1.2.17. Definíció. *Egy* $(X, \mathcal{A})$ *mérhető térből egy* $(Y, \mathcal{T})$ *topológikus térbe képező* f *leképezést* **mérhetőnek** *mondunk, ha* $\big((X, \mathcal{A}),\ (Y, \mathcal{B}(Y))\big)$*-mérhető, másképpen mondva, ha* f *értékkészlete egy topológikus tér, akkor az értékkészletén a mérhetőségi struktúrát a Borel-halmazokkal definiáljuk.*

1.2.18. Megjegyzés. A mérhetőség definíciója nem magától értetődő, ugyanis az Y képtéren a Borel-halmazok mellett egyéb ,,topológiailag releváns" struktúrák is definiálhatók. Például a Baire-halmazok összessége. Előfordulhat, hogy a Borel-halmazok ,,túl sokan vannak," például ez a helyzet nem megszámlálható szorzatsruktúrák esetében, és ilyenkor szűkebb σ-algebrát kell venni. Például a Kolmogorov-féle konzisztencia tétel is csak a Borel σ-algebránál szűkebb σ-algebrára biztosítja a szorzatmérték kiterjesztését. Lásd az 1.2.33. Megjegyzést. $\square$

1.2.19. Definíció. *Legyenek* $(X_1, \mathcal{A}_1)$ *és* $(X_2, \mathcal{A}_2)$ *mérhető terek. A*

$$\mathcal{T} := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

halmaz elemeit mérhető tégláknak hívjuk, az $(X_1 \times X_2, \sigma(\mathcal{T}))$ *mérhető teret pedig az* $(X_1, \mathcal{A}_1)$ *és* $(X_2, \mathcal{A}_2)$ *mérhető terek szorzatának nevezzük. A* $\sigma(\mathcal{T})$ σ*-algebrát* $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ *(vagy* $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$*) módon szokás jelölni. A definíció értelemszerűen kiterjeszthető véges sok* $(X_i, \mathcal{A}_i)$*,* $i = 1, \ldots, n$*, mérhető tér szorzatára.*

Ha $(X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in A}$ *végtelen sok mérhető tér, akkor szorzatukon azt az* $(X, \mathcal{C})$ *mérhető teret értjük, melyre* $X := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ *és* $\mathcal{C}$ *az ún. cilinderhalmazok (hengerhalmazok) által generált* σ*-algebra. A cilinderhalmazok olyan* $C \subseteq X$ *halmazok, melyekhez léteznek olyan* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ *indexek* $(\alpha_i \neq \alpha_j,$ *ha* $i \neq j)$ *és* $B \in \prod_{k=1}^n \mathcal{A}_{\alpha_k}$*, hogy*

$$C = \{x \in X : (x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}) \in B\}.$$

(Például $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant r^2\}$ cilinderhalmaz.) Az α_k indexeket a C tartópontjainak (koordinátáinak), a B halmazt pedig a C tartóhalmazának (alapjának) mondjuk.

Amennyiben $X_\alpha = Y$, $\alpha \in A$, úgy az X szorzattér nem más, mint az A halmazon értelmezett Y-beli értékű függvények halmaza.

1.2.20. Megjegyzés. A szorzatmérhetőségi struktúra alternatív módon a $\pi_\alpha(x) := x_\alpha$, $\alpha \in A$ koordinátaleképezések által generált σ-algebraként is definiálható. Pontosabban, belátható, hogy a cilinderhalmazok által generált σ-algebra az a legszűkebb σ-algebra, melyre nézve az összes projekció mérhető. $\square$

1.2.21. Állítás. (Medvegyev [4], 2.22 Állítás) *Egy $B \in X$ halmaz pontosan akkor mérhető a $\prod_{\alpha \in A}(X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$ szorzattérben, ha van olyan (megszámlálható) $(\alpha_k)_{k=1}^\infty$ indexsorozat, hogy B-nek az $\alpha \neq \alpha_k$ metszetei a teljes X_k terek, vagyis a B halmaz „csak megszámlálható sok koordinátától függ." Másképpen fogalmazva, egy $B \in X$ halmaz pontosan akkor mérhető a $\prod_{\alpha \in A}(X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$ szorzattérben, ha létezik olyan (megszámlálható) $(\alpha_k)_{k=1}^\infty$ indexsorozat és $\widetilde{B} \in \prod_{k=1}^\infty(X_{\alpha_k}, \mathcal{A}_{\alpha_k})$, hogy $B = \phi^{-1}(\widetilde{B})$, ahol ϕ a $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ szorzatot a $\prod_{k=1}^\infty X_{\alpha_k}$ szorzatba képező „koordinátaleképezés," mely az $x \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ („függvény")-hez az $(x_{\alpha_k})_{k=1}^\infty$ „sorozatot" rendeli hozzá.*

1.2.22. Definíció. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ egy mérhető tér. Egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvényt mérhetőnek, pontosabban $\mathcal{A}$-mérhetőnek mondunk, ha $\big((X, \mathcal{A}),\ (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))\big)$-mérhető. A mérhető valós értékű függvényekről fel szokás tenni, hogy felvehetnek végtelen értéket is. Ilyenkor mérhető halmazoknak a kiterjesztett számegyenes, mint topológikus tér Borel-halmazait tekintjük.*

1.2.23. Állítás. (Medvegyev [4], 2.24 Következmény) *Az $f : X \to \mathbb{R}$ valós (vagy kiterjesztett valós) értékű függvény pontosan akkor mérhető, ha az f valamelyik típusú nívóhalmazai, azaz az $\{x \in X : f(x)\mathcal{R}\lambda\}$ alakú halmazok, ahol $\mathcal{R}$ jelölheti a $\leqslant$, $\geqslant$, $<$, $>$ relációk akármelyikét, tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén mérhetők.*

1.2.24. Következmény. (Medvegyev [4], 2.26 Következmény) *Ha Y szeparábilis metrikus tér és $f_n : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B}(Y))$, $n \in \mathbb{N}$ mérhető leképezések olyan sorozata, amely minden $x \in X$ pontban konvergens, akkor az*

$$f : X \to Y, \quad f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x), \quad x \in X$$

leképezés is mérhető. (Ide nagyon kell a szeparábilitás.)

1.2.25. Állítás. (Medvegyev [4], 2.29 Következmény) *Valós értékű mérhető függvények összessége algebrailag zárt abban az értelemben, hogy mérhető függvények összege, szorzata, hányadosa szintén mérhető (feltéve, ha a megadott műveletnek van értelme).*

Szorzatmérték

1.2.26. Definíció. *Az* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *és* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *mértékterek* $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \pi)$ *szorzatán az* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ *szorzatmérhetőségi struktúrán értelmezett olyan* π *mértéket értünk, melyre*

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \qquad A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B},$$

vagyis amelyre a mérhető téglák mértéke a téglák „oldalainak" szorzata.

1.2.27. Állítás. *Ha* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *és* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *tetszőleges mértékterek, akkor mindig létezik az* $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ *szorzatmértéktér. Ha* μ *és* ν σ*-végesek, akkor a* $\mu \times \nu$ *szorzatmérték egyértelmű. (A* μ *mértéket akkor nevezzük* σ*-végesnek, ha léteznek olyan* $X_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ *halmazok, melyekre* $\mu(X_n) < +\infty$ *és* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$*.)*

Értelmezhető tetszőleges sok valószínűségi mező szorzata is. Lásd Stromberg [8], 175. oldal.

Baire-, Borel- és szorzatmérhetőség az $\mathbb{R}^\infty := \mathbb{R}^\mathbb{N}$ téren

Először a Baire σ-algebra és a Borel σ-algebra viszonyát vizsgáljuk. Tetszőleges $(X, \mathcal{T})$ topológikus tér esetén igaz az, hogy minden Baire-halmaz Borel-mérhető. Ugyanis, egy $f : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvény Borel-mérhető. Így **a Baire σ-algebra mindig része a Borel σ-algebrának.**

1.2.28. Állítás. (Medvegyev [4], 2.30 Példa) *Legyen* (X, d) *egy metrikus tér. Ekkor az* $(X, \mathcal{O}_d)$ *topológikus tér esetén a Baire* σ*-algebra megegyezik a Borel* σ*-algebrával.*

Bizonyítás. A fentiek miatt elég azt megmutatni, hogy ekkor a Borel σ-algebra része a Baire σ-algebrának. Legyen $F \subseteq X$ egy zárt halmaz. Ismert, hogy

$$F = \{x \in X : d(x, F) = 0\},$$

és a $g : x \in X \mapsto d(x, F)$ leképzés folytonos. Így $F = g^{-1}(\{0\})$ és g folytonos, valós értékű, ezért F Baire-halmaz. Tehát minden zárt halmaz Baire-halmaz. Legyen $U \subseteq X$ egy tetszőleges nyílt halmaz. Mivel $U = X \setminus (X \setminus U)$, $X \setminus U$ zárt és a Baire-halmazok σ-algebrát alkotnak, kapjuk, hogy U is Baire-halmaz. Tehát minden nyílt halmaz Baire-halmaz, így a generált σ-algebra definíciója alapján a Borel σ-algebra része a Baire σ-algebrának. □

A korábbiakból tudjuk, hogy $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ metrizálható, mert $\mathbb{N}$ megszámlálható és $\mathbb{R}$ metrizálható. Megmutathatók az alábbiak:

$$d : \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

metrikát határoz meg $\mathbb{R}^\infty$-en és a d metrika által definiált topológia éppen $\mathbb{R}^\infty$ szorzattopológiája, így az előző állítás alapján $\mathbb{R}^\infty$ esetén a Baire σ-algebra megegyezik a Borel σ-algebrával.

Felhasználva, hogy a szorzattopológia definíciója szerint minden $\pi_n(x) = x_n$, $x \in \mathbb{R}^\infty$, $n \in \mathbb{N}$ projekció folytonos (és valós értékű), valamint azt, hogy a szorzatmérhető halmazok

σ-algebráját az olyan $A \subseteq X$ halmazok generálják, melyekhez léteznek olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ indexek és $B \in \prod_{k=1}^n \mathcal{A}_{\alpha_k}$, hogy

$$A = \big\{x \in X : (x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) \in B\big\} = (\pi_{\alpha_1}, \dots, \pi_{\alpha_n})^{-1}(B),$$

kapjuk, hogy minden ilyen A halmaz Baire-mérhető, és ezért az ilyen A halmazok által generált σ-algebra része a Baire σ-algebrának. Azaz a szorzatmérhető halmazok σ-algebrája része a Baire σ-algebrának.

Megmutatjuk, hogy a fordított tartalmazás is igaz. Legyen $x \in \mathbb{R}^\infty$ rögzített. Végiggondoljuk, hogy az $y \in \mathbb{R}^\infty \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R}$ leképezés szorzatmérhető. Az $y \in \mathbb{R}^\infty \mapsto \pi_n(y) = y_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ projekciók szorzatmérhetők, hiszen $\pi_n^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ egy cilinderhalmaz. Így az $y \mapsto |x_k - y_k|$ függvény is szorzatmérhető (már ide is kell $\mathbb{R}$ szeparábilitása). Felhasználva azt, hogy mérhető valós értékű függvények algebrai kifejezései, valamint határértéke is mérhető, kapjuk, hogy $y \mapsto d(x, y)$ szorzatmérhető (ide is kell $\mathbb{R}$ szeparábilitása). Ezért a $d_x : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, $d_x(y) := d(x, y)$, $y \in \mathbb{R}^\infty$ jelölést használva kapjuk, hogy a

$$d_x^{-1}\big([0, r)\big) = \{y \in \mathbb{R}^\infty : d(x, y) < r\}$$

gömbök szorzatmérhetők minden $r > 0$ esetén.

1.2.29. Lemma. *Az $\mathbb{R}^\infty$ szeparábilis metrikus tér minden (a szorzattopológiában) nyílt halmaza előáll megszámlálható sok nyílt gömb uniójaként.*

Bizonyítás. Ha $U \subseteq \mathbb{R}^\infty$ nyílt (a szorzattopológiában), akkor minden $u \in U$ esetén létezik olyan $r_u > 0$, hogy $K(u, r_u) \subseteq U$, így $\bigcup_{u \in U} K(u, r_u) (= U)$ nyílt lefedése U-nak. (Itt $K(u, r_u)$ az u középpontú, r_u sugarú gömbkörnyezetet jelöli $\mathbb{R}^\infty$-ben.) Ezért felhasználva, hogy $\mathbb{R}^\infty$ szeparábilis metrikus tér, a Lindelöf-tétel alapján kapjuk, hogy ebből a nyílt lefedésből kiválasztható megszámlálható lefedés. □

Az 1.2.29. Lemma alapján, mivel a gömbök szorzatmérhetőek, és a szorzatmérhető halmazok σ-algebrát alkotnak, kapjuk, hogy $\mathbb{R}^\infty$ minden nyílt halmaza szorzatmérhető, ami azt vonja maga után, hogy $\mathbb{R}^\infty$ esetén a Borel σ-algebra része a szorzatmérhető halmazok σ-algebrájának.

Kihasználva, hogy $\mathbb{R}^\infty$ esetén a Borel-halmazok σ-algebrája megegyezik a Baire-halmazok σ-algebrájával, kapjuk, hogy $\mathbb{R}^\infty$ **esetén a Borel-halmazok σ-algebrája, a Baire-halmazok σ-algebrája és a szorzatmérhető halmazok σ-algebrája egybeesik.**

Baire-, Borel- és szorzatmérhetőség a l_2 téren (Medvegyev [4], 37-38. oldal)

Legyen

$$l_2 := \left\{x \in \mathbb{R}^\infty : \|x\| := \sqrt{\sum_{k=1}^\infty x_k^2} < +\infty\right\}.$$

Ezen a téren számos mérhetőségi struktúra definiálható. A $\|.\| : \mathbb{R}^\infty \to [0, +\infty]$, $x \in \mathbb{R}^\infty \mapsto \|x\|$ függvény az $\mathbb{R}^\infty$ téren értelmezett kiterjesztett valós értékű függvény. Hasonlóan a korábbiakhoz indokolható, hogy a $\|.\|$ függvény szorzatmérhető. Ezért, felhasználva, hogy $l_2 = \|.\|^{-1}([0,+\infty))$, kapjuk, hogy l_2 egy szorzatmérhető részhalmaza $\mathbb{R}^\infty$-nek (s így az is igaz, hogy l_2 egy Borel-mérhető és Baire-mérhető részhalmaza is $\mathbb{R}^\infty$-nek). S így definiálható l_2-n a $\mathcal{C} \cap l_2$ szorzatmérhetőségi struktúra. Itt $\mathcal{C}$ $\mathbb{R}^\infty$ szorzatmérhető halmazaiból álló σ-algebrát jelöli. Mivel l_2 a $\|.\|$ normával normált tér (Hilbert-tér is), ezen norma indukál egy metrikát, ez pedig egy topológiát l_2-n. Ezzel a topológiával l_2 egy topológikus tér, így definiálható rajta a Baire- és a Borel-mérhetőség.

Megmutatjuk, hogy l_2-n az összes mérhetőségi struktúra egybeesik (akárcsak $\mathbb{R}^\infty$ esetén). Legyen tetszőleges $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ és $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ esetén

$$A := \big\{x \in l_2 : (x_{n_1}, \dots, x_{n_k}) \in B\big\}.$$

Ekkor ezek az A halmazok megegyeznek az $\mathbb{R}^\infty$ szorzatmérhetőségét definiáló cilinderhalmazok l_2-re való leszűkítéseivel, azaz l_2-szorzatmérhetők (pontosabban $(\mathcal{C} \cap l_2)$-mérhetőek). Ezért minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $\pi_k : l_2 \to \mathbb{R}$, $\pi_k(x) = x_k$, $x \in l_2$ projekciók l_2-szorzatmérhetők. Tekintsük tetszőleges $r > 0$ esetén az

$$S := \big\{x \in l_2 : \|x - a\| < r\big\}, \qquad S_k := \big\{x \in l_2 : \|x - a\|_k < r\big\}$$

„gömböket”, ahol $\|x\|_k := \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$ és $a \in l_2$. Mivel az

$$x \in l_2 \mapsto \|x - a\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i - a_i)^2}$$

leképezés l_2-szorzatmérhető, kapjuk, hogy S_k l_2-szorzatmérhető halmaz (ugyanis $[0, r)$ inverzképe). Mivel $S = \bigcap_{k=1}^\infty S_k$, adódik, hogy S is l_2-szorzatmérhető, azaz l_2 minden nyílt gömbje l_2-szorzatmérhető. Mivel l_2 szeparábilis metrikus tér, minden nyílt halmaza előáll megszámlálható sok nyílt gömb uniójaként, és így kapjuk, hogy l_2 minden nyílt halmaza l_2-szorzatmérhető. Ezért l_2 Borel σ-algebrája része l_2 szorzatmérhető halmazaiból álló σ-algebrájának.

Megmutatjuk, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $\pi_k : l_2 \to \mathbb{R}$, $\pi_k(x) = x_k$, $x \in l_2$ projekció l_2-folytonos. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor $\delta := \varepsilon$ választással, ha $\|x\| < \delta = \varepsilon$, azaz $\sqrt{\sum_{i=1}^\infty x_i^2} < \varepsilon$, akkor $|x_k| < \varepsilon$, így π_k l_2-folytonos. Ezért a korábban bevezetett A halmazok l_2-Baire-halmazok, és ezért a generált σ-algebra definíciója szerint az l_2-szorzatmérhető halmazok σ-algebrája része l_2 Baire σ-algebrájának. Mivel l_2 metrikus tér, az 1.2.28. Állítás alapján l_2 Borel σ-algebrája megegyezik l_2 Baire σ-algebrájával. Így beláttuk, hogy mindhárom mérhetőségi struktúra egybeesik l_2 esetén.

Kolmogorov-féle konzisztenciatétel

1.2.30. Definíció. *Legyen $T \neq \emptyset$ indexhalmaz. Legyenek $(X_t, \mathcal{A}_t)_{t \in T}$ mérhető terek és*

$$T^* := \Big\{(t_1, \dots, t_n) \in T^n : t_i \neq t_j, \ \ ha \ \ i \neq j, \ \ n \in \mathbb{N}\Big\},$$

és minden $(t_1, \ldots, t_n) \in T^*$*-hoz legyen adott egy*

$$\Big(\prod_{i=1}^{n} X_{t_i}, \prod_{i=1}^{n} \mathcal{A}_{t_i}, P_{t_1,\ldots,t_n}\Big)$$

valószínűségi mező. Ekkor a $P_{t_1,\ldots,t_n}$, $(t_1, \ldots, t_n) \in T^*$, $n \in \mathbb{N}$, *összességet véges dimenziós eloszláscsaládnak nevezzük. Az eloszláscsaládot* **konzisztensnek** *hívjuk, ha kielégíti az alábbi két feltételt*

(a) *ha* π *az* $(1, 2, \ldots, n)$ *egy permutációja, akkor tetszőleges* $A_i \in \mathcal{A}_{t_i}$, $i = 1, \ldots, n$ *mérhető halmazok esetén a* $P_1 := P_{t_1,\ldots,t_n}$ *és* $P_2 := P_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(n)}}$ *valószínűségi mértékekre fennáll, hogy*

$$P_1(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = P_2(A_{\pi(1)} \times A_{\pi(2)} \times \cdots \times A_{\pi(n)}),$$

(b) *minden* $(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}) \in T^*$ *esetén, tetszőleges* $A \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{A}_{t_i}$*-re*

$$P_{t_1,\ldots,t_n}(A) = P_{t_1,\ldots,t_n,t_{n+1}}(A \times X_{t_{n+1}}).$$

1.2.31. Megjegyzés. Az első feltétel szemléletesen azt jelenti, hogy egy téglatest mértéke nem függ a koordináták sorrendjétől, a második feltétel pedig a ,,hasábok térfogata egyenlő az alapterület szorozva a magassággal" elv altalánosítása. □

1.2.32. Tétel. (Kolmogorov-féle konzisztencia tétel) *Legyen* $T \neq \emptyset$ *egy indexhalmaz,* X_t, $t \in T$ *teljes szeparábilis metrikus terek,* $\mathcal{B}_t$ *a Borel-halmazok* σ*-algebrája. Legyen továbbá minden* $(t_1, \ldots, t_n) \in T^*$, $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $P_{t_1,\ldots,t_n}$ *valószínűségi mérték a* $(\prod_{i=1}^{n} X_{t_i}, \prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{t_i})$ *mérhető téren. Tegyük fel, hogy* $P_{t_1,\ldots,t_n}$, $(t_1, \ldots, t_n) \in T^*$, $n \in \mathbb{N}$, *konzisztens, véges dimenziós eloszláscsalád. Ekkor egyértelműen létezik olyan* P *valószínűségi mérték az* $(\prod_{t\in T} X_t, \prod_{t\in T} \mathcal{B}_t)$ *mérhető téren, amelyre minden* $(t_1, \ldots, t_n) \in T^*$, $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$P_{t_1,\ldots,t_n}(A) = P\left(\left\{x \in \prod_{t\in T} X_t : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \in A\right\}\right), \qquad \forall\ A \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{t_i}.$$

(Itt $\prod_{t\in T} \mathcal{B}_t$ *a korábban bevezetett cilinderhalmazok által generált* σ*-algebra.)*

1.2.33. Megjegyzés. Az X_t halmazokat topologikus tereknek felfogva (a metrika által indukált topológiával), $\prod_{t\in T} X_t$ szorzattopológikus tér, így beszélhetünk a szorzattopológia által generált Borel-halmazokról. Mivel tudjuk, hogy a $\prod_{t\in T} \mathcal{B}_t$ σ-algebra megegyezik a projekciók által generált σ-algebrával, felhasználva, hogy minden projekció folytonos a szorzattopológiára nézve, kapjuk, hogy

$$\prod_{t\in T} \mathcal{B}_t \subseteq \text{Baire } \sigma\text{-algebra} \subseteq \text{Borel } \sigma\text{-algebra}.$$

Ha T nem megszámlálható indexhalmaz, úgy a szorzattopológia által származtatott Borel σ-algebra sokkal bővebb, mint $\prod_{t\in T} \mathcal{B}_t$ (amin a Kolmogorov-féle konzisztencia tételben szereplő P mérték létezik), vagyis a Kolmogorov-féle konzisztencia tétel által garantált P mérték a (a szorzattopológia által származtatott) Borel σ-algebránál csak szűkebb σ-algebrán létezik. Például, $\mathbb{R}^{[0,1]}$ esetén

$$\prod_{t\in T}\mathcal{B}_t = \text{Baire } \sigma\text{-algebra} \subsetneqq \text{Borel } \sigma\text{-algebra}.$$

Ekkor a Baire σ-algebra valódi része a Borel σ-algebrának, ugyanis $C([0,1])$ Borel-, de nem Baire-mérhető részhalmaza $\mathbb{R}^{[0,1]}$-nek. Az, hogy $\mathbb{R}^{[0,1]}$ esetén a Baire σ-algebra megegyezik a szorzatmérhető halmazok σ-algebrájával abból következik, hogy Medvegyev [4], 38. oldala szerint kompakt topologikus terek (tetszőleges) szorzatán értelmezett Baire σ-algebra megegyezik a szorzatmérhető halmazok σ-algebrájával. □

1.2.34. Példa. A Kolmogorov-féle konzisztencia tételben legyen

$$T := \mathbb{N}, \qquad X_t := \mathbb{R}, \qquad \mathcal{B}_t = \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad t \in T = \mathbb{N}.$$

Minden $(t_1,\dots,t_n) \in T^*$ esetén legyen $P_{t_1,\dots,t_n}$ az n-dimenziós standard normális eloszlás $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$-en. Ekkor $P_{t_1,\dots,t_n}$, $(t_1,\dots,t_n) \in T^*$ konzisztens véges dimenziós eloszláscsalád. Ezért a Kolmogorov-féle konzisztencia tétel szerint $(\mathbb{R}^\infty, \prod_{t\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_t(\mathbb{R}))$-en létezik olyan valószínűségi mérték P_1, hogy minden koordinátaleképezés (projekció) eloszlása 1-dimenziós standard normális eloszlás P_1-szerint. (A Kolmogorov-féle konzisztencia tétel szerint persze ennél sokkal több is igaz.)

Tekintsük az $l_2 \subseteq \mathbb{R}^\infty$ szeparábilis Hilbert-teret, és l_2-n az l_2-Borel σ-algebrát vegyük alapul. A korábbiak alapján

$$\mathcal{A} := l_2 \text{ szorzatmérhető részhalmazainak } \sigma\text{-algebrája} = l_2 \text{ Borel } \sigma\text{-algebrája}.$$

1.2.35. Állítás. (Medvegyev [4], 7.40 Példa) *Az $(l_2,\mathcal{A})$ mérhető téren nem definiálható olyan P valószínűségi mérték, amely a (véges dimenziós) cilinderhalmazokon éppen a megfelelő dimenziós standard normális eloszlás.* **(Azaz l_2-ben nem érvényes a Kolmogorov-féle alaptétel.)**

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy létezik ilyen P valószínűségi mérték, és vezessük be újra az

$$S(r) := \big\{x \in l_2 : \|x\| < r\big\}, \qquad S_n(r) := \big\{x \in l_2 : \|x\|_n < r\big\}, \quad r > 0, \ \ n \in \mathbb{N},$$

jelöléseket, ahol $\|x\|_n := \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor $S(r) \subseteq S_n(r)$ és $S(r)$, $S_n(r) \in \mathcal{A}$, és így

$$P(S(r)) \leqslant P(S_n(r)), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Megmutatjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} P(S_n(r)) = 0$ minden $r > 0$ esetén. Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, $(l_2, \mathcal{A}, P)$-n értelmezett független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ esetén

$$\begin{aligned}
P(S_n(r)) &= P(\{x \in l_2 : \|x\|_n < r\}) = P\left(\left\{x \in l_2 : \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} < r\right\}\right) \\
&= P\left(\left\{x \in l_2 : \sqrt{\sum_{k=1}^n (\pi_k(x))^2} < r\right\}\right) = P\left(\sqrt{\sum_{k=1}^n \xi_k^2} < r\right) \\
&= P\Big(\sum_{k=1}^n \xi_k^2 < r^2\Big) = P\Big(\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k^2}{n} < \frac{r^2}{n}\Big).
\end{aligned}$$

Legyen $n_0 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n \geqslant n_0$-ra $r^2/n < 1/2$, azaz $2r^2 < n$. Ekkor $n \geqslant n_0$ esetén

$$\begin{aligned}
P(S_n(r)) &\leqslant P\Big(\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k^2}{n} < \frac{1}{2}\Big) = P\Big(\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k^2}{n} - 1 < -\frac{1}{2}\Big) \\
&\leqslant P\Big(\Big\{\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k^2}{n} - 1 > \frac{1}{2}\Big\} \cup \Big\{\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k^2}{n} - 1 < -\frac{1}{2}\Big\}\Big) \;= P\Big(\Big|\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k^2}{n} - 1\Big| > \frac{1}{2}\Big).
\end{aligned}$$

Mivel $\mathbb{E}\xi_n^2 = 1, n \in \mathbb{N}$, a Csebisev-egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} P(S_n(r)) = 0$ minden $r > 0$ esetén.

Mivel $P(S(r)) \leqslant P(S_n(r))$, $n \in \mathbb{N}$, kapjuk, hogy $P(S(r)) = 0$ minden $r > 0$ esetén. Felhasználva, hogy

$$l_2 = \bigcup_{r>0} S(r) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S(n),$$

és azt, hogy $S(n+1) \subseteq S(n)$, $P(S(1)) \leqslant 1 < +\infty$, kapjuk, hogy

$$P(l_2) = \lim_{n\to\infty} P(S(n)) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

ami ellentmondás, hiszen P valószínűségi mérték l_2-n, így $P(l_2) = 1$ kellene, hogy fennálljon.

A fenti levezetés heurisztikusan azt is mutatja, hogy ha P az $\mathbb{R}^\infty$ téren megszámlálható sok független standard normális eloszlású valószínűségi változó együttes eloszlása, akkor $P(l_2) = 0$. □

1.3. Független növekményű folyamatok

1.3.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ *sztochasztikus folyamat* ***független növekményű****, ha* $\mathbb{P}(\xi_0 = 0) = 1$, *és tetszőleges* $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ *időpontok esetén a* $\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}$ *növekmények (teljesen) függetlenek.*

Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ *sztochasztikus folyamat* ***független, stacionárius növekményű****, ha független növekményű, és a növekmények eloszlása időeltolással szemben invariáns, azaz tetszőleges* $0 \leqslant s < t$ *időpontok esetén a* $\xi_t - \xi_s$ *növekmény eloszlása csak* $(t-s)$*-től függ (vagyis* $\xi_{t+h} - \xi_t$ *eloszlása nem függ* t*–től).*

1.3.2. Megjegyzés. Legyenek X és Y független valószínűségi változók F és G eloszlásfüggvényekkel. Ekkor $X + Y$ eloszlásfüggvényét H-val jelölve,

$$H(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z - y)\, \mathsf{d}G(y), \quad z \in \mathbb{R}.$$

A H eloszlásfüggvényt az F és a G eloszlásfüggvények konvolúciójának nevezzük. □

Az alábbiakban felidézünk egy konstrukciót megszámlálhatóan végtelenül sok, előlre adott eloszlású, független valószínűségi változókból álló sztochasztikus folyamatra.

1.3.3. Megjegyzés. Legyen $\Omega := [0, 1[$, $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\Omega)$ és $P := \lambda|_{\mathcal{A}}$, ahol λ a $[0, 1[$-en definiált Lebesgue-mértéket jelöli. Legyen minden $\omega \in \Omega$ esetén $\{d_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ az $\omega \in [0, 1[$ valós szám diadikus törtbefejtése. Azaz $\omega \in [0, 1[$ esetén a $\{d_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ sorozatot az alábbi rekurzióval definiáljuk: $d_1(\omega) := [2\omega]$, $d_{n+1}(\omega) := [2^{n+1}\omega - (d_1(\omega)2^n + \cdots + d_n(\omega)2)]$. (Itt $[x]$ egy x valós szám egészrészét jelöli.) Analízisből tanultuk, hogy erre a $\{d_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ sorozatra igazak az alábbiak

(a) $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re $d_n(\omega) \in \{0, 1\}$,

(b) nem létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, melyre $d_n(\omega) = 1$ bármilyen $n > n_0$ esetén,

(c) a ω számot meghatározza a diadikus törtbefejtése az alábbi értelemben

$$\omega = \sup\left\{\frac{d_1(\omega)}{2} + \cdots + \frac{d_n(\omega)}{2^n},\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Így minden $n \in \mathbb{N}$-re egyértelműen definiáltunk egy $d_n : \Omega \to \{0, 1\}$ függvényt.

Megmutatható, hogy $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók és $P(d_n = 0) = P(d_n = 1) = \frac{1}{2}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re.

Legyenek $\{\mu_j, j \in \mathbb{N}\}$ valószínűségi mértékek $\mathbb{R}$-en. Ekkor megmutatható, hogy léteznek olyan $\{X_j, j \in \mathbb{N}\}$ független valószínűségi változók $(\Omega, \mathcal{A}, P)$-n, hogy X_j eloszlása μ_j, $j \in \mathbb{N}$, azaz $P(X_j \in B) = \mu_j(B)$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$. (A fent definiált d_n valószínűségi változók szerepelnek az X_j-k konstrukciójában.) Lásd Stromberg [8], Theorem 3.14. □

A $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ független növekményű sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásainak megadásához nyilván elegendő megadni a $\{\xi_t - \xi_s : 0 \leqslant s < t\}$ növekmények eloszlását, hiszen ekkor tetszőleges $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ esetén már megvan $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}})$ eloszlása is. Valóban, $\xi_{t_1} = \xi_{t_1} - \xi_0$ is növekménynek tekinthető, és a koordináták függetlenek, s így bármilyen $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} P(\xi_{t_1} < x_1, \xi_{t_2} - \xi_{t_1} < x_2, \ldots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}} < x_k) \\ = P(\xi_{t_1} < x_1) P(\xi_{t_2} - \xi_{t_1} < x_2) \cdots P(\xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}} < x_k). \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{pmatrix}\xi_{t_1}\\ \xi_{t_2}\\ \vdots\\ \xi_{t_k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_{t_1}\\ \xi_{t_2}-\xi_{t_1}\\ \vdots\\ \xi_{t_k}-\xi_{t_{k-1}}\end{pmatrix}\tag{1.3.1}$$

alapján adott $(\xi_{t_1},\xi_{t_2},\dots,\xi_{t_k})$ eloszlása is. Ugyanis

$$P\left(\begin{pmatrix}\xi_{t_1}\\ \xi_{t_2}\\ \vdots\\ \xi_{t_k}\end{pmatrix}<\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_k\end{pmatrix}\right)=P\left(\begin{pmatrix}\xi_{t_1}\\ \xi_{t_2}-\xi_{t_1}\\ \vdots\\ \xi_{t_k}-\xi_{t_{k-1}}\end{pmatrix}<\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_k\end{pmatrix}\right),$$

ez utóbbi valószínűség pedig már meghatározott, mert $(\xi_{t_1},\xi_{t_2}-\xi_{t_1},\dots,\xi_{t_k}-\xi_{t_{k-1}})$ eloszlását ismerjük.

Az is világos, hogy a $\{\xi_t : t\geqslant 0\}$ független, stacionárius növekményű sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásainak megadásához elegendő megadni a $\{\xi_t : t\geqslant 0\}$ eloszlásokat (azaz az ,,egydimenziós" eloszlásokat), hiszen tetszőleges $0\leqslant s<t$ esetén $\xi_t-\xi_s$ eloszlása megegyezik $\xi_{t-s}-\xi_0=\xi_{t-s}$ eloszlásával. Az is nyilvánvaló, hogy az $\{F_{\xi_t} : t\geqslant 0\}$ eloszlásfüggvényekre teljesül $F_{\xi_{s+t}}=F_{\xi_s}*F_{\xi_t}$ tetszőleges $s,t\geqslant 0$ esetén (ahol $G*H$ a G és H eloszlásfüggvények konvolúcióját jelöli), hiszen

$$\xi_{s+t}=(\xi_{s+t}-\xi_t)+\xi_t,$$

ahol $\xi_{s+t}-\xi_t$ és $\xi_t=\xi_t-\xi_0$ függetlenek, és $\xi_{s+t}-\xi_t$ eloszlása megegyezik $\xi_s-\xi_0=\xi_s$ eloszlásával.

1.3.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy eloszlásfüggvényeknek egy* $\{F_t : t\geqslant 0\}$ *serege* ***egyparaméteres konvolúciós félcsoportot*** *alkot, ha* $F_{s+t}=F_s*F_t$ *tetszőleges* $s,t\geqslant 0$ *esetén, és* $F_0=\mathbb{1}_{(0,\infty)}$.

1.3.5. Megjegyzés. Az előző definícióban az $F_0=\mathbb{1}_{(0,\infty)}$ megkötés már következik az $F_{s+t}=F_s*F_t$, $s,t\geqslant 0$ feltételből. Ugyanis az $s=t=0$ választással kapjuk, hogy $F_0=F_0*F_0$. Felhasználjuk azt, ha X egy teljes szeparábilis metrikus csoport és μ egy idempotens valószínűségi mérték X-en (azaz $\mu*\mu=\mu$), akkor létezik egy olyan $S\subseteq X$ kompakt részcsoport, hogy μ a normalizált Haar-mérték S-en (lásd Parthasarathy [6], Theorem 3.1, Chapter III). Mivel $\mathbb{R}$ esetén az egyetlen kompakt részcsoport az összeadásra nézve a nullából álló triviális részcsoport, kapjuk, hogy $\mathbb{R}$ esetén μ (azaz F_0) a nullába koncentrálódó Dirac-mérték. Elemibb indoklás is adható. Jelölje φ_0 egy F_0 eloszlásfüggvényű valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Ekkor $F_0=F_0*F_0$ miatt $\varphi_0(t)=\varphi_0^2(t)$, $t\in\mathbb{R}$. Felhasználva, hogy $\varphi_0(0)=1$ és φ_0 folytonos, kapjuk, hogy $\varphi_0(t)=1$ bármilyen $t\in\mathbb{R}$ esetén, azaz F_0 a 0-ba koncentrálódó Dirac-mértékhez tartozó eloszlásfüggvény. □

1.3.6. Állítás. *Legyen* $\{F_t : t \geqslant 0\}$ *eloszlásfüggvényeknek egyparaméteres konvolúciós félcsoportja. Ekkor létezik* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mező és rajta* $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ *független, stacionárius növekményű sztochasztikus folyamat úgy, hogy* $F_{\xi_t} = F_t$ *tetszőleges* $t \geqslant 0$ *esetén. (Ekkor a korábbiak miatt* $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ *véges dimenziós eloszlásai már egyértelműen meghatározottak, és a bizonyításból az is kijön, hogy* $F_{\xi_{t_2}-\xi_{t_1}} = F_{t_2-t_1}$ *minden* $0 \leqslant t_1 < t_2$ *esetén.)*

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőlegesen rögzített. Legyen $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ esetén $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ olyan valószínűségi vektorváltozó, melynek koordinátái függetlenek és rendre $F_{t_1}, F_{t_2-t_1}, \ldots, F_{t_k-t_{k-1}}$ eloszlásúak. Az 1.3.3. Megjegyzés szerint létezik olyan valószínűségi mező, melyen $\eta_1, \ldots, \eta_k$ a feltételeknek megfelelően definiálható. Jelölje $F_{t_1,t_2,\ldots,t_k}$ az

$$(\eta_1, \eta_1 + \eta_2, \ldots, \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_k)$$

eloszlásfüggvényét. Belátjuk, hogy teljesül a kompatibilitási feltétel. Azt kell megmutatni, hogy ha $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_\ell \leqslant k$ egészek, akkor a fenti vektor $i_1, i_2, \ldots, i_\ell$ sorszámú koordinátáinak együttes eloszlása megegyezik egy olyan

$$(\widetilde{\eta}_{i_1}, \widetilde{\eta}_{i_1} + \widetilde{\eta}_{i_2}, \ldots, \widetilde{\eta}_{i_1} + \widetilde{\eta}_{i_2} + \cdots + \widetilde{\eta}_{i_\ell})$$

vektor eloszlásával, ahol $(\widetilde{\eta}_{i_1}, \widetilde{\eta}_{i_2}, \ldots, \widetilde{\eta}_{i_\ell})$ olyan vektor, melynek koordinátái függetlenek és rendre $F_{t_{i_1}}, F_{t_{i_2}-t_{i_1}}, \ldots, F_{t_{i_\ell}-t_{i_{\ell-1}}}$ eloszlásúak. (Hasonlóan az előzőkhöz olyan valószínűségi mező is létezik, amin az $\widetilde{\eta}_j$-k definiálva vannak. Ez más, mint az előző valószínűségi mező, de ez nem baj, mert minket úgy is csak az eloszlásuk érdekel a valószínűségi változóknak.) Ekkor a feltételek alapján

$$\eta_{i_j+1} + \eta_{i_j+2} + \cdots + \eta_{i_{j+1}}, \quad j = 0, \ldots, l-1,$$

eloszlásfüggvénye

$$F_{t_{i_j+1}-t_{i_j}} * F_{t_{i_j+2}-t_{i_j+1}} * \cdots * F_{t_{i_{j+1}}-t_{i_{j+1}-1}} = F_{t_{i_{j+1}}-t_{i_j}}, \quad j = 0, \ldots, l-1,$$

ami éppen $\widetilde{\eta}_{i_{j+1}}$ eloszlásfüggvénye. (Itt az $i_0 := 0$ és $t_0 := 0$ jelölésekkel élünk.) Ezt felhasználva a kompatibilitás könnyen következik, ugyanis $j = 0$-ra kapjuk, hogy $\eta_{i_0+1} + \cdots + \eta_{i_{0+1}} = \eta_1 + \cdots + \eta_{i_1}$ eloszlásfüggvénye $F_{t_{i_1}}$, és így az eloszlása megegyezik $\widetilde{\eta}_{i_1}$ eloszlásával. A $j = 1$ választással kapjuk, hogy $\eta_{i_1+1} + \cdots + \eta_{i_2}$ eloszlásfüggvénye $F_{t_{i_2}} - F_{t_{i_1}}$, és így eloszlása megegyezik $\widetilde{\eta}_{i_2}$ eloszlásával. Felhasználva azt, hogy $\eta_1, \ldots, \eta_{i_2}$ függetlenek és azt, hogy $\widetilde{\eta}_{i_1}$ és $\widetilde{\eta}_{i_2}$ is függetlenek kapjuk, hogy $\eta_1 + \cdots + \eta_{i_1} + \eta_{i_1+1} + \cdots + \eta_{i_2}$ eloszlása megegyezik $\widetilde{\eta}_{i_1} + \widetilde{\eta}_{i_2}$ eloszlásával. A $j = 2, \cdots, l-1$ választással hasonló gondolatmenetet használva adódik a kompatibilitási feltétel.

Tehát lehet alkalmazni Kolmogorov-alaptételét. A kapott $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ folyamatra teljesül, hogy $F_{\xi_{t_1},\ldots,\xi_{t_k}} = F_{t_1,\ldots,t_k}$ minden $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_k \in T$, $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_k$ esetén. Speciálisan, $F_{\xi_t} = F_t$, $t \geqslant 0$. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőlegesen rögzített, ekkor a konstrukció alapján $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ esetén $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_k})$ eloszlása megegyezik az

$(\eta_1, \eta_1+\eta_2, \dots, \eta_1+\eta_2+\dots+\eta_k)$ vektor eloszlásával, ezért $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}-\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k}-\xi_{t_{k-1}})$ eloszlása megegyezik $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)$ eloszlásával. Ugyanis (1.3.1) alapján

$$\begin{pmatrix} \xi_{t_1} \\ \xi_{t_2}-\xi_{t_1} \\ \vdots \\ \xi_{t_k}-\xi_{t_{k-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_{t_1} \\ \xi_{t_2} \\ \vdots \\ \xi_{t_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{t_1} \\ \xi_{t_2} \\ \vdots \\ \xi_{t_k} \end{pmatrix}. \tag{1.3.2}$$

Mivel $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_k})$ eloszlása megegyezik az $(\eta_1, \eta_1+\eta_2, \dots, \eta_1+\eta_2+\dots+\eta_k)$ vektor eloszlásával, (1.3.2) jobboldala eloszlásban megegyezik az alábbi valószínűségi vektor változó eloszlásával:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_1+\eta_2 \\ \vdots \\ \eta_1+\eta_2+\dots+\eta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_k \end{pmatrix}.$$

Ezért a folyamat valóban független, stacionárius növekményű, hiszen az η_i-k függetlenek és η_i eloszlása $F_{t_i-t_{i-1}}$, ami a konstrukció miatt megegyezik $\xi_{t_i-t_{i-1}}$ eloszlásával, ill. a fentiek miatt $\xi_{t_i}-\xi_{t_{i-1}}$ eloszlásával is, és csak t_i-t_{i-1}-től függ. □

1.4. Wiener-folyamat és Gauss-folyamatok

1.4.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\{W_t : t \geqslant 0\}$ folyamat **(m,σ^2)-paraméterű Wiener-folyamat (Brown-mozgás)**, ahol $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$, ha*

(i) *független, stacionárius növekményű,*

(ii) *tetszőleges $0 \leqslant s < t$ időpontok esetén $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(m(t-s), \sigma^2(t-s))$,*

(iii) *P-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén a $t \in [0,+\infty) \mapsto W_t(\omega)$ trajektória folytonos.*

*A $(0,1)$-paraméterű Wiener-folyamatot **standard Wiener-folyamatnak** nevezzük.*

1.4.2. Megjegyzés. Mivel a független növekményűség definíciójába beleértettük, hogy az illető folyamat a 0-ból indul ki, ha $\{W_t : t \geqslant 0\}$ egy (m,σ^2)-paraméterű Wiener-folyamat, akkor $W_0 = 0$. A (ii) feltételből már következik, hogy a folyamat stacionárius növekményű. □

Az 1.3.6. Állítás alapján létezik olyan független, stacionárius növekményű $\{W_t : t \geqslant 0\}$ folyamat, melynek növekményeire teljesül, hogy $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(m(t-s), \sigma^2(t-s))$, ugyanis csak azt kell ellenőrizni, hogy az $\{\mathcal{N}(mt, \sigma^2 t) : t \geqslant 0\}$ eloszlások egyparaméteres konvolúciós félcsoportot alkotnak. (Itt $\mathcal{N}(0,0)$ alatt azt az eloszlást értjük, mely a 0 pontra koncentrálódik.) Ez pedig azért igaz, mert független normális eloszlású valószínűségi változók összege is normális eloszlású és a paraméterek is összeadódnak.

Az, hogy a harmadik, folytonossági feltétel is kielégíthető a Wiener-folyamat definíciójában, a következő tétel alapján bizonyítható.

1.4.3. Tétel. (Kolmogorov-kritérium) *Ha $\{\xi_t : t \in T\}$ olyan valós fázisterű sztochasztikus folyamat, ahol $T \subseteq \mathbb{R}$ véges vagy végtelen intervallum, és léteznek olyan $\alpha > 0$, $\beta > 0$ és $c > 0$ számok, hogy*

$$\mathbb{E}|\xi_t - \xi_s|^\alpha \leqslant c|t-s|^{1+\beta}$$

teljesül tetszőleges $s, t \in T$ esetén, akkor a folyamatnak létezik olyan modifikációja, melynek minden trajektóriája folytonos.

A Kolmogorov-kritérium csak elégséges, de nem szükséges feltétel a folytonos modifikáció biztosításához.

1.4.4. Következmény. *Ha $\{\xi_t : t \in T\}$, $T \subseteq \mathbb{R}$ olyan valós fázisterű sztochasztikus folyamat, mely teljesíti a Kolmogorov-kritérium feltételeit, akkor sztochasztikusan folytonos, azaz ha $t \in T$ és $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan T-beli sorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} t_n = t$, akkor ξ_{t_n} tart sztochasztikusan ξ_t-hez, ha $n \to \infty$.*

Bizonyítás. Legyen $t \in T$ és $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $t_n \in T$-beli sorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Ekkor a Markov-egyenlőtlenség alapján, felhasználva a Kolmogorov-kritériumot kapjuk, hogy léteznek olyan $\alpha > 0$, $\beta > 0$ és $c > 0$ számok, hogy

$$P(|\xi_{t_n} - \xi_t| \geqslant \varepsilon) = P(|\xi_{t_n} - \xi_t|^\alpha \geqslant \varepsilon^\alpha) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\mathbb{E}|\xi_{t_n} - \xi_t|^\alpha \leqslant \frac{c}{\varepsilon^\alpha}|t_n - t|^{1+\beta},$$

amiből adódik az állítás. □

1.4.5. Megjegyzés. Az előző bizonyításból látszik, hogy egy $\{\xi_t : t \in T\}$ valós fázisterű sztochasztikus folyamat sztochasztikus folytonossága a véges dimenziós eloszlássereg ismerete alapján eldönthető.

Az alábbiakban megfogalmazunk egy állítást, melyből következik, hogy elegendő a standard Wiener-folyamat létezését belátni.

1.4.6. Állítás. *Ha $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat, akkor $\{\widetilde{W}_t := m\,t + \sigma W_t : t \geqslant 0\}$ egy (m, σ^2)-paraméterű Wiener-folyamat, ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.*

Bizonyítás. Az 1.4.1. Definíció (i),(ii) és (iii) feltételeit kell leellenőrizni a $\{\widetilde{W}_t : t \geqslant 0\}$ folyamatra. A (iii) feltétel automatikusan teljesül. Tetszőleges $0 \leqslant t_1 < t_2$ esetén

$$\widetilde{W}_{t_2} - \widetilde{W}_{t_1} = (mt_2 + \sigma W_{t_2}) - (mt_1 + \sigma W_{t_1}) = m(t_2 - t_1) + \sigma(W_{t_2} - W_{t_1}).$$

Ennek eloszlása $\mathcal{N}(m(t_2-t_1), \sigma^2(t_2-t_1))$, és így (ii) is teljesül. Mivel $\widetilde{W}_0 = m0+\sigma W_0 = 0$, ezért (i) belátásához csak azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ esetén a

$$\widetilde{W}_{t_1}, \widetilde{W}_{t_2} - \widetilde{W}_{t_1}, \ldots, \widetilde{W}_{t_k} - \widetilde{W}_{t_{k-1}}$$

növekmények függetlenek. Mivel $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat, ezért a $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ növekmények függetlenek. Felhasználva azt, hogy $\widetilde{W}_{t_{i+1}} - \widetilde{W}_{t_i} = m(t_{i+1} - t_i) + \sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$, $i = 1, \ldots, k-1$ és azt az állítást, hogy ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független valószínűségi változók és $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvények, akkor az $\eta_1 := g_1(\xi_1), \ldots, \eta_n = g_n(\xi_n)$ valószínűségi változók is függetlenek, kapjuk a $\{\widetilde{W}_t : t \geqslant 0\}$ folyamatra vonatkozó növekmények függetlenségét. □

Megmutatjuk, hogy a Kolmogorov-kritérium feltételei teljesülnek az 1.3.6. Állítás alapján létező független, stacionárius növekményű $\{W_t : t \geqslant 0\}$ folyamatra, melynek növekményeire fennáll, hogy $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(m(t-s), \sigma^2(t-s))$, ha $0 \leqslant s < t$. Felhasználva, hogy ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor $\mathbb{E}\xi^{2k} = 1{\cdot}3{\cdot}5 \cdots (2k-1) = (2k-1)!!$, $k \in \mathbb{N}$, kapjuk, hogy

$$E(W_t - W_s)^4 = \mathbb{E}\Big(\sqrt{|t-s|}\,\mathcal{N}(0,1)\Big)^4 = 3(t-s)^2,$$

ha $s, t \geqslant 0$. Így teljesül a Kolmogorov-kritérium feltétele $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $c = 3$ választásokkal. Ezért létezik olyan folytonos trajektóriájú $\{\widetilde{W}_t : t \geqslant 0\}$ folyamat, hogy $P(W_t = \widetilde{W}_t) = 1$, $\forall\, t \geqslant 0$. Így a $\{\widetilde{W}_t : t \geqslant 0\}$ folyamat kielégíti az 1.4.1. Definíció (i),(ii) és (iii) feltételeit. Valóban, az (i) és (ii) tulajdonságok is érvényben maradnak. Például, (ii) esetén, mivel $\mathbb{P}(\widetilde{W}_t = W_t) = 1$ és $\mathbb{P}(\widetilde{W}_s = W_s) = 1$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F_{\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s}(x) &= \mathbb{P}(\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s < x) = \mathbb{P}(\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s < x, \widetilde{W}_t = W_t, \widetilde{W}_s = W_s) \\ &= \mathbb{P}(W_t - W_s < x) = F_{W_t - W_s}(x) = F_{\mathcal{N}(0,t-s)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Az (i) tulajdonság is érvényben marad, mert csak véges sok koordinától függen a szóban forgó tulajdonság, és véges sok 1 valószínűségű esemény metszete is 1 valószínűségű esemény.

Természetes módon felmerül kérdésként, hogy lehetséges-e egy (m, σ^2)-paraméterű $(W_t)_{t\geqslant 0}$ Wiener-folyamat trajektóriáinak folytonosságát biztosítani a Kolmogorov-féle folytonossági kritériummal. Nem, ugyanis

$$\mathbb{E}((W_t - W_s)^4) = \mathbb{E}((m(t-s) + \sqrt{t-s}\sigma W_1)^4) = (t-s)^2\mathbb{E}((m\sqrt{t-s} + \sigma W_1)^4), \qquad s, t \geqslant 0,$$

és $\mathbb{E}((m\sqrt{t-s} + \sigma W_1)^4)$, $s, t \geqslant 0$, nem korlátos. Ez azonban nem vezet ellentmondáshoz, mert a Kolmogorov-féle folytonossági kritérium csak egy elégséges feltétel és nem szükséges. Egy (m, σ^2)-paraméterű $(W_t)_{t\in[0,1]}$ Wiener-folyamat esetén viszont használható a Kolmogorov-féle folytonossági kritérium, ugyanis ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((W_t - W_s)^4) &\leqslant 4(m^4(t-s)^4 + (t-s)^2\sigma^4\mathbb{E}(W_1^4)) = 4(t-s)^2(m^4(t-s)^2 + \sigma^4\mathbb{E}(W_1^4)) \\ &\leqslant 4(m^4 + 3\sigma^4)(t-s)^2, \qquad s, t \in [0,1]. \end{aligned}$$

A következő állítás független standard Wiener-folyamatok ,,összeragasztásával" kapcsolatos.

1.4.7. Állítás. *Legyenek* $\{W_t^{(1)} : t \in [0,1]\}$ *és* $\{W_t^{(2)} : t \in [0,1]\}$ *ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezett független standard Wiener-folyamatok. Ekkor a*

$$\widetilde{W}_t := \begin{cases} W_t^{(1)} & ha \quad t \in [0,1], \\ W_1^{(1)} + W_{t-1}^{(2)} & ha \quad t \in (1,2], \end{cases}$$

módon definiált $\{\widetilde{W}_t : t \in [0,2]\}$ *folyamat standard Wiener-folyamat.*

Bizonyítás. Az 1.4.1. Definíció (i),(ii) és (iii) feltételeit kell leellenőrizni a $\{\widetilde{W}_t : t \in [0,2]\}$ folyamatra. A (iii) feltétel automatikusan igaz $\widetilde{W}_t$ definíciója és a standard Wiener-folyamat folytonossága miatt. A független növekményűséghez azt kell leellenőrizni, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ és $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leqslant 2$ esetén a

$$\widetilde{W}_{t_1}, \widetilde{W}_{t_2} - \widetilde{W}_{t_1}, \ldots, \widetilde{W}_{t_k} - \widetilde{W}_{t_{k-1}}$$

növekmények függetlenek. Legyen i az az index (feltéve, ha létezik), melyre $t_{i-1} \leqslant 1 < t_i$ teljesül. Mivel egy standard Wiener-folyamat független növekményű, az alapul vett Wiener-folyamatok függetlenségéből következik, hogy a

$$\widetilde{W}_{t_1}, \widetilde{W}_{t_2} - \widetilde{W}_{t_1}, \ldots, \widetilde{W}_{t_{i-1}} - \widetilde{W}_{t_{i-2}}, \widetilde{W}_{t_{i+1}} - \widetilde{W}_{t_i}, \ldots, \widetilde{W}_{t_k} - \widetilde{W}_{t_{k-1}} \tag{1.4.1}$$

növekmények függetlenek. Azt kell tehát csak ellenőrizni, hogy a $\widetilde{W}_{t_i} - \widetilde{W}_{t_{i-1}}$ növekmény független az (1.4.1)-ban szereplő növekményektől. Mivel $\widetilde{W}_{t_i} - \widetilde{W}_{t_{i-1}} = W_1^{(1)} + W_{t_i-1}^{(2)} - W_{t_{i-1}}^{(1)} = (W_1^{(1)} - W_{t_{i-1}}^{(1)}) + W_{t_i-1}^{(2)}$ és $W_{t_i-1}^{(2)}$ a $W_{t_i-1}^{(2)} - W_0^{(2)}$ növekménynek tekinthető egy, az előbbihez hasonló érveléssel kapjuk a dolgot. (Amikor nem létezik a fenti tulajdonságú i index, akkor azonnal kapjuk a dolgot.)

Végezetül azt kell még belátni, hogy tetszőleges $0 \leqslant s < t \leqslant 2$ esetén $\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s$ normális eloszlású 0 várható értékkel és $t - s$ szórásnégyzettel. Ha $s, t \in [0,1]$, akkor

$$\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s = W_t^{(1)} - W_s^{(1)},$$

mely $\mathcal{N}(0, t-s)$ eloszlású.

Ha $s, t \in (1,2]$, akkor

$$\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s = W_1^{(1)} + W_{t-1}^{(2)} - W_1^{(1)} - W_{s-1}^{(2)} = W_{t-1}^{(2)} - W_{s-1}^{(2)},$$

mely $\mathcal{N}(0, t-1-(s-1)) = \mathcal{N}(0, t-s)$ eloszlású.

Ha $0 \leqslant s \leqslant 1 < t \leqslant 2$, akkor

$$\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s = W_1^{(1)} + W_{t-1}^{(2)} - W_s^{(1)}.$$

Mivel $W_1^{(1)} - W_s^{(1)}$ eloszlása $\mathcal{N}(0, 1-s)$ és $W_{t-1}^{(2)}$ eloszlása $\mathcal{N}(0, t-1)$, felhasználva függetlenségüket kapjuk, hogy $\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s$ eloszlása $\mathcal{N}(0, 1-s) * \mathcal{N}(0, t-1) = \mathcal{N}(0, t-s)$. $\square$

A $\{W_t : t \in [0,1]\}$ standard Wiener-folyamatot közelíthetjük a következő módon.

1.4.8. Állítás. *Legyenek* $\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\}$ *független, azonos eloszlású valószínűségi változók,* $\mathbb{E}\eta_1 = 0$, $\mathbb{D}^2\eta_1 = 1$. *Definiáljuk minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén a* $\{\xi_t^{(n)} : t \in [0,1]\}$ *sztochasztikus folyamatot a következő módon:*

$$\xi_t^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} \eta_i, \quad t \in [0,1].$$

Ekkor a $\{\xi_t^{(n)} : t \in [0,1]\}$, $n = 1, 2, \ldots$ *folyamatok véges dimenziós eloszlásai gyengén konvergálnak a* $\{W_t : t \in [0,1]\}$ *standard Wiener-folyamat véges dimenziós eloszlásaihoz.*

Bizonyítás. A véges dimenziós eloszlások gyenge konvergenciájához azt kell belátni, hogy tetszőlegesen rögzített $k \in \mathbb{N}$ és $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leqslant 1$ esetén fennáll, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi_{t_1}^{(n)} < x_1, \ldots, \xi_{t_k}^{(n)} < x_k) = P(W_{t_1} < x_1, \ldots, W_{t_k} < x_k),$$

minden $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ esetén. (Itt felhasználtuk azt is, hogy a később szereplő 1.4.14. Állítás alapján $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k})$ k-dimenziós normális eloszlású, és így eloszlásfüggvényének minden $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ folytonossági pontja.) Megmutatjuk, hogy elegendő azt belátni, hogy tetszőleges $0 \leqslant s < t$ esetén

$$\xi_t^{(n)} - \xi_s^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s). \tag{1.4.2}$$

A $\{\xi_t^{(n)} : t \in [0,1]\}$, $n = 1, 2, \ldots$ folyamatok független növekményűek, hiszen $0 \leqslant s < t$ esetén

$$\xi_t^{(n)} - \xi_s^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=[ns]+1}^{[nt]} \eta_i,$$

Továbbá, felhasználva az (1.3.1) összefüggést kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&P(\xi_{t_1}^{(n)} < x_1, \ldots, \xi_{t_k}^{(n)} < x_k) \\
&= P\left(\begin{pmatrix} \xi_{t_1}^{(n)} \\ \vdots \\ \xi_{t_k}^{(n)} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \right) = P\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{t_1}^{(n)} \\ \xi_{t_2}^{(n)} - \xi_{t_1}^{(n)} \\ \vdots \\ \xi_{t_k}^{(n)} - \xi_{t_{k-1}}^{(n)} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \right) \\
&= P\left(\begin{pmatrix} \xi_{t_1}^{(n)} \\ \xi_{t_2}^{(n)} - \xi_{t_1}^{(n)} \\ \vdots \\ \xi_{t_k}^{(n)} - \xi_{t_{k-1}}^{(n)} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \right),
\end{aligned}$$

és így (1.3.2) alapján

$$P(\xi_{t_1}^{(n)} < x_1, \dots, \xi_{t_k}^{(n)} < x_k) = P\left(\begin{pmatrix} \xi_{t_1}^{(n)} \\ \xi_{t_2}^{(n)} - \xi_{t_1}^{(n)} \\ \vdots \\ \xi_{t_k}^{(n)} - \xi_{t_{k-1}}^{(n)} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ \vdots \\ x_k - x_{k-1} \end{pmatrix}\right).$$

Felhasználva azt, hogy a $\{\xi_t^{(n)} : t \in [0,1]\}$ folyamat független növekményű kapjuk, hogy

$$P(\xi_{t_1}^{(n)} < x_1, \dots, \xi_{t_k}^{(n)} < x_k) = P(\xi_{t_1}^{(n)} < x_1)P(\xi_{t_2}^{(n)} - \xi_{t_1}^{(n)} < x_2 - x_1) \cdots P(\xi_{t_k}^{(n)} - \xi_{t_{k-1}}^{(n)} < x_k - x_{k-1}).$$

Hasonló számolás adja, hogy

$$P(W_{t_1} < x_1, \dots, W_{t_k} < x_k) = P(W_{t_1} < x_1)P(W_{t_2} - W_{t_1} < x_2 - x_1) \cdots P(W_{t_k} - W_{t_{k-1}} < x_k - x_{k-1}).$$

Így kapjuk, hogy elegendő belátnunk, hogy tetszőleges $0 \leqslant s < t \leqslant 1$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi_t^{(n)} - \xi_s^{(n)} < x) = P(W_t - W_s < x),$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ez pedig definíció szerint azt jelenti, hogy $\xi_t^{(n)} - \xi_s^{(n)}$ tart eloszlásban $(W_t - W_s)$-hez, ha $n \to \infty$.

Rátérünk most (1.4.2) bizonyítására. A folytonossági tétel alapján ehhez elég azt belátni, hogy

$$\varphi_{\xi_t^{(n)} - \xi_s^{(n)}}(w) \to \varphi_{W_t - W_s}(w) = \varphi_{\mathcal{N}(0, t-s)}(w) = e^{-\frac{(t-s)w^2}{2}}, \quad w \in \mathbb{R}.$$

(Itt φ_ξ a ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét jelöli.) Felhasználva, hogy η_n, $n \in \mathbb{N}$, független, azonos eloszlásúak, bármilyen $w \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi_{\xi_t^{(n)} - \xi_s^{(n)}}(w) = \mathbb{E}\left(e^{iw\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=[ns]+1}^{[nt]}\eta_j}\right) = \prod_{j=[ns]+1}^{[nt]} \varphi_{\eta_j}\left(\frac{w}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{\eta_1}\left(\frac{w}{\sqrt{n}}\right)\right)^{[nt]-[ns]}.$$

Ismert, hogy a centrális határeloszlás tétel szerint

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \eta_i = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i - \mathbb{E}(\sum_{i=1}^n \eta_i)}{\sqrt{n\mathbb{D}^2\eta_1}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1).$$

Ezért a folytonossági tétel alapján

$$\left(\varphi_{\eta_1}\left(\frac{w}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \to e^{-\frac{w^2}{2}}, \quad w \in \mathbb{R}.$$

Így

$$\varphi_{\xi_t^{(n)} - \xi_s^{(n)}}(w) = \left[\left(\varphi_{\eta_1}\left(\frac{w}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\right]^{\frac{[nt]-[ns]}{n}} \to e^{-\frac{(t-s)w^2}{2}}, \quad w \in \mathbb{R},$$

hiszen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[nt]-[ns]}{n} = t - s.$$

□

1.4.9. Megjegyzés. Az 1.4.8. Állításban definiált $\{\xi_t^{(n)} : t \in [0,1]\}$ folyamatot a következő módon konstruálhatjuk meg. Tekintsük a számegyenes egész koordinátájú pontjain a 0-ból kiinduló szimmetrikus véletlen bolyongást, azaz az 1.4.8. Állításbeli η_n, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változók legyenek szimmetrikus Bernoulli eloszlásúak. Figyeljük a bolyongó részecske mozgását az n időpontig és készítsük el a részecske mozgását leíró idő–út grafikont. Az időtengelyen $1/n$–szeres, az úttengelyen $1/\sqrt{n}$–szeres zsugorítást végrehajtva kaphatjuk az 1.4.8. Állításban definiált $\xi_1^{(n)}$ valószínűségi változót. Az eredeti idő–út grafikon esetében egységnyi idő alatt ± 1-et lépünk előlre, az áttranszformált idő–út grafikon esetében $1/n$ idő alatt $\pm 1/\sqrt{n}$-et lépünk előlre, így a két meredekség ± 1, illetve $\pm\sqrt{n}$. Az utóbbi $n \to \infty$ esetén $\pm\infty$-hez tart, ami előlre vetíti, hogy a Wiener-folyamat trajektóriái egy valószínűséggel seholsem differenciálhatók. □

Az alábbiakban megadjuk a Gauss-folyamatok fogalmát, utána pedig a Gauss-folyamatok és a Wiener-folyamat kapcsolatát vizsgáljuk.

1.4.10. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_t : t \in T\}$ folyamat **Gauss-folyamat**, ha a véges dimenziós eloszlásai normálisak.*

Egy $\{\xi_t : t \in T\}$ Gauss-folyamat várható érték függvénye az $m : T \to \mathbb{R}$, $m(t) = \mathbb{E}\xi_t$ függvény, kovariancia-függvénye pedig $K : T \times T \to \mathbb{R}$, $K(s,t) = \operatorname{cov}(\xi_s, \xi_t)$. Egy Gauss-folyamat várható érték függvényének és kovariancia-függvényének értékkészlete azért részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, mert egy normális eloszlású valószínűségi változó első, második (és az összes többi) momentuma véges. Nyilván egy $\{\xi_t : t \in T\}$ Gauss-folyamat véges dimenziós eloszlásait meghatározza a várható érték függvénye és a kovariancia-függvénye. Ugyanis egy többdimenziós normális eloszlást egyértelműen meghatározza a karakterisztikus függvénye, ezt pedig a szóbanforgó normális eloszlás várható érték vektora és a szórásmátrixa.

Az alábbiakban felidézünk egy, a többdimenziós normális eloszlás ekvivalens definíciójára lehetőséget adó állítást.

1.4.11. Állítás. *Egy $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ valószínűségi vektorváltozó k-dimenziós normális eloszlású akkor és csak akkor, ha tetszőleges $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ esetén $\sum_{i=1}^k \alpha_i \xi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ 1-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy ξ k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó. Ekkor létezik olyan A $(k \times k)$-s valós mátrix és $m \in \mathbb{R}^k$ valós vektor, hogy ξ eloszlása megegyezik $A\eta + m$ eloszlásával, ahol η k-dimenziós standard normális eloszlású.

Legyen $c \in \mathbb{R}^k$, ekkor azt kell bizonyítani, hogy $\sum_{i=1}^k c_i \xi_i = \langle c, \xi \rangle$ normális eloszlású. Felhasználva, hogy ξ karakterisztikus függvénye

$$\varphi_\xi(t) = \exp\left\{ i\langle m, t\rangle - \frac{1}{2}\langle AA^\top t, t\rangle \right\}, \quad t \in \mathbb{R}^k,$$

kapjuk, hogy $\langle c, \xi\rangle$ karakterisztikus függvénye az $u \in \mathbb{R}$ helyen

$$\begin{aligned}\varphi_{\langle c,\xi\rangle}(u) = \mathbb{E}e^{iu\langle c,\xi\rangle} = \varphi_\xi(uc) &= \exp\left\{i\langle m, uc\rangle - \frac{1}{2}\langle AA^\top uc, uc\rangle\right\}\\ &= \exp\left\{i\langle m, c\rangle u - \frac{1}{2}\langle AA^\top c, c\rangle u^2\right\}.\end{aligned}$$

Felhasználva a karakterisztikus függvények és az eloszlások közötti kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot kapjuk, hogy $\langle c, \xi\rangle$ 1-dimenziós normális eloszlású $\langle m, c\rangle$ várható értékkel és $\langle AA^\top c, c\rangle$ szórásnégyzettel.

Megfordítva tegyük fel, hogy $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ k-dimenziós valószínűségi vektorváltozó és tetszőleges $c \in \mathbb{R}^k$ esetén $\langle c, \xi\rangle$ normális eloszlású. Ekkor $\langle c, \xi\rangle$ karakterisztikus függvénye az $u \in \mathbb{R}$ helyen

$$\varphi_{\langle c,\xi\rangle}(u) = \mathbb{E}e^{iu\langle c,\xi\rangle} = \exp\left\{i\langle c, \mathbb{E}\xi\rangle u - \frac{1}{2}\langle \operatorname{cov}(\xi,\xi)c, c\rangle u^2\right\},$$

hiszen $\mathbb{E}\langle c, \xi\rangle = \langle c, \mathbb{E}\xi\rangle$ és

$$\begin{aligned}D^2\big(\langle c, \xi\rangle\big) &= \mathbb{E}(\langle c,\xi\rangle - \langle c, \mathbb{E}\xi\rangle)^2 = \mathbb{E}(c^\top(\xi - \mathbb{E}\xi))^2 = \mathbb{E}\Big(c^\top(\xi-\mathbb{E}\xi)(\xi-\mathbb{E}\xi)^\top c\Big)\\ &= c^\top\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)(\xi-\mathbb{E}\xi)^\top c = c^\top\operatorname{cov}(\xi,\xi)c = \langle\operatorname{cov}(\xi,\xi)c, c\rangle.\end{aligned}$$

Így

$$\varphi_{\langle c,\xi\rangle}(1) = \mathbb{E}e^{i\langle c,\xi\rangle} = \varphi_\xi(c) = \exp\left\{i\langle c, \mathbb{E}\xi\rangle - \frac{1}{2}\langle \operatorname{cov}(\xi,\xi)c, c\rangle\right\},$$

ami adja, hogy ξ k-dimenziós normális eloszlású. □

1.4.12. Következmény. *Ha* $\xi_1, \ldots, \xi_k$ *független normális eloszlásúak, akkor* $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ *k-dimenziós normális eloszlású.*

1.4.13. Állítás. *Legyen* $m : T \to \mathbb{R}$ *tetszőleges függvény, és legyen* $K : T \times T \to \mathbb{R}$ *szimmetrikus és pozitív szemidefinit függvény. Ekkor létezik* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mező és rajta* $\{\xi_t : t \in T\}$ *Gauss-folyamat, melynek várható érték függvénye és kovariancia-függvénye az adott* m, *illetve* K *függvény.*

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$ rögzített. Legyen $t_1, t_2, \ldots, t_k \in T$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ esetén $F_{t_1,t_2,\ldots,t_k}$ egy olyan k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változónak az eloszlásfüggvénye, melynek várható érték vektora $(m(t_1), \ldots, m(t_k))$, kovariancia-mátrixa pedig $\big(K(t_j, t_n)\big)_{j,n=1,\ldots,k}$. Belátjuk, hogy teljesül a Kolmogorov-féle kompatibilitási feltétel eloszlásfüggvényeknek ezen seregére. Azt kell megmutatni, hogy ha $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leqslant k$ egészek, akkor egy, a fenti többdimenziós normális eloszlású vektor $i_1, i_2, \ldots, i_\ell$ sorszámú koordinátáinak együttes eloszlása megegyezik egy $(m(t_{i_1}), \ldots, m(t_{i_\ell}))$ várható érték vektorú és $\big(K(t_{i_j}, t_{i_n})\big)_{j,n=1,\ldots,\ell}$ kovariancia-mátrixú normális eloszlással.

Ha $(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k})$ k-dimenziós normális eloszlású, akkor az 1.4.11. Állítás kapjuk, hogy tetszőleges $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_\ell \leqslant k$ egészek esetén $(\xi_{t_{i_1}}, \ldots, \xi_{t_{i_\ell}})$ ℓ-dimenziós normális eloszlású lesz. Ekkor $(\xi_{t_{i_1}}, \dots, \xi_{t_{i_\ell}})$ várható érték vektorát úgy kaphatjuk meg, hogy $(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k})$ várható érték vektorából a $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_\ell}$-től eltérő indexű koordinátákat töröljük. Hasonlóan $(\xi_{t_{i_1}}, \dots, \xi_{t_{i_\ell}})$ kovariancia-mátrixát úgy kapjuk, hogy $(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k})$ kovariancia-mátrixából a $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_\ell}$ indexűektől eltérő sorokat és oszlopokat töröljük. Így a kompatibilitási kritérium teljesül, ezért alkalmazható Kolmogorov-alaptétele. □

1.4.14. Állítás. *Egy $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ folyamat akkor és csak akkor standard Wiener-folyamat, ha*

(i) *Gauss-folyamat,*

(ii) *tetszőleges $s, t \geqslant 0$ időpontok esetén $\mathbb{E}\xi_t = 0$, $\operatorname{cov}(\xi_s, \xi_t) = \min\{s, t\}$,*

(iii) *P-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén a $t \in [0, +\infty) \mapsto \xi_t(\omega)$ trajektória folytonos.*

1.4.15. Megjegyzés. A (ii) feltételben az $s = t = 0$ választással élve kapjuk, hogy $\mathbb{E}\xi_0 = 0$ és $D^2\xi_0 = 0$, így $\mathbb{E}\xi_0^2 = 0$, amiből $P(\xi_0 = 0) = 1$. □

Bizonyítás. Ha $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat, akkor tetszőleges $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ esetén a $\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}$ növekmények függetlenek és normális eloszlásúak. Így az 1.4.12. Következmény miatt a $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}})$ vektor normális eloszlású. Felhasználva az (1.3.1) előállítást és azt az állítást, hogy ha η egy k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó és B egy $(\ell \times k)$-s valós mátrix, akkor $B\eta$ egy ℓ-dimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó, kapjuk, hogy a $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_k})$ vektor is normális eloszlású. Ezért a $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ folyamat Gauss-folyamat. Mivel $\xi_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, így $\mathbb{E}\xi_t = 0$. Ha $0 \leqslant s < t$, akkor $\xi_t - \xi_s$ és $\xi_s - \xi_0 = \xi_s$ függetlensége alapján

$$\operatorname{cov}(\xi_s, \xi_t) = \operatorname{cov}(\xi_s, (\xi_t - \xi_s) + \xi_s) = \operatorname{cov}(\xi_s, \xi_t - \xi_s) + \operatorname{cov}(\xi_s, \xi_s) = \mathbb{D}^2\xi_s = s.$$

A (iii) feltétel automatikusan teljesül.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ folyamatra teljesülnek az állításbeli feltételek. Ekkor tetszőleges $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ esetén (1.3.2) alapján

$$\begin{pmatrix} \xi_{t_1} \\ \xi_{t_2} - \xi_{t_1} \\ \vdots \\ \xi_{t_{k-1}} - \xi_{t_{k-2}} \\ \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{t_1} \\ \xi_{t_2} \\ \vdots \\ \xi_{t_{k-1}} \\ \xi_{t_k} \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan az előzőekhez kapjuk, hogy a $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}})$ vektor normális eloszlású. Megmutatjuk, hogy ezen vektor koordinátái korrelálatlanok. Ha $2 \leqslant i < j \leqslant k$, akkor $t_{i-1} < t_i \leqslant t_{j-1} < t_j$ alapján, felhasználva a (ii) feltételt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}, \xi_{t_j} - \xi_{t_{j-1}}) &= \operatorname{cov}(\xi_{t_i}, \xi_{t_j}) - \operatorname{cov}(\xi_{t_i}, \xi_{t_{j-1}}) - \operatorname{cov}(\xi_{t_{i-1}}, \xi_{t_j}) + \operatorname{cov}(\xi_{t_{i-1}}, \xi_{t_{j-1}}) \\ &= t_i - t_i - t_{i-1} + t_{i-1} = 0. \end{aligned}$$

Ha $i = 1$ és $2 \leqslant j \leqslant k$, akkor $t_1 \leqslant t_{j-1} < t_j$ és így $\operatorname{cov}(\xi_{t_1}, \xi_{t_j} - \xi_{t_{j-1}}) = \operatorname{cov}(\xi_{t_1}, \xi_{t_j}) - \operatorname{cov}(\xi_{t_1}, \xi_{t_{j-1}}) = t_1 - t_1 = 0$ (ha bevezetjük a $t_0 := 0$ jelölést, akkor nincs szükség erre az esetszétválasztásra). Felhasználva azt, hogy egy többdimenziós normális eloszlás koordinátáinak korrelálatlanságából következik azok függetlensége kapjuk, hogy a $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}})$ vektor koordinátái függetlenek, ezért a folyamat független növekményű. Mivel $0 \leqslant s < t$ esetén a $(\xi_s, \xi_t - \xi_s)$ vektor normális eloszlású, az 1.4.11. Állítás alapján $\xi_t - \xi_s$ normális eloszlású. A (ii) feltétel alapján $\mathbb{E}(\xi_t - \xi_s) = \mathbb{E}\xi_t - \mathbb{E}\xi_s = 0$, továbbá

$$\mathbb{D}^2(\xi_t - \xi_s) = \operatorname{cov}(\xi_t - \xi_s, \xi_t - \xi_s) = t - s - s + s = t - s,$$

tehát $\xi_t - \xi_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$. Az 1.4.15. Megjegyzés miatt $P(\xi_0 = 0) = 1$, ezért a folyamat független, stacionárius növekményű. □

Az, hogy a $K : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $K(s, t) := \min\{s, t\}$ függvény szimmetrikus és pozitív szemidefinit, közvetlenül is belátható, de következik a bizonyítás első részéből is, hiszen beláttuk azt, hogy létezik olyan Gauss-folyamat, melynek ez a kovariancia-függvénye.

Az alábbiakban a Wiener-folyamatra vonatkozó további eredményeket tárgyalunk.

1.4.16. Állítás. (Wiener-folyamatra vonatkozó nagy számok erős törvénye) *Legyen $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat. Ekkor*

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{t\to\infty} \frac{W_t(\omega)}{t} = 0\right\}\right) = 1.$$

(Megjegyezzük, hogy a $\lim_{t\to 0} W_t(\omega)/t$ határérték 1 valószínűséggel nem létezik, lásd az 1.4.51. Állítást.)

Bizonyítás. Felhasználva a (később tárgyalandó) 1.6.8. Állítást kapjuk, hogy $\{|W_t| : t \geqslant 0\}$ szubmartingál az $\mathcal{F}_t^W := \sigma(W_s, s \leqslant t)$, $t \geqslant 0$, ún. standard (természetes) filtrációra nézve. Legyenek σ és τ olyan valós számok, hogy $0 < \sigma < \tau$. A Doob-féle maximál egyenlőtlenség szerint (1.6.10. Tétel (iii)) alapján ($p = 2$-vel) kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{\sigma\leqslant t\leqslant\tau}\left(\frac{W_t}{t}\right)^2\right] &\leqslant \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}\left[\sup_{\sigma\leqslant t\leqslant\tau} W_t^2\right] = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}\left[\sup_{\sigma\leqslant t\leqslant\tau} |W_t|\right]^2 \\
&\leqslant \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{2}{2-1}\right)^2 \mathbb{E}|W_\tau|^2 = \frac{4}{\sigma^2}\mathbb{E}W_\tau^2 = \frac{4\tau}{\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Legyen $\sigma := 2^n$, $\tau := 2\sigma = 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, így a Markov-egyenlőtlenség alapján minden $\varepsilon > 0$ és $n \in \mathbb{N}$-re adódik, hogy

$$P\Big(\sup_{2^n\leqslant t\leqslant 2^{n+1}} \frac{|W_t|}{t} > \varepsilon\Big) \leqslant \frac{4\, 2^{n+1}}{2^{2n}\varepsilon^2} = \frac{8}{\varepsilon^2 2^n}.$$

Mivel $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} < \infty$, a Borel–Cantelli-lemma alapján létezik olyan $A \in \mathcal{A}$ esemény, hogy $P(A) = 1$ és minden $\omega \in A$ esetén létezik olyan $N(\omega) \in \mathbb{N}$, hogy ha $n \geqslant N(\omega)$, akkor

$$\sup_{2^n\leqslant t\leqslant 2^{n+1}} \frac{|W_t(\omega)|}{t} \leqslant \varepsilon.$$

Így minden $\omega \in A$ esetén $|W_t(\omega)|/t \leqslant \varepsilon$, ha $t \geqslant 2^{N(\omega)}$, azaz W_t/t tart a 0-hoz 1-valószínűséggel, amint $t \to \infty$. $\square$

1.4.17. Megjegyzés. Az a gyengébb állítás, hogy W_t/t tart a 0-hoz sztochasztikusan, amint $t \to \infty$ pusztán ,,elemi" eszközökkel is bizonyítható.

1. Indoklás. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor

$$P\Big(\Big|\frac{W_t}{t}\Big| \geqslant \varepsilon\Big) = P\big(|W_t| \geqslant |t|\varepsilon\big) = P\big(W_t^2 \geqslant t^2\varepsilon^2\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}W_t^2}{t^2\varepsilon^2} = \frac{t}{t^2\varepsilon^2} \to 0, \quad \text{ha } t \to \infty.$$

Így a sztochasztikus konvergencia definíciója alapján készen vagyunk.

2. Indoklás. A nagy számok erős törvénye alapján

$$P\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{W_n}{n} = 0\Big) = 1,$$

ugyanis

$$\frac{W_n}{n} = \frac{W_1 + (W_2 - W_1) + \cdots + (W_n - W_{n-1})}{n},$$

és $W_1, W_2 - W_1, \ldots, W_n - W_{n-1}$ független, azonos eloszlásúak és $\mathbb{E}(W_i - W_{i-1}) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Ebből az is következik, hogy

$$P\Big(\lim_{t\to\infty} \frac{W_{[t]}}{[t]} = 0\Big) = 1. \tag{1.4.3}$$

Megmutatjuk, hogy $W_t/t - W_{[t]}/[t]$ tart 0-hoz sztochasztikusan, ha $t \to \infty$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A Csebisev-egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$P\Big(\Big|\frac{W_t}{t} - \frac{W_{[t]}}{[t]}\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{D^2\big(W_t/t - W_{[t]}/[t]\big)}{\varepsilon^2}.$$

Itt

$$\begin{aligned} D^2\left(\frac{W_t}{t} - \frac{W_{[t]}}{[t]}\right) &= D^2\left(\frac{W_t}{t}\right) + D^2\left(\frac{W_{[t]}}{[t]}\right) - 2\mathrm{cov}\left(\frac{W_t}{t}, \frac{W_{[t]}}{[t]}\right) \\ &= \frac{1}{t^2}t + \frac{1}{[t]^2}[t] - 2\frac{1}{t[t]}[t] = \frac{t-[t]}{t[t]}, \end{aligned}$$

így minden $\varepsilon > 0$-ra

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\left|\frac{W_t}{t} - \frac{W_{[t]}}{[t]}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0,$$

azaz $W_t/t - W_{[t]}/[t]$ tart 0-hoz sztochasztikusan, ha $t \to \infty$. A Szluckij-tétel (miszerint, ha X_n tart X-hez eloszlásban, illetve Y_n tart $c \in \mathbb{R}$-hez eloszlásban, akkor $X_n + Y_n$ tart $(X + c)$-hez eloszlásban) és (1.4.3) alapján kapjuk, hogy W_t/t tart 0-hoz eloszlásban, ha $t \to \infty$. Mivel a határ valószínűségi változó kontans 0, így W_t/t tart 0-hoz sztochasztikusan is, ha $t \to \infty$. Pusztán az eddigiekből még nem következik, hogy W_t/t 1-valószínűséggel is tart 0-hoz. Ugyanis az nem igaz, hogy ha $\xi_n \to \xi$ P-m.m. és η_n tart 0-hoz sztochasztikusan, akkor $\xi_n + \eta_n \to \xi$ P-m.m. Ellenpéldáként legyen $\xi_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\xi = 0$ és η_n, $n \in \mathbb{N}$ olyan sorozat, hogy tart sztochasztikusan 0-hoz. Ekkor általában **nem teljesül**, hogy $\eta_n = 0 + \eta_n \to 0 = 0 + 0$ P-m.m. Ugyanis ez azt jelentené, hogy a sztochasztikus konvergenciából következne a P-m.m.-i konvergencia, ami nem igaz. □

1.4.18. Állítás. *Ha* $\{W_t : t \geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat, akkor tetszőleges* $\lambda > 0$ *esetén a*

$$\left\{\frac{W_{\lambda t}}{\sqrt{\lambda}} : t \geqslant 0\right\}$$

folyamat is standard Wiener-folyamat.

(Ezért azt mondják, hogy a standard Wiener-folyamat 2 exponensű erősen önhasonló folyamat. Azért 2 exponensű, mert a λ skálaparaméter 1/2-edik hatványával kell normálni. Az önhasonlóság kapcsolatban van azzal, hogy egy standard Wiener-folyamat trajektóriái 1-valószínűséggel nem differenciálhatóak a 0-ban.)

1.4.19. Állítás. *Ha* $\{W_t : t \geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat, akkor a* $\{-W_t : t \geqslant 0\}$ *folyamat is standard Wiener-folyamat.*

1.4.20. Állítás. *Ha* $\{W_t : t \geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat, akkor tetszőleges* $T > 0$ *esetén a*

$$\{W(T-t) - W(T) : t \in [0, T]\}$$

folyamat is standard Wiener-folyamat.

1.4.21. Állítás. *Ha* $\{W_t : t \geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat, akkor a*

$$\widetilde{W}_t := \begin{cases} tW(\frac{1}{t}) & \text{ha} \quad t > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad t = 0. \end{cases}$$

folyamat is standard Wiener-folyamat.

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy az 1.4.14. Állítás (i),(ii) és (iii) feltételei teljesülnek a $\{\widetilde{W}_t : t \geqslant 0\}$ folyamatra. Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ tetszőlegesek. Az (i) feltétel teljesüléséhez azt kell megmutatni, hogy $(\widetilde{W}_{t_1}, \widetilde{W}_{t_2}, \ldots, \widetilde{W}_{t_k})$ normális eloszlású. Elegendő azt az esetet tárgyalni, amikor $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, mert ha $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ többdimenziós normális eloszlású, akkor $(0, \xi_1, \ldots, \xi_k)$ is többdimenziós normális eloszlású (csak elfajuló). Mivel $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat, ezért $(W_{1/t_1}, \ldots, W_{1/t_k})$ többdimenziós normális eloszlású az 1.4.14. Állítás alapján. Legyen

$$B := \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_k \end{pmatrix},$$

így

$$\begin{pmatrix} t_1 W_{1/t_1} \\ \vdots \\ t_k W_{1/t_k} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} W_{1/t_1} \\ \vdots \\ W_{1/t_k} \end{pmatrix},$$

ami adja, hogy $(t_1 W_{1/t_1}, t_2 W_{1/t_2}, \dots, t_k W_{1/t_k})$ is k-dimenziós normális eloszlású. (Ez utóbbi dolog az 1.4.11. Állítás alapján azonnal következik, így elkerülhető a B mátrix felírása.) Tetszőleges $t \geqslant 0$-ra $\mathbb{E}\widetilde{W}_t = 0$, ugyanis ha $t > 0$, akkor $\mathbb{E}\widetilde{W}_t = \mathbb{E}(tW_{1/t}) = 0$; ha pedig $t = 0$, akkor $\mathbb{E}\widetilde{W}_0 = \mathbb{E}0 = 0$.

Továbbá tetszőleges $0 < s < t$ esetén

$$\operatorname{cov}(\widetilde{W}_s, \widetilde{W}_t) = \operatorname{cov}(sW_{1/s}, tW_{1/t}) = ts \min\left\{\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right\} = s = s \wedge t,$$

és tetszőleges $t > 0$-ra

$$\operatorname{cov}(\widetilde{W}_0, \widetilde{W}_t) = \operatorname{cov}(0, tW_{1/t}) = 0 = 0 \wedge t.$$

A (iii) feltétel a standard Wiener-folyamat trajektóriáinak folytonossága és az 1.4.16. Állítás alapján következik. □

1.4.22. Állítás. *Ha* $\{W_t : t \geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat, akkor tetszőleges* $T \geqslant 0$ *esetén a*

$$\{W(T+t) - W(T) : t \geqslant 0\}$$

folyamat is standard Wiener-folyamat.

Bizonyítás. Legyen $\widetilde{W}_t := W(T+t) - W(T)$ minden $t \geqslant 0$-ra. Azt mutatjuk meg, hogy az 1.4.1. Definíció (i),(ii) és (iii) feltételei teljesülnek a $\{\widetilde{W}_t : t \geqslant 0\}$ folyamatra. Mivel $\widetilde{W}_0 = W(T+0) - W(T) = 0$, a független növekményűséghez azt kell leellenőrizni, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n < +\infty$ esetén a

$$\widetilde{W}_{t_1}, \widetilde{W}_{t_2} - \widetilde{W}_{t_1}, \dots, \widetilde{W}_{t_n} - \widetilde{W}_{t_{n-1}} \tag{1.4.4}$$

növekmények függetlenek. A $t_0 := 0$ jelöléssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{t_i} - \widetilde{W}_{t_{i-1}} &= W(T+t_i) - W(T) - W(T+t_{i-1}) + W(T) \\ &= W(T+t_i) - W(T+t_{i-1}), \qquad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Mivel $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat, ezért a

$$W_{T+t_1} - W_T, W_{T+t_2} - W_{T+t_1}, \dots, W_{T+t_n} - W_{T+t_{n-1}}$$

növekmények függetlenek. Így kapjuk, hogy az (1.4.4)-beli növekmények függetlenek.

Mivel tetszőleges $0 \leqslant s < t$ esetén $\widetilde{W}(T+t) - \widetilde{W}(T+s)$ eloszlása $W(T+t) - W(T+s)$ eloszlásával egyezik meg, ami csak $T+t-T-s = t-s$-től függ, kapjuk, hogy a $\{\widetilde{W}_t : t \geqslant 0\}$

folyamat független, stacionárius növekményű. A (iii) feltétel a standard Wiener-folyamat trajektóriáinak folytonossága miatt automatikusan teljesül. □

Legyen a továbbiakban $\{W_t : t \geqslant 0\}$ egy standard Wiener-folyamat az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **teljes** valószínűségi mezőn. A későbbiekben (lásd például az 1.4.23. Megjegyzést) fontos lesz a következő konstrukció. Jelölje $\mathcal{N}$ az ún. nullhalmazok halmazát

$$\mathcal{N} := \Big\{N \subseteq \Omega \,|\, \exists\ G \in \mathcal{F}_\infty^W : N \subseteq G,\ \ P(G) = 0\Big\},$$

ahol

$$\mathcal{F}_\infty^W := \sigma(W_s : 0 \leqslant s < \infty).$$

Képezzük a következő filtrációt (augmented filtration)

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N}), \quad t \geqslant 0, \qquad\qquad \mathcal{F}_\infty := \sigma\Big(\bigcup_{t\geqslant 0} \mathcal{F}_t\Big),$$

ahol

$$\mathcal{F}_t^W := \sigma(W_s : 0 \leqslant s \leqslant t), \quad t \geqslant 0.$$

Az $\{\mathcal{F}_t^W, t \geqslant 0\}$ filtrációt a $\{W_t : t \geqslant 0\}$-hoz tartozó **standard filtrációnak** nevezünk. Mivel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ teljes valószínűségi mező, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ és így minden $t \geqslant 0$ esetén $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$. Tehát $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ tényleg filtráció $(\Omega, \mathcal{A})$-n (a filtráció definíciójában benne van, hogy $\mathcal{F}_t$ rész-σ-algebrája $\mathcal{A}$-nak minden $t \geqslant 0$-ra). Továbbá, $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat az $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ filtrációra nézve is, mely filtráció jobbról folytonos, azaz $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$, $t \geqslant 0$, lásd Karatzas és Shreve [3, 285. oldal]. A $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamatot (gyakran) az $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$ filtrált valószínűségi mezőn tekintjük.

Vezessük be az

$$M_t = \max\{W_s : 0 \leqslant s \leqslant t\}, \quad t \geqslant 0,$$
$$M_t^- = \min\{W_s : 0 \leqslant s \leqslant t\}, \quad t \geqslant 0$$

folyamatokat. Ezek 1-valószínűséggel jól definiáltak, mert a standard Wiener-folyamat trajektóriái 1-valószínűséggel folytonosak és egy folytonos függvény kompakt halmazon felveszi maximumát és minimumát.

1.4.23. Megjegyzés. Megmutatjuk, hogy minden $t \geqslant 0$-ra M_t $\mathcal{F}_t$-mérhető valószínűségi változó. Ehhez elég azt belátni, hogy $\{M_t > a\} \in \mathcal{F}_t$ minden $a \in \mathbb{R}$ esetén. Ugyanis definíció szerint azt kell megmutatni, hogy $\mathbb{R}$ Borel-halmazainak M_t általi inverzképei benne vannak az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrában. Azt tudjuk, hogy a $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$ halmazrendszer által generált σ-algebra egybeesik $\mathbb{R}$ Borel-halmazainak σ-algebrájával. Végiggondoljuk, hogy az $\{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ halmazrendszer által generált σ-algebra is egybeesik $\mathbb{R}$ Borel-halmazainak σ-algebrájával. Mivel minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$(b, +\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [b + \frac{1}{n}, +\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathbb{R} \setminus (-\infty, b + \frac{1}{n})\right)$$

és

$$(-\infty, a) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, a - \frac{1}{n}] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathbb{R} \setminus (a - \frac{1}{n}, +\infty)\right),$$

kapjuk, hogy a $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$ és $\{(b, +\infty) : b \in \mathbb{R}\}$ halmazrendszerek által generált σ-algebrák egybeesnek, így mindkettő megegyezik $\mathbb{R}$ Borel-halmazainak σ-algebrájával, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-rel. Továbbá mértékelméletből tudjuk, hogy ha $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{H})$, ahol $\mathcal{H}$ $\mathbb{R}$ részhalmazaiból álló halmazrendszer, akkor az M_t valószínűségi változó akkor és csak akkor $\mathcal{F}_t$-mérhető, ha $M_t^{-1}(H) \in \mathcal{F}_t$ minden $H \in \mathcal{H}$ esetén. Ezért elegendő az $\{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ halmazrendszer M_t általi inverzképét vizsgálni. Mivel egy standard Wiener-folyamat trajektóriái 1-valószínűséggel folytonosak kapjuk, hogy

$$A \cap \{M_t > a\} = A \cap \bigcup_{\{s\in\mathbb{Q},\, 0\leqslant s\leqslant t\}} \{W_s > a\}, \tag{1.4.5}$$

ahol A azon $\omega \in \Omega$-k halmaza, melyekre a $t \in [0, +\infty) \mapsto W_t(\omega)$ trajektória folytonos, és $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát jelöli. Ekkor $P(A) = 1$. Mivel $\mathbb{Q}$ megszámlálható, az (1.4.5)-beli unió megszámlálható. Felhasználva, hogy minden $0 \leqslant s \leqslant t$-re az $A \cap \{W_s > a\}$ események benne vannak az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrában kapjuk, hogy $A \cap \{M_t > a\} \in \mathcal{F}_t$, hiszen egy σ-algebra zárt a megszámlálható unióképzésre. (Az, hogy $A \cap \{W_s > a\}$, $0 \leqslant s \leqslant t$ benne van az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrában abból következik, hogy $P(\Omega \setminus A) = 0$ miatt $\Omega \setminus A \in \mathcal{N}$, és így $A \in \mathcal{F}_t$, valamint $\{W_s > a\} \in \mathcal{F}_t^W$, ha $0 \leqslant s \leqslant t$.) Így

$$\{M_t > a\} = \big(A \cap \{M_t > a\}\big) \cup \big((\Omega \setminus A) \cap \{M_t > a\}\big),$$

és mivel $(\Omega \setminus A) \cap \{M_t > a\} \subseteq \Omega \setminus A$, $P(\Omega \setminus A) = 0$, felhasználva $\mathcal{F}_t$ konstrukcióját kapjuk, hogy $(\Omega \setminus A) \cap \{M_t > a\} \in \mathcal{F}_t$. Ezért $\{M_t > a\} \in \mathcal{F}_t$ minden $a \in \mathbb{R}$ esetén.

Látható az is, hogy ha a fentiekben $A = \Omega$ is teljesül (azaz a "rossz" ω-kat eltávolítjuk a valószínűségi mezőből, akkor az jön ki, hogy M_t $\mathcal{F}_t^W$-mérhető minden $t \geqslant 0$ esetén). □

Az 1.4.19. Állítás alapján $\{-W_t : t \geqslant 0\}$ is standard Wiener-folyamat, így M_t és $-M_t^-$ eloszlása ugyanaz minden $t \geqslant 0$-ra. Ugyanis a $W_s(\omega)$, $s \in [0, t]$ trajektóriát kicserélve a tükrözöttjére, $-W_s(\omega)$, $s \in [0, t]$-re a max-ból $(-1)\min$, a min-ból pedig $(-1)\max$ lesz.

Az 1.4.18. Állítás maga után von egy, az $\{M_t : t \geqslant 0\}$ ún. maximum folyamatra vonatkozó önhasonlósági tulajdonságot. Legyen $a > 0$ rögzített és legyen $W_t^* := aW(\frac{t}{a^2})$, $t \geqslant 0$. Ekkor

$$M_t^* := \max_{0\leqslant s\leqslant t} W_s^* = \max_{0\leqslant s\leqslant t} aW\left(\frac{s}{a^2}\right) = aM\left(\frac{t}{a^2}\right).$$

Az 1.4.18. Állítás alapján $\{W_t^* : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat, így M_t^*-nak megegyezik az eloszlása M_t eloszlásával. Ezért M_t-nek és aM_{t/a^2}-nek ugyanaz az eloszlása.

Az 1.4.22. Állítás szerint tetszőleges $T > 0$-ra a $W_t^* := W(T + t) - W(T)$, $t \geqslant 0$ folyamat standard Wiener-folyamat. Azonban ennél több is igaz.

1.4.24. Állítás. (**Markov-tulajdonság**) *Legyen* $\{W_t : t \geqslant 0\}$ *egy standard Wiener-folyamat,* $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geqslant 0}$ *a hozzátartozó standard filtráció. Tetszőleges* $T > 0$ *esetén vezessük be a* $\{W_t^* := W(T+t) - W(T), t \geqslant 0\}$ *folyamatot (ez az 1.4.22. Állítás alapján standard Wiener-folyamat), jelölje továbbá* $(\mathcal{F}_t^{W^*})_{t\geqslant 0}$ *a hozzátartozó standard filtrációt. Ekkor minden* $t \geqslant 0$*-ra az* $\mathcal{F}_T^W$ *és* $\mathcal{F}_t^{W^*}$ σ*-algebrák függetlenek. (Az is igaz, hogy* $\mathcal{F}_t^W$ *és* $\mathcal{F}_t^{W^*}$ *függetlenek tetszőleges* $t \in [0, T]$ *esetén.)*

Bizonyítás. A $t = 0$-ra vonatkozó állítás triviális. Legyenek $T > 0$ és $t > 0$ tetszőlegesek. Legyenek továbbá $n, m \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant s_1 < s_2 < \cdots < s_n \leqslant T$ és $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leqslant t$ tetszőlegesek. Vezessük be tetszőleges $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\begin{aligned} A &:= \bigcap_{j=1}^{n} \{W(s_j) - W(s_{j-1}) \leqslant x_j\}, \\ B &:= \bigcap_{j=1}^{m} \{W(t_j + T) - W(t_{j-1} + T) \leqslant y_j\} \end{aligned}$$

eseményeket ($s_0 = t_0 := 0$). Ekkor $A \in \mathcal{F}_T^W$ és $B \in \mathcal{F}_t^{W^*}$. Mivel a $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat független növekményű, A és B független események. Az A-típusú események az $\mathcal{F}_T^W$, a B-típusú események az $\mathcal{F}_t^{W^*}$ σ-algebrát generálják. Ugyanis megmutatjuk, hogy általában igaz az, hogy ha $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ egy sztochasztikus folyamat, akkor minden $s > 0$-ra

$$\mathcal{A} := \sigma(\xi_u, 0 \leqslant u \leqslant s) = \sigma\left(\bigcup_{0\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant s, k\in\mathbb{N}} \sigma(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}) \right) := \mathcal{K}, \tag{1.4.6}$$

és

$$\mathcal{K} = \sigma\left(\bigcup_{0\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant s, k\in\mathbb{N}} \sigma(\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}) \right). \tag{1.4.7}$$

Mivel minden $s > 0$-ra

$$\begin{aligned} \sigma(\xi_u, 0 \leqslant u \leqslant s) &= \sigma(\xi_u^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), 0 \leqslant u \leqslant s), \\ \sigma(\xi_u) &= \{\xi_u^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \end{aligned}$$

és minden $0 \leqslant u \leqslant s$-re ($k = 1$ és $t_1 = u$ választással)

$$\sigma(\xi_u) \subseteq \bigcup_{0\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant s, k\in\mathbb{N}} \sigma(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}) \subseteq \mathcal{K},$$

kapjuk, hogy

$$\bigcup_{0\leqslant u\leqslant s} \left\{\xi_u^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\} \subseteq \mathcal{K}.$$

A generált σ-algebra definíciója alapján kapjuk, hogy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}$. Mivel minden $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_k \leqslant s$ esetén

$$\sigma(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}) \subseteq \sigma(\xi_u, 0 \leqslant u \leqslant s),$$

kapjuk, hogy

$$\bigcup_{0\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant s, k\in\mathbb{N}} \sigma(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}) \subseteq \mathcal{A}.$$

A generált σ-algebra definíciója alapján kapjuk, hogy $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$. Így adódik (1.4.6).

Az (1.4.7) egyenlőség bizonyításához vezessük be tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén a $\zeta := (\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k})$ és az $\eta := (\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}})$ jelöléseket. Ekkor léteznek olyan $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ Borel-mérhető függvények, hogy $\eta = g(\zeta)$ és $\zeta = h(\eta)$. (A g és h függvények választhatók lineáris transzformációknak, s mivel a lineáris transzformációk folytonosak, így Borel-mérhetőek is.) Ezért

$$\begin{aligned}
\sigma(\zeta) &= \{\zeta^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\} = \Big\{\{\omega \in \Omega : \zeta(\omega) \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\Big\} \\
&= \Big\{\{\omega \in \Omega : h(\eta(\omega)) \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\Big\} = \Big\{\{\omega \in \Omega : \eta(\omega) \in h^{-1}(B)\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\Big\} \\
&= \Big\{\{\omega \in \Omega : \omega \in \eta^{-1}(h^{-1}(B))\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\Big\} = \{\eta^{-1}(h^{-1}(B)), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\} \subseteq \sigma(\eta),
\end{aligned}$$

hiszen h Borel-mérhetősége miatt $h^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ és mivel η valószínűségi vektorváltozó, így $\eta^{-1}(h^{-1}(B))$ benne van az η által generált σ-algebrában. Így $\sigma(\zeta) \subseteq \sigma(\eta)$ és hasonlóan látható be, hogy $\sigma(\eta) \subseteq \sigma(\zeta)$. Így kapjuk (1.4.7)-et.

Összefoglalva, az A-típusú események összessége az

$$\bigcup_{0\leqslant s_1<\cdots<s_n\leqslant T,\, n\in\mathbb{N}} \sigma(W_{s_1}, W_{s_2} - W_{s_1}, \ldots, W_{s_n} - W_{s_{n-1}}) \quad \text{halmazalgebra,}$$

mely az $\mathcal{F}_T^W$ σ-algebrát generálja, illetve a B-típusú események összessége az

$$\bigcup_{0\leqslant t_1<\cdots<t_m\leqslant t,\, m\in\mathbb{N}} \sigma(W^*_{t_1}, W^*_{t_2} - W^*_{t_1}, \ldots, W^*_{t_m} - W^*_{t_{m-1}}) \quad \text{halmazalgebra,}$$

mely az $\mathcal{F}_t^{W^*}$ σ-algebrát generálja. (Az, hogy tényleg halmazalgebrákat kapunk könnyen ellenőrizhető, az pedig, hogy a szóbanforgó halmazalgebrák a fenti alakúak annak a következménye, hogy tetszőleges $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ valószínűségi változó esetén $\sigma(\xi) = \big\{\xi^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\big\}$.) Felhasználva, hogy a szóbanforgó halmazalgebrák függetlenek, a Carathéodory-tételt használva belátható, hogy az általuk generált σ-algebrák $\mathcal{F}_T^W$ és $\mathcal{F}_t^{W^*}$ is függetlenek.

Megjegyezzük, abból, hogy $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ független eseményrendszerek általában még nem következik, hogy az általuk generált σ-algebrák $\sigma(\mathcal{G}_1)$ és $\sigma(\mathcal{G}_2)$ is függetlenek. Tekintsük ugyanis a következő példát. Legyen $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{A} := 2^\Omega$, $P(\{i\}) := \frac{1}{4}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Legyen továbbá $\mathcal{G}_1 := \big\{\{1, 2\}\big\}$ és $\mathcal{G}_2 := \big\{\{2, 3\}, \{2, 4\}\big\}$. Ekkor $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ függetlenek, ugyanis

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= P(\{2\}) = P(\{1,2\} \cap \{2,3\}) = P(\{1,2\})P(\{2,3\}) = \frac{2}{4}\frac{2}{4} = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4} &= P(\{2\}) = P(\{1,2\} \cap \{2,4\}) = P(\{1,2\})P(\{2,4\}) = \frac{2}{4}\frac{2}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Azonban $\{2,3\} \cap \{2,4\} = \{2\} \in \sigma(\mathcal{G}_2)$ nem független $\{1,2\} \in \sigma(\mathcal{G}_1)$-től. □

1.4.25. Következmény. *Minden* $T > 0$, $t \geqslant 0$*-ra az* M_T *és* $M_t^* := \max_{0 \leqslant s \leqslant t} W_s^*$ *valószínűségi változók függetlenek.*

Bizonyítás. Legyen

$$\begin{aligned} A_1 &:= \big\{\omega \in \Omega \,|\, s \in [0,T] \mapsto W_s(\omega) \quad \text{folytonos}\big\}, \\ A_2 &:= \big\{\omega \in \Omega \,|\, s \in [0,T] \mapsto W_s^*(\omega) \quad \text{folytonos}\big\}. \end{aligned}$$

Mivel $(W_t)_{t \geqslant 0}$, $(W_t^*)_{t \geqslant 0}$ standard Wiener-folyamatok, $P(A_1) = P(A_2) = 1$. Így kapjuk, hogy tetszőleges $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ esetén

$$\begin{aligned} A_1 \cap \{M_T \leqslant x\} &= A_1 \cap \{\sup_{s \in [0,T]} W_s \leqslant x\} = \bigcap_{s \in [0,T]} A_1 \cap \{W_s \leqslant x\} \\ &= \bigcap_{s \in [0,T], s \in \mathbb{Q}} A_1 \cap \{W_s \leqslant x\} \subseteq \bigcap_{s \in [0,T], s \in \mathbb{Q}} \{W_s \leqslant x\} \in \mathcal{F}_T^W, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} A_2 \cap \{M_t^* \leqslant y\} &= A_2 \cap \{\sup_{s \in [0,t]} W_s^* \leqslant y\} = \bigcap_{s \in [0,t]} A_2 \cap \{W_s^* \leqslant y\} \\ &= \bigcap_{s \in [0,t], s \in \mathbb{Q}} A_2 \cap \{W_s^* \leqslant y\} \subseteq \bigcap_{s \in [0,t], s \in \mathbb{Q}} \{W_s^* \leqslant y\} \in \mathcal{F}_t^{W^*}. \end{aligned}$$

Az 1.4.24. Állítás alapján kapjuk, hogy $A_1 \cap \{M_T \leqslant x\}$ és $A_2 \cap \{M_t^* \leqslant y\}$ függetlenek, így $\{M_T \leqslant x\}$ és $\{M_t^* \leqslant y\}$ is függetlenek. Ugyanis $P(A_1 \cap A_2) = 1$ miatt

$$\begin{aligned} P\big(\{M_T \leqslant x\} \cap \{M_t^* \leqslant y\}\big) &= P\big(\{M_T \leqslant x\} \cap A_1 \cap \{M_t^* \leqslant y\} \cap A_2\big) \\ &= P(A_1 \cap \{M_T \leqslant x\})P(A_2 \cap \{M_t^* \leqslant y\}) = P(\{M_T \leqslant x\})P(\{M_t^* \leqslant y\}). \end{aligned}$$

□

1.4.26. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ *(kiterjesztett valós értékű) valószínűségi változó* ***megállítási időpillanat*** *a* $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ *folyamatra nézve, ha*

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \in \sigma(\xi_u,\, 0 \leqslant u \leqslant t)$$

teljesül tetszőleges $t \geqslant 0$ *esetén.*

A következőkben a $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamatot olyan $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezzük, hogy minden $\omega \in \Omega$-ra a $t \in [0, +\infty) \mapsto W_t(\omega)$ trajektória folytonos. Azaz az alapul vett valószínűségi mezőből a ,,rossz" ω-kat eltávolítjuk. Ekkor az 1.4.23. Megjegyzésben azt lehet bizonyítani, hogy minden $t \geqslant 0$-ra M_t $\mathcal{F}_t^W$-mérhető valószínűségi változó.

1.4.27. Definíció. *Legyen $\{W_t : t \geqslant 0\}$ egy standard Wiener-folyamat. Legyen $a > 0$ rögzített. Ekkor a $\tau_a : \Omega \to [0, +\infty]$,*

$$\tau_a := \begin{cases} \inf\{t \geqslant 0 : W_t = a\} & \textit{ha} \quad \exists\, t \geqslant 0 : \; W_t = a, \\ +\infty & \textit{egyébként}, \end{cases}$$

valószínűségi változót az a-szint első elérési idejének hívjuk.

1.4.28. Megjegyzés. A τ_a megállítási időpillanat lesz $\{W_t : t \geqslant 0\}$-ra nézve. Ugyanis, a standard Wiener-folyamat trajektóriáinak folytonossága miatt $\{\tau_a \leqslant t\} = \{M_t \geqslant a\}$ tetszőleges $t \geqslant 0$ és $a > 0$ esetén. Az 1.4.23. Megjegyzés szerint $\{M_t \geqslant a\} \in \mathcal{F}_t^W$, így rendben vagyunk. Felhívjuk a figyelmet, hogy τ_a nyilván függ az alapul vett $(W_t)_{t \geqslant 0}$ standard Wiener-folyamattól, de ezt a függést nem jelöljük τ_a-ban. □

1.4.29. Definíció. *Legyen $\{W_t : t \geqslant 0\}$ egy standard Wiener-folyamat és jelölje $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geqslant 0}$ a hozzátartozó standard filtrációt. Legyen továbbá $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ megállítási időpillanat $\{W_t : t \geqslant 0\}$-ra nézve. Ekkor a τ megállítási időpillanathoz tartozó σ-algebra alatt azt az $\mathcal{F}_\tau$ σ-algebrát értjük, mely azon A események összessége, melyekre*

$$A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t^W, \quad \forall\, t \geqslant 0 \quad \textit{esetén.}$$

Azaz

$$\mathcal{F}_\tau := \Big\{ A \in \mathcal{A} : A \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \in \sigma(W_u, 0 \leqslant u \leqslant t), \; \forall\, t \geqslant 0 \Big\}.$$

Leellenőrizhető, hogy $\mathcal{F}_\tau$ tényleg σ-algebra.

A Wiener-folyamatokkal kapcsolatos vizsgálatokban fontos szerepet játszik a Markov-tulajdonság általánosítása, az ún. **erős Markov-tulajdonság.** Miszerint a Markov-tulajdonság érvényes akkor is, ha a T időpontot kicseréljük bizonyos véletlen időpontra, mely nem függ a folyamat jövőjétől.

1.4.30. Állítás. (Erős Markov-tulajdonság) *Legyen $\{W_t : t \geqslant 0\}$ egy standard Wiener-folyamat, jelölje $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geqslant 0}$ a hozzátartozó standard filtrációt. Legyen továbbá $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ megállítási időpillanat $\{W_t : t \geqslant 0\}$-ra nézve. Vezessük be a*

$$W_t^*(\omega) = W_{\tau(\omega)+t}(\omega) - W_{\tau(\omega)}(\omega), \quad t \geqslant 0$$

folyamatot és jelölje $(\mathcal{F}_t^{W^*})_{t \geqslant 0}$ a hozzátartozó standard filtrációt.
Ekkor

(i) $\{W_t^* : t \geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat,*

(ii) *minden* $t \geqslant 0$*-ra az* $\mathcal{F}_t^{W^*}$ σ*-algebra független az* $\mathcal{F}_\tau$ σ*-algebrától.*

1.4.31. Megjegyzés. Az 1.4.30. Állításban fontos kitétel, hogy τ megállítási időpillanat legyen $\{W_t : t \geqslant 0\}$-ra nézve. Tekintsük ugyanis a következő példát. Legyen

$$T := \inf\{t \geqslant 0 : W_t = M_1\},$$

azaz T az első elérési ideje egy standard Wiener-folyamat $[0,1]$-en vett maximumának. A standard Wiener-folyamat trajektóriáinak folytonossága miatt T jól definiált és $\{t \leqslant 1 : W_t = M_1\}$ egy nemüres, zárt halmaz, továbbá $P(T \leqslant 1) = 1$. Vezessük be a $W_t^* := W_{T+t} - W_T$, $t \geqslant 0$ folyamatot. Mivel $W_T = M_1$, M_1 értelmezése alapján kapjuk, hogy ha $0 \leqslant t \leqslant 1 - T$, akkor $W_{T+t} \leqslant M_1$, tehát $W_t^* \leqslant 0$, ha $0 \leqslant t \leqslant 1 - T$. Másszóval a $\{W_t^* : t \geqslant 0\}$ folyamat a $[0, 1-T]$ időintervallumban nem tud pozitív értéket felvenni.

Megmutatjuk, hogy $P(T < 1) = 1$. Mivel $P(T \leqslant 1) = 1$, elég azt belátnunk, hogy $P(T = 1) = 0$. Ekkor

$$P(T = 1) = P(W_s < W_1, \ \forall\, s \in [0,1)) = P(W_{1-t} - W_1 < 0, \ \forall\, t \in (0,1]).$$

Felhasználva, hogy az 1.4.20. Állítás alapján $\widetilde{W}_t := W_{1-t} - W_1$, $t \in [0,1]$, standard Wiener-folyamat, kapjuk, hogy

$$P(T = 1) = P(\widetilde{W}_t < 0, \ \forall\, t \in (0,1]) = P(W_t < 0, \ \forall\, t \in (0,1]).$$

Továbbá az 1.4.21. Állítás alapján fennáll, hogy

$$\begin{aligned} P(W_t < 0, \ \forall\, t \in (0,1]) &= P(tW_{1/t} < 0, \ \forall\, t \in (0,1]) = P(W_{1/t} < 0, \ \forall\, t \in (0,1]) \\ &= P(W_t < 0, \ \forall\, t \in [1,+\infty)) \leqslant P(\limsup_{n\to\infty} W_n \leqslant 0). \end{aligned}$$

Ekkor a $\{\limsup_{n\to\infty} W_n \leqslant 0\}$ esemény benne van a $\sigma(W_n - W_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, független σ-algebrákhoz tartozó farok σ-algebrában. Így a Kolmogorov 0-1 törvény alapján

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} W_n \leqslant 0\Big) \in \{0,1\}. \tag{1.4.8}$$

Az iterált-logaritmus tétel felhasználásával megmutatjuk, hogy $P(\limsup_{n\to\infty} W_n = +\infty) = 1$. Mivel W_n előállítható $W_n = \sum_{k=1}^n (W_k - W_{k-1})$ alakban, azaz n darab független standard normális eloszlású valószínűségi változó összegeként, az iterált-logaritmus tétel alapján

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{W_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1\Big) = 1.$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n\log\log n} = +\infty$, kapjuk, hogy $P(\limsup_{n\to\infty} W_n = +\infty) = 1$. Ezért $P(\limsup_{n\to\infty} W_n \leqslant 0)$ nem lehet 1-el egyenlő. Ebből (1.4.8) felhasználásával adódik, hogy $P(\limsup_{n\to\infty} W_n \leqslant 0) = 0$. Így korábbi becsléseink alapján $P(T = 1) = 0$.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy T megállítási időpillanat $\{W_t : t \geqslant 0\}$-ra nézve. Ekkor az erős Markov-tulajdonság alapján $\{W_t^* : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat. Így az előzőek alapján azt kapjuk, hogy a $\{W_t^* : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat 1-valószínűséggel nem vesz fel ,,azonnal" pozitív értéket. Az 1.4.19. Állítás alapján $\{-W_t^* : t \geqslant 0\}$ is standard Wiener-folyamat, így a $\{W_t^* : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat 1-valószínűséggel nem vesz fel ,,azonnal" negatív értéket sem. Ezért

$$P\left(W_t^* = 0, \quad \forall\, t \in [0, 1-T]\right) = 1,$$

ahol $P(T < 1) = 1$. Ez azonban lehetetlen, mert

$$P\left(W_s^* \neq 0, \quad \forall\, s \in \mathbb{Q}^+\right) = 1,$$

ahol $\mathbb{Q}^+ := \{s \in \mathbb{Q} : s \geqslant 0\}$. Ugyanis minden $u \geqslant 0$, $u \in \mathbb{R}$ esetén $W_u^* \sim \mathcal{N}(0, u)$, ezért $\forall\, x \in \mathbb{R}$-re $P(W_u^* = x) = 0$, így $P(W_u^* \neq x) = 1$. Felhasználva azt, hogy $\mathbb{Q}^+$ megszámlálható és megszámlálható sok 1-valószínűségű esemény metszete is 1-valószínűségű esemény kapjuk a dolgot. Így ellentmondásra jutottunk, azaz T nem megállítási időpont, ezért nem alkalmazható rá az erős Markov-tulajdonság. $\square$

1.4.32. Állítás. *Legyen* $\{W_t : t \geqslant 0\}$ *egy standard Wiener-folyamat. Ekkor a korábban bevezetett jelölésekkel minden* $t > 0$*-ra*

$$P(M_t \geqslant a) = P(\tau_a \leqslant t) = 2P(W_t > a) = 2 - 2\Phi(a/\sqrt{t}). \tag{1.4.9}$$

Megjegyezzük, hogy mivel (1.4.9) jobboldala folytonos $(0, \infty)$-en, kapjuk, hogy $\mathbb{P}(\tau_a < t) = 2 - 2\Phi(a/\sqrt{t})$, $t > 0$. Továbbá, mivel $\mathbb{P}(\tau_a \leqslant 0) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ és $\lim_{t \downarrow 0}(2 - 2\Phi(a/\sqrt{t})) = 2 - 2 = 0$, kapjuk, hogy (1.4.9) formálisan $t = 0$ esetén is igaz.

Bizonyítás. A bizonyítás kulcsa D. André francia matematikus **tükrözési elvként** ismertté vált észrevétele, melyet szavakban úgy fogalmazhatunk meg, hogy ha $t > \tau_a$, akkor W_t ugyanolyan valószínűséggel van az a szint felett, mint az a szint alatt. A pontos matematikai indoklás a következő. Legyenek $0 \leqslant s < t$ tetszőlegesen rögzítettek. Ekkor τ_a megállítási időpont lesz $\{W_t : t \geqslant 0\}$-ra nézve az 1.4.28. Megjegyzés szerint. Az erős Markov-tulajdonság alapján kapjuk, hogy $\{W_u^* := W_{\tau_a + u} - W_{\tau_a} : u \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat és tetszőleges $u \geqslant 0$ esetén az $\mathcal{F}_u^{W^*}$ és $\mathcal{F}_{\tau_a}$ σ-algebrák függetlenek. (Speciálisan $\mathcal{F}_u^{W^*}$ és τ_a is függetlenek lesznek, gondoljunk $\mathcal{F}_{\tau_a}$ definíciójára.) Megmutatjuk, hogy minden $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$P\left(W_t - W_{\tau_a} < y \,|\, \tau_a = s\right) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(t-s)}\right\} \mathsf{d}x,$$

azaz ha $0 \leqslant s < t$, akkor $W_t - W_{\tau_a}$ feltételes eloszlása a $\tau_a = s$ feltételre nézve 0 várható értékű és $t - s$ szórásnégyzetű normális eloszlás.

Mivel $W_t - W_{\tau_a \wedge t} = W^*_{t-\tau_a\wedge t}$, az 1.5.10. Állítás bizonyításában alkalmazott gondolatmenethez hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
P(W_t - W_{\tau_a} < y \mid \tau_a = s) &= P(W^*_{t-\tau_a\wedge t} < y \mid \tau_a = s) = \mathbb{I}_{\{s\}}(s) P(W^*_{t-\tau_a\wedge t} < y \mid \tau_a = s) \\
&= \mathbb{E}\Big(\mathbb{I}_{\{s\}}(\tau_a)\mathbb{I}_{(-\infty,y)}(W^*_{t-\tau_a\wedge t}) \mid \tau_a = s\Big) = P(\tau_a = s, W^*_{t-\tau_a\wedge t} < y \mid \tau_a = s) \\
&= P(W^*_{t-s} < y, \tau_a = s \mid \tau_a = s) = P(W^*_{t-s} < y \mid \tau_a = s).
\end{aligned}$$

Mivel W^*_{t-s} és τ_a függetlenek, kapjuk, hogy

$$P(W^*_{t-s} < y \mid \tau_a = s) = P(W^*_{t-s} < y),$$

és így

$$P(W_t - W_{\tau_a} < y \mid \tau_a = s) = P(W^*_{t-s} < y) = P(\mathcal{N}(0, t-s) < y).$$

Így

$$P(W_t - W_{\tau_a} > 0 \mid \tau_a = s) = P(W_t - W_{\tau_a} < 0 \mid \tau_a = s) = \frac{1}{2}. \tag{1.4.10}$$

Integrálva 0-tól t-ig $F_{\tau_a}(s)$ szerint (1.4.10) bal- és jobboldalát kapjuk, hogy

$$\int_0^t P(W_t - W_{\tau_a} > 0 \mid \tau_a = s)\,\mathsf{d}F_{\tau_a}(s) = \int_0^t \frac{1}{2}\,\mathsf{d}F_{\tau_a}(s). \tag{1.4.11}$$

A teljes várható érték tétele segítségével megmutatjuk, hogy (1.4.11) baloldala

$$\int_0^t P(W_t - W_{\tau_a} > 0 \mid \tau_a = s)\,\mathsf{d}F_{\tau_a}(s) = P(W_t - W_{\tau_a} > 0, \tau_a < t).$$

Ugyanis,

$$\begin{aligned}
P(W_t - W_{\tau_a} > 0, \tau_a < t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(W_t - W_{\tau_a} > 0, \tau_a < t \mid \tau_a = s)\,\mathsf{d}F_{\tau_a}(s) \\
&= \int_0^t P(W_t - W_{\tau_a} > 0 \mid \tau_a = s)\,\mathsf{d}F_{\tau_a}(s).
\end{aligned}$$

Mivel (1.4.11) jobboldala

$$\int_0^t \frac{1}{2}\,\mathsf{d}F_{\tau_a}(s) = \frac{1}{2}P(\tau_a < t),$$

így

$$P(\tau_a < t) = 2P(W_t - W_{\tau_a} > 0, \tau_a < t).$$

Megmutatjuk, hogy a $\{W_t - W_{\tau_a} > 0\} \cap \{\tau_a < t\}$ esemény egybeesik a $\{W_t > a\}$ eseménnyel. Ugyanis, ha valamilyen $\omega \in \Omega$-ra $\tau_a(\omega) < t$ és $W_t(\omega) - W_{\tau_a(\omega)}(\omega) > 0$, akkor mivel $W_{\tau_a(\omega)}(\omega) = a$ következik, hogy $W_t(\omega) > a$. Megfordítva, ha $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $W_t(\omega) > a$, akkor az $s \mapsto W_s(\omega)$ trajektória folytonossága és a Bolzano-tétel miatt $\tau_a(\omega) < t$. Ezért

$$P(\tau_a < t) = 2P(W_t > a) = 2(1 - P(\mathcal{N}(0,t) \leqslant a)) = 2(1 - \Phi(a/\sqrt{t})).$$

Mivel ezen egyenlet jobboldala t-nek folytonos függvénye $(0,+\infty)$-en, ezért a baloldal is folytonos függvénye t-nek, így

$$P(\tau_a < t) = P(\tau_a \leqslant t).$$

Mivel $\{\tau_a \leqslant t\} = \{M_t \geqslant a\}$ kapjuk, hogy

$$P(\tau_a \leqslant t) = P(M_t \geqslant a).$$

□

1.4.33. Következmény. *Legyen* $\{W_t : t \geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat. Jelölje* τ_a *az* a *szint első elérési idejét. Ekkor* τ_a *abszolút folytonos valószínűségi változó, sűrűségfüggvénye*

$$f_{\tau_a}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0, \\ \dfrac{ae^{-a^2/(2x)}}{\sqrt{2\pi}x^{3/2}} & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

továbbá $P(\tau_a < \infty) = 1$ *és* $\mathbb{E}\tau_a = +\infty$.

Bizonyítás. Az 1.4.32. Állítás alapján minden $x > 0$-ra $P(\tau_a < x) = 2(1 - \Phi(a/\sqrt{x}))$, így

$$P(\tau_a < x) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a/\sqrt{x}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathsf{d}u.$$

Végrehajtva az $u = a/\sqrt{z}$ helyettesítést kapjuk, hogy

$$P(\tau_a < x) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{a}{2z^{3/2}} e^{-\frac{a^2}{2z}}\, \mathsf{d}z.$$

Így adódik, hogy τ_a abszolút folytonos és sűrűségfüggvénye az állításban megadott alakú. Mivel

$$\lim_{x\to+\infty} P(\tau_a < x) = \lim_{x\to+\infty} 2(1 - \Phi(a/\sqrt{x})) = 2(1 - 1/2) = 1,$$

és $\{\tau_a < +\infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\tau_a < n\}$, a valószínűség folytonossága miatt kapjuk, hogy

$$P(\tau_a < +\infty) = \lim_{n\to+\infty} P(\tau_a < n) = 1.$$

(Az, hogy $P(\tau_a < +\infty) = 1$ nem önmagától értetődő, ugyanis τ_a-t nemnegatív, bővített valós értékű valószínűségi változóként definiáltuk.) Felhasználva az f_{τ_a}-ra vonatkozó képletet kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\tau_a = \int_0^{\infty} \frac{a}{\sqrt{2\pi x}} e^{-a^2/(2x)}\, \mathsf{d}x.$$

Nyilván

$$\mathbb{E}\tau_a \geqslant \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-a^2/(2x)}\, \mathsf{d}x \geqslant \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\inf_{x\in[1,+\infty)} e^{-a^2/(2x)} \right) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathsf{d}x.$$

Mivel $\inf_{x\in[1,+\infty)} e^{-a^2/(2x)} = e^{-a^2/2} > 0$, és

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{x} - 2 = +\infty,$$

adódik, hogy $\mathbb{E}\tau_a = +\infty$. □

1.4.34. Megjegyzés. Az előző következménybeli állítás szemléletesen azt jelenti, hogy tetszőleges a szintet 1-valószínűséggel elér egy standard Wiener-folyamat, de az a szint első elérési idejének várható értéke $+\infty$ tetszőlegesen kicsi a-ra is. □

Az 1.4.32. Állítás bizonyításában szereplő tükrözési elvnek van egy kifinomultabb formája is, ami igen hasznos a Wiener-folyamatokkal kapcsolatos számolások során. Tekintsünk egy $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamatot, legyen $a > 0$ rögzített, és jelölje τ_a az a szint első elérési idejét. Ekkor τ_a megállítási időpont $\{W_t : t \geqslant 0\}$-ra vonatkozóan és az 1.4.33. Következmény alapján $P(\tau_a < +\infty) = 1$. Az erős Markov-tulajdonság alapján azt is tudjuk, hogy a $\{W_t^* := W_{\tau_a+t} - W_{\tau_a} : t \geqslant 0\}$ folyamat is standard Wiener-folyamat és úgymond független az $\mathcal{F}_{\tau_a}$ σ-algebrától. Ekkor a $\{-W_t^* : t \geqslant 0\}$ folyamat is standard Wiener-folyamat, s ő is független az $\mathcal{F}_{\tau_a}$ σ-algebrától. A tükrözési elv kifinomultabb formája a következőt jelenti heurisztikusan. Futassuk az eredeti standard Wiener-folyamatot (W-t) az a szint első eléréséig, s ehhez ne W^*-t, hanem $-W^*$-t ragasszuk hozzá, így is standard Wiener-folyamatot fogunk kapni. Formálisan, vezessük be a

$$\widetilde{W}_t(\omega) := \begin{cases} W_t(\omega) & \text{ha } \ t \leqslant \tau_a(\omega), \\ 2a - W_t(\omega) & \text{ha } \ t > \tau_a(\omega) \end{cases}$$

módon definiált $\{\widetilde{W}_t : t \geqslant 0\}$ folyamatot. (Ekkor fennáll, hogy $\widetilde{W}_t = W_{\tau_a\wedge t} - (W_t - W_{\tau_a\wedge t})$, $t \geqslant 0$.)

1.4.35. Állítás. (Tükrözési elv) *Ha* $\{W_t : t \geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat, akkor* $\{\widetilde{W}_t : t \geqslant 0\}$ *is standard Wiener-folyamat.*

Bizonyítás. (Vázlat, Kallenberg [2], 206. old. alapján) Vezessük be a $W_t^{\tau_a} := W(\tau_a \wedge t)$, $t \geqslant 0$ és a $W_t^* := W(\tau_a + t) - W(\tau_a)$, $t \geqslant 0$ jelöléseket. Az erős Markov-tulajdonság alapján $\{W_t^* : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat és független az $\mathcal{F}_{\tau_a}$ σ-algebrától, így speciálisan független τ_a-tól és a $\{W_t^{\tau_a} : t \geqslant 0\}$ folyamattól. Mivel $\{-W_t^* : t \geqslant 0\}$ is standard Wiener-folyamat, kapjuk, hogy a $(\tau_a, (W_t^{\tau_a})_{t\geqslant 0}, (W_t^*)_{t\geqslant 0})$ hármas és a $(\tau_a, (W_t^{\tau_a})_{t\geqslant 0}, (-W_t^*)_{t\geqslant 0})$ hármas ugyanazon függvényeinek ugyanaz az eloszlása.

Vegyük észre, hogy minden $t \geqslant 0$-ra

$$W_t = W_t^{\tau_a} + W^*((t - \tau_a) \vee 0),$$
$$\widetilde{W}_t = W_t^{\tau_a} - W^*((t - \tau_a) \vee 0).$$

Ugyanis, ha $0 \leqslant t < \tau_a$, akkor

$$W_t^{\tau_a} + W^*((t-\tau_a) \vee 0) = W_t + W_0^* = W_t,$$
$$W_t^{\tau_a} - W^*((t-\tau_a) \vee 0) = W_t - W_0^* = W_t = \widetilde{W}_t.$$

Ha $t \geqslant \tau_a$, akkor

$$W_t^{\tau_a} + W^*((t-\tau_a) \vee 0) = W_{\tau_a} + W_{t-\tau_a}^* = W_{\tau_a} + W_t - W_{\tau_a} = W_t,$$
$$W_t^{\tau_a} - W^*((t-\tau_a) \vee 0) = W_{\tau_a} - W_{t-\tau_a}^* = W_{\tau_a} - W_t + W_{\tau_a} = 2W_{\tau_a} - W_t = \widetilde{W}_t.$$

Legyen

$$\phi : [0,+\infty) \times C([0,+\infty)) \times C([0,+\infty)) \to C([0,+\infty)),$$

melyre tetszőleges $s \in [0,+\infty)$, $x, y \in C([0,+\infty))$ esetén $\phi(s,x,y)$ definíció szerint az a $z \in C([0,+\infty))$ függvény, melyre

$$z(t) := x(t) + y((t-s) \vee 0), \quad t \in [0,+\infty).$$

Az előbbiek alapján

$$\phi\big(\tau_a, (W_t^{\tau_a})_{t\geqslant 0}, (W_t^*)_{t\geqslant 0}\big) = (W_t)_{t\geqslant 0},$$
$$\phi\big(\tau_a, (W_t^{\tau_a})_{t\geqslant 0}, (-W_t^*)_{t\geqslant 0}\big) = (\widetilde{W}_t)_{t\geqslant 0}.$$

Ebből már következik, hogy $(\widetilde{W}_t)_{t\geqslant 0}$ is standard Wiener-folyamat. Ennek pontos indoklása meghaladja a jegyzet kereteit. □

A tükrözési elv segítségével meghatározhatjuk M_t és W_t együttes eloszlását is.

1.4.36. Következmény. *Legyen* $\{W_t : t \geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat és* $M_t := \max_{0\leqslant s\leqslant t} W_s$, $t \geqslant 0$. *Ekkor minden* $a, b > 0$ *esetén*

$$P(M_t \geqslant a, W_t \leqslant a-b) = P(W_t \geqslant a+b).$$

Bizonyítás. Mivel $W_s(\omega) = \widetilde{W}_s(\omega)$, ha $0 \leqslant s \leqslant \tau_a(\omega)$, ezért $\{M_t \geqslant a\} = \{\widetilde{M}_t \geqslant a\}$, ahol $\widetilde{M}_t := \max_{0\leqslant s\leqslant t} \widetilde{W}_s$. Felhasználva, hogy ha $M_t(\omega) \geqslant a$, akkor $t \geqslant \tau_a(\omega)$, és így

$$\begin{aligned}\{M_t \geqslant a, W_t \leqslant a-b\} &= \{M_t \geqslant a, 2a - \widetilde{W}_t \leqslant a-b\} \\ &= \{\widetilde{M}_t \geqslant a, \widetilde{W}_t \geqslant a+b\} = \{\widetilde{W}_t \geqslant a+b\}.\end{aligned}$$

Az 1.4.35. Állítás alapján $P(\widetilde{W}_t \geqslant a+b) = P(W_t \geqslant a+b)$, így adódik a dolog. □

1.4.37. Következmény. *Tetszőleges* $t > 0$ *esetén* (W_t, M_t) *együttes sűrűségfüggvénye*

$$f_{(W_t,M_t)}(x,y) = \begin{cases} \frac{2(2y-x)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{(2y-x)^2}{2t}\right\} & \text{ha} \quad x < y \quad \text{és} \quad y > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen az 1.4.36. Következményben $a = y$ és $a - b = x$. Ekkor $a = y$, $b = y - x$; és $a > 0$, $b > 0$ miatt $y > 0$ és $y > x$, valamint

$$P(M_t \geqslant y, W_t \leqslant x) = P(W_t \geqslant 2y - x)$$

minden $y > 0$ és $y > x$ esetén. Így tetszőleges $y > 0$ és $y > x$ esetén

$$\begin{aligned} P(M_t < y, W_t < x) &= P(M_t < y, W_t \leqslant x) = P(W_t \leqslant x) - P(M_t \geqslant y, W_t \leqslant x) \\ &= P(W_t < x) - P(W_t \geqslant 2y - x) = P(W_t < x) + P(W_t < 2y - x) - 1. \end{aligned}$$

Ezért tetszőleges $y > 0$ és $y > x$ esetén

$$\begin{aligned} f_{(W_t,M_t)}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Big(P(W_t < x) + P(W_t < 2y - x) - 1\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(2 f_{W_t}(2y - x)\Big) \\ &= 2\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(2y-x)^2}{2t}}\Big) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\frac{2y - x}{t} e^{-\frac{(2y-x)^2}{2t}} \\ &= \frac{2(2y - x)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{(2y - x)^2}{2t}\right\}. \end{aligned}$$

Ha $x \geqslant y$, akkor $P(M_t < y, W_t < x) = P(M_t < y)$, így $f_{(W_t,M_t)}(x, y) = 0$, ha $x \geqslant y$. Ha $y \leqslant 0$, akkor M_t definíciója alapján $P(M_t < y, W_t < x) \leqslant P(M_t < y) = 0$, így $f_{(W_t,M_t)}(x, y) = 0$, ha $y \leqslant 0$. □

1.4.38. Következmény. *Legyen* $\{W_t : t \geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat. Ekkor a* $t \to W_t(\omega)$ *(folytonos) trajektóriának 1 valószínűséggel van zérushelye a* $(0, x]$ *intervallumban tetszőleges* $x > 0$ *esetén. Továbbá,* $\mathbb{P}(M_x > 0, \forall\, x > 0) = 1$.

Bizonyítás. Ugyanis tetszőleges $a > 0$ esetén, az 1.4.32. Állítás alapján

$$P(M_x > 0) = P\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant x} W_t > 0\right) \geqslant P\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant x} W_t \geqslant a\right) = P(M_x \geqslant a) = 2P(W_x \geqslant a),$$

amiből $a \downarrow 0$ esetén azt kapjuk, hogy

$$P\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant x} W_t > 0\right) = 2P(W_x > 0) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

ugyanis $W_x \sim \mathcal{N}(0, x)$, $x > 0$. Mivel $\{-W_t : t \geqslant 0\}$ is standard Wiener-folyamat

$$P\left(\inf_{0 \leqslant t \leqslant x} W_t < 0\right) = 1.$$

Ezért

$$P(W_t > 0, \forall\, t \in (0, x]) = P(W_t < 0, \forall\, t \in (0, x]) = 0,$$

ugyanis

$$\{W_t < 0, \forall\, t \in (0, x]\} \subseteq \{\sup_{0 \leqslant t \leqslant x} W_t \leqslant 0\},$$

$$\{W_t > 0, \forall\, t \in (0, x]\} \subseteq \{\inf_{0 \leqslant t \leqslant x} W_t \geqslant 0\}$$

és

$$P\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant x} W_t \leqslant 0\right) = 1 - P\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant x} W_t > 0\right) = 0,$$

$$P\left(\inf_{0\leqslant t\leqslant x} W_t \geqslant 0\right) = 1 - P\left(\inf_{0\leqslant t\leqslant x} W_t < 0\right) = 0.$$

Így a standard Wiener-folyamat trajektóriáinak folytonossága alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(\exists\, t \in (0,x] : W_t = 0) &= 1 - P(W_t \neq 0, \forall\, t \in (0,x]) \\ &= 1 - P(W_t > 0, \forall\, t \in (0,x]) - P(W_t < 0, \forall\, t \in (0,x]) = 1 \end{aligned}$$

Továbbá, mivel

$$\{M_x > 0,\, \forall\, x > 0\} = \left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant x} W_t > 0,\ \forall x > 0\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1/n} W_t > 0\right\},$$

és megszámlálható sok 1 valószínűségű esemény metszete is 1 valószínűségű esemény, kapjuk, hogy

$$P(M_x > 0,\, \forall\, x > 0) = P\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant x} W_t > 0,\ \forall x > 0\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1/n} W_t > 0\right\}\right) = 1.$$

□

1.4.39. Következmény. *Legyen* $\{W_t : t \geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat. Ekkor a* $t \to W_t(\omega)$ *trajektóriának 1 valószínűséggel végtelen sok zérushelye van a* $(0,x]$ *intervallumban tetszőleges* $x > 0$ *esetén.*

Bizonyítás. Legyen $x > 0$ tetszőlegesen rögzített. Legyen

$$N := \Big\{\omega \in \Omega : \text{ a } t \in (0,x] \mapsto W_t(\omega) \quad \text{trajektóriának csak véges sok zérushelye van}\Big\}.$$

Ekkor minden $\omega \in N$ esetén létezik olyan $n(\omega) \in \mathbb{N}$, hogy a

$$t \in (0, 1/n(\omega)] \mapsto W_t(\omega)$$

trajektóriának nincs zérushelye. Az előző következmény miatt azonban ez $\omega \in \Omega$-knak csak egy nullmértékű halmazán teljesülhet, ezért $P(N) = 0$. □

Vezessük be a

$$Z(\omega) := \Big\{t \geqslant 0 \,|\, W_t(\omega) = 0\Big\}, \quad \omega \in \Omega$$

jelölést. (Ekkor $Z(\omega)$ nem más, mint a $t \in [0,+\infty) \mapsto W_t(\omega)$ trajektória zérushelyeinek a halmaza.)

Felidézzük a perfekt halmaz fogalmát.

1.4.40. Definíció. *Legyen* (X,d) *egy metrikus tér. Egy* $H \subseteq X$ *halmaz torlódási pontjainak halmazát* H *derivált halmazának nevezzük és* H'*-vel jelöljük. A* $H \cup H'$ *halmazt pedig* H *burkoló halmazának nevezzük. Ha* $H' \subseteq H$, *akkor a* H *halmazt zártnak; ha* $H \subseteq H'$, *akkor a* H *halmazt önmagában sűrűnek; ha* $H = H'$, *akkor a* H *halmazt* **perfektnek** *mondjuk. A* H *halmaz egy* x *pontját izolált pontnak nevezzük, ha* x *nem torlódási pontja* H*-nak. A* H *halmazt seholsem sűrűnek hívjuk* X*-ben, ha lezártjának nincs belső pontja. A* H *halmazt sűrűnek nevezzük, ha lezártja az egész tér.*

1.4.41. Megjegyzés. Ha H perfekt halmaz, akkor zárt.

1.4.42. Állítás. *Legyen* $\{W_t : t \geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat. Ekkor* $Z(\omega)$ *perfekt halmaz P-m.m.* $\omega \in \Omega$ *esetén. (Azaz egy standard Wiener-folyamat trajektóriái zérushelyeinek halmaza 1-valószínűséggel perfekt halmaz.) (Ezen állítás során megint a standard Wiener-folyamat trajektóriáit 1-valószínűséggel tekintjük folytonosaknak.)*

Bizonyítás. Elég azt megmutatni, hogy P-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén $Z(\omega)$ zárt halmaz és azt, hogy minden $t \in Z(\omega)$ esetén létezik olyan páronként különböző elemekből álló $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t_n \in Z(\omega)$, $n \in \mathbb{N}$, sorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Mivel egy standard Wiener-folyamat trajektóriái 1-valószínűséggel folytonosak, $Z(\omega)$ zárt halmaz P-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén. Rögzítsünk egy $q > 0$ racionális számot. Tekintsük a $\nu_q : \Omega \to [0,+\infty]$,

$$\nu_q := \begin{cases} \inf\{t \geqslant q \,|\, W_t = 0\} & \text{ha } \ \exists\, t \geqslant q : W_t = 0, \\ +\infty & \text{egyébként} \end{cases}$$

elérési időt. A standard Wiener-folyamat trajektóriáinak P-m.m.-i folytonossága miatt ν_q jól definiált és mivel $P(W_q = 0) = 0$, kapjuk, hogy $P(\nu_q > q) = 1$. Ekkor ν_q megállítási pillanat $\{W_t : t \geqslant 0\}$-ra, így az 1.4.30. Állítás (erős Markov-tulajdonság) alapján a $\{W_t^* := W_{\nu_q+t} - W_{\nu_q} : t \geqslant 0\}$ folyamat is standard Wiener-folyamat, és ezért az 1.4.39. Következmény miatt minden $\varepsilon > 0$-ra 1-valószínűséggel végtelen sok zérushelye van a $(0,\varepsilon)$ intervallumban. Mivel $P(W_{\nu_q} = 0) = 1$, az előzőekből kapjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$ és $q > 0, q \in \mathbb{Q}$ esetén

$$P\Big(\Big\{\omega \in \Omega \,\Big|\, t \in (0,\varepsilon) \mapsto W_{\nu_q(\omega)+t}(\omega) \quad \text{trajektóriáinak végtelen sok zérushelye van}\Big\}\Big) = 1.$$

Mivel $\mathbb{Q}$ megszámlálható és megszámlálható sok 1-valószínűségű esemény metszete is 1-valószínűségű esemény, adódik, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$P\Big(\bigcap_{q>0,q\in\mathbb{Q}} \Big\{t \in (0,\varepsilon) \mapsto W_{\nu_q+t} \quad \text{trajektóriáinak végtelen sok zérushelye van}\Big\}\Big) = 1.$$

Ezt az összefüggést úgy is írhatjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$P\Big(\bigcap_{q>0,q\in\mathbb{Q}} \Big\{t \in (\nu_q, \nu_q+\varepsilon) \mapsto W_t \quad \text{trajektóriáinak végtelen sok zérushelye van}\Big\}\Big) = 1.$$

Mivel

$$\bigcap_{0<\varepsilon\leqslant 1}\bigcap_{q>0,q\in\mathbb{Q}}\Big\{t\in(\nu_q,\nu_q+\varepsilon)\mapsto W_t\quad\text{trajektóriáinak végtelen sok zérushelye van}\Big\}$$
$$=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{q>0,q\in\mathbb{Q}}\Big\{t\in(\nu_q,\nu_q+1/n)\mapsto W_t\quad\text{trajektóriáinak végtelen sok zérushelye van}\Big\}$$

kapjuk, hogy

(1.4.12)

$$P\left(\bigcap_{0<\varepsilon\leqslant 1}\bigcap_{q>0,q\in\mathbb{Q}}\Big\{t\in(\nu_q,\nu_q+\varepsilon)\mapsto W_t\quad\text{trajektóriáinak végtelen sok zérushelye van}\Big\}\right)=1.$$

Legyen $\omega\in\Omega$ az (1.4.12)-beli 1-valószínűségű halmazból való és legyen $t\in Z(\omega)$ tetszőleges. Ekkor két eset lehetséges, vagy létezik olyan $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t_n\in Z(\omega)$ sorozat, hogy t_n szigorúan monoton növekvően tart t-hez (ekkor készen vagyunk), vagy létezik olyan $0<\varepsilon<t$ szám, hogy a $(t-\varepsilon,t)$ intervallumban nincs $Z(\omega)$-nak eleme. Az utóbbi esetben létezik olyan $q\in(t-\varepsilon,t)$ racionális szám, hogy $t=\nu_q$. Ekkor (1.4.12) alapján létezik olyan $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy ε_n szigorúan monoton csökkenően tart 0-hoz és minden $n\in\mathbb{N}$-re az $s\in(\nu_q(\omega),\nu_q(\omega)+\varepsilon_n)=(t,t+\varepsilon_n)\mapsto W_s(\omega)$ trajektóriának végtelen sok zérushelye van. Így létezik olyan $(\widetilde{t}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\widetilde{t}_n\in Z(\omega)$ sorozat, hogy $\widetilde{t}_n$ szigorúan monoton csökkenően tart $\nu_q(\omega)=t$-hez. $\square$

1.4.43. Megjegyzés. Legyen $\{W_t:t\geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat. Ekkor

$$P\left(\left\{\omega\in\Omega\,\middle|\,Z(\omega)\,\text{Lebesgue-mértéke}\,0\right\}\right)=1.$$

(Az 1.4.42. Állítás alapján P-m.m. $\omega\in\Omega$ esetén $Z(\omega)$ Lebesgue-mérhető, mert P-m.m. $\omega\in\Omega$-ra $Z(\omega)$ zárt halmaz, így P-m.m. $\omega\in\Omega$-ra beszélhetünk a Lebesgue-mértékéről.) Ugyanis, $\lambda(Z(\omega))$-val jelölve $Z(\omega)$ Lebesgue-mértékét, a Fubini-tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\,\lambda(Z)=\int_\Omega\int_0^\infty \mathbb{I}_{\{0\}}(W_t(\omega))\,\mathsf{d}t\,\mathsf{d}P(\omega)=\int_0^\infty\int_\Omega \mathbb{I}_{\{0\}}(W_t(\omega))\,\mathsf{d}P(\omega)\,\mathsf{d}t$$
$$=\int_0^\infty P(W_t=0)\,\mathsf{d}t=0.$$

Felhasználva azt, hogy ha $\xi\geqslant 0$ valószínűségi változó és $\mathbb{E}\xi=0$, akkor $P(\xi=0)=1$, kapjuk a dolgot. $\square$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy P-m.m. $\omega\in\Omega$ esetén $Z(\omega)\cap[0,1]$ homeomorf a (triadikus) Cantor-halmazzal. (Mint majd látjuk a Cantor-halmaz egy kompakt, Lebesgue-szerint nullmértékű perfekt halmaz.)

Először felidézzük a mértékelméletből (nem)tanult Cantor-halmaz fogalmát (Szőkefalvi-Nagy Béla [9], 45-46. old.).

Osszuk fel a $[0,1]$ zárt intervallumot az $1/3$ és $2/3$ pontokkal három részre, és hagyjuk el belőle az $(1/3,2/3)$ nyílt intervallumot. A megmaradt $[0,1/3]$ és $[2/3,1]$ zárt intervallumok mindegyikéből hagyjuk el középső nyitott harmadrészüket, azaz az $(1/9,2/9)$ és $(7/9,8/9)$ intervallumokat. Ezután a megmaradt négy zárt intervallumból hagyjuk el a középső nyitott harmadrészüket, s folytassuk ezt az eljárást minden határon túl.

A $[0,1]$ intervallumból az eljárás folyamán mindig nyílt intervallumokat hagytunk el, a megmaradt pontok C halmaza, az ún. Cantor-halmaz tehát zárt halmaz. S mivel kompakt halmaz zárt részhalmaza kompakt, kapjuk, hogy C kompakt is. Megmutatjuk, hogy C perfekt halmaz.

Evégből jellemezzük előbb a C halmaz pontjait aritmetikailag. Írjuk fel a $[0,1]$ intervallum számait a 3-as (triadikus) számrendszerben:

$$x = [0, a_1a_2a_3\ldots]_3, \quad a_k = 0,1,2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ez az előállítás az 1-re is lehetséges: $1 = [0,222\ldots]_3$. Bizonyos számokra (az ún. triadikusan racionális számokra) kétféle kifejezés is lehetséges, pl. $[0,100\ldots]_3 = [0,022\ldots]_3$. Azok az x-ek, amelyek kifejezésében $a_1 = 1$, nyilván az $[1/3,2/3]$ zárt intervallumba esnek. Azonban míg ennek az intervallumnak a belsejébe eső x-re szükségképpen $a_1 = 1$, addig a végpontok előállíthatók olyan alakban is, amelyben $a_1 \neq 1$, ugyanis

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= [0,100\ldots]_3 = [0,022\ldots]_3,\\ \frac{2}{3} &= [0,122\ldots]_3 = [0,200\ldots]_3.\end{aligned}$$

Így tehát a $[0,1]$-ból az $(1/3,2/3)$ elhagyása után pontosan azok az x pontok maradnak meg, amelyeket **lehet** úgy triadikus törtbefejteni, hogy $a_1 \neq 1$. Folytatva ezt a meggondolást, arra az eredményre jutunk, hogy a C halmaz pontosan azokból a pontokból áll, amelyek triadikusan előállíthatók az 1 számjegy felhasználása nélkül, tehát csupán a 0 és a 2 számjegyek felhasználásával.

A C halmaz perfektsége most már könnyen belátható. Legyen

$$x = [0, a_1a_2a_3\ldots]_3, \quad (a_k = 0 \quad \text{vagy} \quad a_k = 2)$$

a C halmaz egy tetszőleges pontja. Legyen x_n az a pont, amelynek a triadikus kifejtése az x-étől csak az n-edik jegyben különbözik: ha ez az x-nél 0 volt, itt legyen 2, és fordítva. Az így kapott $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ pontsorozat nyilván C csupa különböző pontjaiból áll és x-hez tart, ha $n \to \infty$. Tehát x C-nek torlódási pontja. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a C halmaz, az ún. Cantor-féle triadikus halmaz, perfekt.

Az könnyen adódik, hogy C Lebesgue-szerint nullmértékű halmaz. Ugyanis, C konstrukciója során a $[0,1]$ intervallumból elhagyott (nyílt) intervallumok hosszainak összege

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1/3}{1-2/3} = 1.$$

Megmutatható az is, hogy C számossága kontinuum.

1.4.44. Definíció. *Legyen* X *egy topologikus tér. Ekkor* X *egy maximális összefüggő alterét (vagyis olyan összefüggő alteret, mely nem valódi része egyetlen bővebb összefüggő altérnek sem) a tér* **komponensének** *nevezünk. Ismert, hogy tetszőleges* X *topologikus tér esetén minden pont* X*-nek pontosan egy komponensében van benne. Amennyiben minden pont esetén ez a (pontot tartalmazó) komponens csak magából a pontból álló 1-elemű halmaz, úgy a teret* **teljesen szétesőnek** *nevezzük (angolul: totally disconnected).*

1.4.45. Állítás. *Legyen* $\{W_t : t \geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat. Ekkor P-m.m.* $\omega \in \Omega$ *esetén* $Z(\omega) \cap [0,1] = \{t \in [0,1] : W_t(\omega) = 0\}$ *teljesen széteső (mint topologikus altér) és seholsem sűrű* $\mathbb{R}$*-ben.*

Bizonyítás. Mindkét dolog arra vezethető vissza, hogy P-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén $Z(\omega)$ Lebesgue-szerint nullmértékű halmaz (lásd az 1.4.43. Megjegyzést).

A teljesen szétesőség bizonyításához tekintsük az alábbiakat. Tegyük fel, hogy egy pont esetén az őt tartalmazó (egyértelműen létező) komponens tartalmaz egy másik, tőle különböző pontot is. Ekkor a komponensnek tartalmaznia kell az őket összekötő intervallumot is, ugyanis $\mathbb{R}$-ben az összefüggő halmazok éppen az intervallumok. Ez azonban a Lebesgue-szerint nullmértékűség miatt nem lehetséges.

A seholsem sűrűséghez, mivel $Z(\omega)$ 1-valószínűséggel zárt, elég azt bizonyítani, hogy $Z(\omega)$-nak nincs belső pontja. Ha lenne, akkor $Z(\omega)$-ban lenne valódi, nyílt intervallum, ami a Lebesgue-szerint nullmértékűség miatt ellentmondás. □

Ismertek az alábbi eredmények topológiából.

1.4.46. Állítás. *Legyen* (X, d) *egy teljesen széteső, perfekt és kompakt metrikus tér. Ekkor* X *homeomorf a (triadikus) Cantor-halmazzal.*

Bizonyítás. Lásd, Corollary 2-98, Hocking, Young: Topology. □

1.4.47. Állítás. *Egy teljes metrikus tér bármely nemüres, perfekt részhalmaza tartalmaz a Cantor-halmazzal homeomorf részhalmazt. (Lásd, Járai Antal: Mértékelmélet, 161. old.)*

(Az előző két állítás az ún. Cantor–Bendixson tétel felhasználásával bizonyítható, miszerint minden teljes szeparábilis metrikus tér egy perfekt halmaz és egy megszámlálható halmaz uniója.)

1.4.48. Következmény. *Legyen* $\{W_t : t \geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat. Ekkor P-m.m.* $\omega \in \Omega$ *esetén* $Z(\omega) \cap [0,1]$ *homeomorf a Cantor-halmazzal.*

Bizonyítás. Az 1.4.42. Állítás és az 1.4.45. Megjegyzés miatt P-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén $Z(\omega) \cap [0,1]$ teljesen széteső, perfekt és kompakt metrikus tér az $\mathbb{R}$-től örökölt metrikával. Így az 1.4.46. Állítás szerint homeomorf a Cantor-halmazzal. □

1.4.49. Megjegyzés. Az elmondottakból az is következik, hogy $\mathbb{R}$ minden kompakt, Lebesgue-szerint nullmértékű perfekt részhalmaza homeomorf a Cantor-halmazzal. Ez azonban két (és több) dimenzióban nem igaz. Hiszen vegyünk a síkban egy zárt szakaszt. Ez kompakt, perfekt és 2-dimenziós Lebesgue-mértéke 0. Azonban nem lehet homeomorf a Cantor-halmazzal, mert az nem összefüggő, zárt szakaszunk azonban összefüggő. □

A következő állítás kedvéért felidézzük a korlátos változás definícióját. Legyenek $-\infty < a < b < \infty$ adott valós számok. Azt mondjuk, hogy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású, ha

$$\sup_{P\in\mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n_P-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < \infty,$$

ahol

$$\mathcal{P} := \{P = \{x_0, \dots, x_{n_P}\} : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n_P} = b,\ n_P \in \mathbb{N}\}.$$

1.4.50. Állítás. *Legyen $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat és $T > 0$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor a $t \in [0,T] \mapsto W_t(\omega)$ trajektória 1 valószínűséggel nem korlátos változású. (Az is adódik, hogy a trajektóriák 1 valószínűséggel nem korlátos változásúak semmilyen intervallumon sem.)*

Bizonyítás. Elegendő a $T = 1$ esetet tárgyalni, azaz azt belátni, hogy a $t \in [0,1] \mapsto W_t(\omega)$ trajektória 1 valószínűséggel nem korlátos változású. Ugyanis, ha $T > 0$ tetszőleges, akkor az 1.4.18. Állítás alapján az $\{\frac{1}{\sqrt{T}} W_{Tt} : t \geqslant 0\}$ folyamat is standard Wiener-folyamat. Így ha belátjuk, hogy egy standard Wiener-folyamat trajektóriái 1-valószínűséggel nem korlátos változásúak a $[0,1]$ intervallumon, akkor kapjuk, hogy a $t \in [0,1] \mapsto \frac{1}{\sqrt{T}} W_{Tt}(\omega)$ trajektóriák 1-valószínűséggel nem korlátos változásúak. Ez pedig már maga után vonja, hogy a $t \in [0,T] \mapsto W_t(\omega)$ trajektóriák is 1-valószínűséggel nem korlátos változásúak.

Ahhoz, hogy a $t \in [0,1] \mapsto W_t(\omega)$ trajektóriák 1 valószínűséggel nem korlátos változásúak azt kell megmutatni, hogy

$$P\Bigg(\sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |W_{x_k} - W_{x_{k-1}}| : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1, n \in \mathbb{N} \right\} = +\infty \Bigg) = 1.$$

Legyen

$$\eta_n := \sum_{k=1}^{2^n} |W_{k/2^n} - W_{(k-1)/2^n}|.$$

Nyilván $\eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \dots$. Valóban,

$$\begin{aligned}
\eta_n &= \sum_{k=1}^{2^n} |W_{k/2^n} - W_{(k-1)/2^n}| = \sum_{k=1}^{2^n} |W_{2k/2^{n+1}} - W_{2(k-1)/2^{n+1}}| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{2^n} |W_{2k/2^{n+1}} - W_{(2k-1)/2^{n+1}}| + \sum_{k=1}^{2^n} |W_{(2k-1)/2^{n+1}} - W_{(2k-2)/2^{n+1}}| \\
&= \sum_{k=1}^{2^{n+1}} |W_{k/2^{n+1}} - W_{(k-1)/2^{n+1}}| = \eta_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Legyen $\eta := \lim_{n\to\infty} \eta_n$. Ekkor $\eta : \Omega \to [0, +\infty]$ valószínűségi változó. Elegendő azt megmutatni, hogy $P(\eta = +\infty) = 1$. (Gondoljunk az $x_k = k/2^n$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n$ választásra.) Mivel $W_{k/2^n} - W_{(k-1)/2^n} \sim \mathcal{N}(0, 1/2^n)$, így

$$\zeta := 2^{n/2}(W_{k/2^n} - W_{(k-1)/2^n}) \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Ekkor

$$\mathbb{E}|\zeta| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} =: b, \qquad \mathbb{D}^2|\zeta| = 1 - \frac{2}{\pi} =: c,$$

ugyanis

$$\mathbb{E}|\zeta| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \,\mathsf{d}x = 2\int_0^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \,\mathsf{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \big[-e^{-x^2/2}\big]_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Ezért

$$\mathbb{E}|W_{k/2^n} - W_{(k-1)/2^n}| = \frac{b}{2^{n/2}}, \qquad \mathbb{D}^2|W_{k/2^n} - W_{(k-1)/2^n}| = \frac{c}{2^n},$$

amiből

$$\mathbb{E}\eta_n = 2^{n/2} b, \qquad \mathbb{D}^2\eta_n = c.$$

A Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$P\left(|\eta_n - \mathbb{E}\eta_n| \geqslant \frac{1}{2}\mathbb{E}\eta_n\right) \leqslant \frac{\mathbb{D}^2\eta_n}{(\mathbb{E}\eta_n)^2/4} = \frac{4c}{2^n b^2}.$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\eta_n = \infty$, tetszőleges $K > 0$ esetén elegendően nagy $n \in \mathbb{N}$–re $\frac{1}{2}\mathbb{E}\eta_n \geqslant K$. Ezért

$$\begin{aligned} P(\eta > K) \geqslant P(\eta_n > K) \geqslant P(\eta_n > \tfrac{1}{2}\mathbb{E}\eta_n) \\ \geqslant P\left(|\eta_n - \mathbb{E}\eta_n| < \frac{1}{2}\mathbb{E}\eta_n\right) = 1 - P\left(|\eta_n - \mathbb{E}\eta_n| \geqslant \frac{1}{2}\mathbb{E}\eta_n\right), \end{aligned}$$

hiszen

$$|\eta_n - \mathbb{E}\eta_n| < \frac{1}{2}\mathbb{E}\eta_n \iff -\frac{1}{2}\mathbb{E}\eta_n < \eta_n - \mathbb{E}\eta_n < \frac{1}{2}\mathbb{E}\eta_n \iff \frac{1}{2}\mathbb{E}\eta_n < \eta_n < \frac{3}{2}\mathbb{E}\eta_n.$$

Így

$$P(\eta > K) \geqslant 1 - \frac{c}{2^{n-2}b^2},$$

amiből $n \to \infty$ esetén kapjuk, hogy $P(\eta > K) = 1$. Mivel

$$\{\eta = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^\infty \{\eta > n\},$$

és megszámlálható sok 1-valószínűségű esemény metszete is 1-valószínűségű esemény, kapjuk, hogy $P(\eta = +\infty) = 1$. $\square$

1.4.51. Állítás. *Legyen* $\{W_t : t \geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat és* $T \geqslant 0$ *tetszőlegesen rögzített. Ekkor*

$$P\Big(\Big\{\omega \in \Omega : t \in [0, +\infty) \mapsto W_t(\omega) \quad \textit{trajektória nem differenciálható } T\textit{-ben}\Big\}\Big) = 1.$$

Bizonyítás. Az 1.4.22. Állítás alapján elegendő a $T = 0$ esetet tárgyalni, hiszen tetszőleges $T > 0$ esetén $\{W_t^* := W_{T+t} - W_T : t \geqslant 0\}$ is standard Wiener-folyamat és minden $t > 0$-ra

$$\frac{W_t^* - W_0^*}{t} = \frac{W_{T+t} - W_T}{T + t - T},$$

így a jobboldal határértéke $t \downarrow 0$ esetén pontosan akkor létezik, amikor a baloldalé $t \downarrow 0$ esetén. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim_{t\to 0} W_t(\omega)/t$ határérték, ekkor létezik olyan $\varepsilon(\omega) > 0$ és $A(\omega) \in \mathbb{R}$, hogy $W_t(\omega) < A(\omega)t$, ha $0 \leqslant t < \varepsilon(\omega)$. Ekkor minden $0 \leqslant t < \varepsilon(\omega)$-ra $M_t(\omega) \leqslant A(\omega)t$. Legyen $K \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes szám. Ekkor az 1.4.32. Állítás alapján minden $t > 0$-ra

$$P(M_t \geqslant Kt) = 2P(W_t > Kt) = 2 - 2\Phi(K\sqrt{t}),$$

így $\lim_{t\downarrow 0} P(M_t \geqslant Kt) = 1$ minden $K \in \mathbb{N}$-re. Mivel

$$\Big\{\omega \in \Omega \,|\, \exists\, \varepsilon(\omega) > 0 : W_t(\omega) < Kt, \forall\, 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon(\omega)\Big\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \Big\{\omega \in \Omega \,|\, M_{1/k}(\omega) \leqslant K\frac{1}{k}\Big\},$$

és mivel

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \Big\{\omega \in \Omega \,|\, M_{1/k}(\omega) \leqslant K\frac{1}{k}\Big\}\Big) &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \Big\{\omega \in \Omega \,|\, M_{1/k}(\omega) \leqslant K\frac{1}{k}\Big\}\right) \\ &\leqslant \limsup_{n\to\infty} P\left(\Big\{\omega \in \Omega \,|\, M_{1/n}(\omega) \leqslant K\frac{1}{n}\Big\}\right), \end{aligned}$$

kapjuk, hogy

$$P(\{\omega \in \Omega \,|\, \exists\, \varepsilon(\omega) > 0 : W_t(\omega) < Kt, \forall\, 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon(\omega)\}) \leqslant \limsup_{n\to\infty} P\left(\Big\{\omega \in \Omega \,|\, M_{1/n}(\omega) \leqslant K\frac{1}{n}\Big\}\right).$$

Mivel $\lim_{t\downarrow 0} P(M_t \geqslant Kt) = 1$, kapjuk, hogy a fenti egyenlőtlenség jobboldalán szereplő $\limsup$ nulla, és így

$$P(\{\omega \in \Omega \,|\, \exists\, \varepsilon(\omega) > 0 : W_t(\omega) < Kt, \forall\, 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon(\omega)\}) = 0$$

minden $K \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel

$$\begin{aligned} \Big\{\omega \in \Omega \,|\, \exists \lim_{t\downarrow 0} \frac{W_t(\omega)}{t}\Big\} &\subseteq \Big\{\omega \in \Omega \,|\, \exists\, \varepsilon(\omega) > 0, \exists\, A(\omega) \in \mathbb{R} : W_t(\omega) < A(\omega)t, \,\forall\, 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon(\omega)\Big\} \\ &\subseteq \bigcup_{K=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega \,|\, \exists\, \varepsilon(\omega) > 0 : W_t(\omega) < Kt, \,\forall\, 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon(\omega)\}, \end{aligned}$$

felhasználva azt is, hogy megszámlálható sok nullmértékű halmaz uniója is nullmértékű adódik, hogy

$$P\Big(\Big\{\omega\in\Omega \,|\, \exists \lim_{t\downarrow 0}\frac{W_t(\omega)}{t}\Big\}\Big)=0.$$

□

Az 1.4.51. Állításban foglaltaknál sokkal több is igaz. Vezessük be az úgynevezett Dini-deriváltakat.

1.4.52. Definíció. *Legyen* $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *egy folytonos függvény. Ekkor a*

$$D^{\pm}f(t):=\limsup_{h\to 0\pm}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

mennyiségeket az f *függvény* t*-beli felső (jobb- ill. baloldali) Dini-deriváltjáinak hívjuk. Hasonlóan a*

$$D_{\pm}f(t):=\liminf_{h\to 0\pm}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

mennyiségeket az f *függvény* t*-beli alsó (jobb- ill. baloldali) Dini-deriváltjáinak hívjuk. Azt mondjuk, hogy az* f *függvény jobbról (ill. balról) (Dini-)differenciálható* t*-ben, ha* $D^+f(t)$ *és* $D_+f(t)$ *(ill.* $D^-f(t)$ *és* $D_-f(t)$*) végesek és egyenlőek. Azt mondjuk, hogy az* f *függvény (Dini-)differenciálható* $t>0$*-ban, ha jobbról és balról is (Dini-)differenciálható* $t>0$*-ban és a négy Dini-derivált egyenlő. A* $t=0$*-ban való (Dini-)differenciálhatóságon* $t=0$*-beli jobboldali (Dini-)differenciálhatóságot értünk.*

1.4.53. Tétel. (Paley–Wiener–Zygmund, 1933) *Legyen* $\{W_t:t\geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat. Ekkor P-m.m.* $\omega\in\Omega$*-ra a* $t\in[0,+\infty)\mapsto W_t(\omega)$ *trajektória seholsem (Dini-)differenciálható. Pontosabban, a*

$$\big\{\omega\in\Omega \,|\, \forall\, t\in[0,+\infty) \text{ esetén vagy } D^+W_t(\omega)=+\infty \text{ vagy } D_+W_t(\omega)=-\infty\big\}$$

halmaz tartalmaz egy 1-valószínűségű eseményt.

1.4.54. Állítás. (Wiener-folyamatra vonatkozó Wald-azonosságok) *Legyen* $\{W_t : t\geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat és* τ **korlátos** *megállítási időpont* $\{W_t:t\geqslant 0\}$*-ra nézve. Ekkor*

(i) $\mathbb{E}W_\tau=0$,

(ii) $\mathbb{E}W_\tau^2=\mathbb{E}\tau$,

(iii) $\mathbb{E}\exp\{\theta W_\tau-\theta^2\tau/2\}=1$ *minden* $\theta\in\mathbb{R}$ *esetén,*

(iv) $\mathbb{E}\exp\{i\theta W_\tau+\theta^2\tau/2\}=1$ *minden* $\theta\in\mathbb{R}$ *esetén.*

(Mivel τ *korlátos, ezért* $\mathbb{E}\tau$ *létezik és véges.)*

Bizonyítás. Ha $\tau \equiv t$, ahol $t \in \mathbb{R}$ előre adott (azaz τ nem véletlen megállítási időpont), akkor (i) és (ii) közvetlenül adódik a standard Wiener-folyamat definíciójából. Felhasználva, hogy $\mathcal{N}(0,t)$ karakterisztikus függvénye a $\theta \in \mathbb{R}$ helyen $e^{-\theta^2 t/2}$ kapjuk (iv)-et is. A (iii) rész annak a következménye, hogy $\mathcal{N}(0,t)$ momentumgeneráló függvénye a $\theta \in \mathbb{R}$ helyen $e^{\theta^2 t/2}$.

Legyen most τ tetszőleges korlátos megállítási időpont $\{W_t : t \geqslant 0\}$-ra nézve. Ekkor létezik olyan N valós szám, hogy $P(\tau < N) = 1$. Az 1.4.30. Állítás (erős Markov-tulajdonság) alapján a $\{W_t^* := W_{\tau+t} - W_\tau : t \geqslant 0\}$ folyamat is standard Wiener-folyamat és minden $t > 0$-ra az $\mathcal{F}_t^{W^*} = \sigma(W_s^*, 0 \leqslant s \leqslant t)$ σ-algebra független az $\mathcal{F}_\tau$ σ-algebrától. Felhasználva $\mathcal{F}_\tau$ definícióját, speciálisan az is igaz, hogy minden $t > 0$-ra $\mathcal{F}_t^{W^*}$ független a (τ, W_τ) valószínűségi vektorváltozótól. Így az 1.4.32. Állítás bizonyításában látottak alapján, $W_N - W_\tau$ feltételes eloszlása a $\tau = s$ feltételre nézve normális eloszlású 0 várható értékkel és $N - s$ szórásnégyzettel minden $0 \leqslant s < N$ esetén. Ezért

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(W_N - W_\tau \,|\, \tau) = 0 \quad P\text{-m.m.},\\
&\mathbb{E}((W_N - W_\tau)^2 \,|\, \tau) = N - \tau \quad P\text{-m.m.}
\end{aligned}$$

Így

$$0 = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}(W_N - W_\tau \,|\, \tau)\big] = \mathbb{E}(W_N - W_\tau) = \mathbb{E}W_N - \mathbb{E}W_\tau = 0 - \mathbb{E}W_\tau,$$

tehát $\mathbb{E}W_\tau = 0$. Illetve

$$N - \mathbb{E}\tau = \mathbb{E}(N-\tau) = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}((W_N - W_\tau)^2 \,|\, \tau)\big] = \mathbb{E}(W_N - W_\tau)^2 = \mathbb{E}W_N^2 + \mathbb{E}W_\tau^2 - 2\mathbb{E}(W_N W_\tau),$$

amiből következik, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}W_\tau^2 &= 2\mathbb{E}(W_N W_\tau) - \mathbb{E}\tau = 2\mathbb{E}\big((W_N - W_\tau)W_\tau\big) + 2\mathbb{E}W_\tau^2 - \mathbb{E}\tau\\
&= 2\mathbb{E}(W_N - W_\tau)\mathbb{E}W_\tau + 2\mathbb{E}W_\tau^2 - \mathbb{E}\tau = 2\mathbb{E}W_\tau^2 - \mathbb{E}\tau,
\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy $W_N - W_\tau$ és W_τ függetlenek. Így $\mathbb{E}W_\tau^2 = \mathbb{E}\tau$.

A korábbiak alapján fennáll az is, hogy

$$\mathbb{E}\left(\exp\{\theta(W_N - W_\tau) - \theta^2(N-\tau)/2\} \,|\, \tau\right) = 1, \quad \text{P-m.m.},$$

és végiggondolható az is, hogy W_τ és $\mathcal{F}_t^{W^*}$ $(t > 0)$ függetlensége miatt teljesül az is, hogy

$$\mathbb{E}\left(\exp\{\theta(W_N - W_\tau) - \theta^2(N-\tau)/2\} \,|\, W_\tau, \tau\right) = 1, \quad \text{P-m.m.}$$

Ezért

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{\theta W_\tau - \theta^2\tau/2} &= \mathbb{E}\Big(e^{\theta W_\tau - \theta^2\tau/2} \cdot 1\Big)\\
&= \mathbb{E}\Big(e^{\theta W_\tau - \theta^2\tau/2} \cdot \mathbb{E}\left(\exp\{\theta(W_N - W_\tau) - \theta^2(N-\tau)/2\} \,|\, W_\tau, \tau\right)\Big)\\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(e^{\theta W_\tau - \theta^2\tau/2}\exp\{\theta(W_N - W_\tau) - \theta^2(N-\tau)/2\} \,|\, W_\tau, \tau\right)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(e^{\theta W_N - \theta^2 N/2} \,|\, W_\tau, \tau\right)\right)\\
&= \mathbb{E}e^{\theta W_N - \theta^2 N/2} = 1.
\end{aligned}$$

Ezzel (iii)-t bebizonyítottuk, (iv) bizonyítása hasonló. □

1.4.55. Állítás. *Legyen* $\{W_t : t \geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat és legyenek* $a > 0, b > 0$ *adott valós számok. Vezessük be a* $T_{-a,b} : \Omega \to [0, +\infty]$

$$T_{-a,b} = \begin{cases} \inf\{t \geqslant 0 \,|\, W_t = -a \quad \textit{vagy} \quad W_t = b\} & \textit{ha} \quad \exists\, t \geqslant 0 : W_t = -a \quad \textit{vagy} \quad W_t = b, \\ +\infty & \textit{egyébként,} \end{cases}$$

kiterjesztett valós értékű valószínűségi változót. Ekkor $T_{-a,b}$ *1-valószínűséggel véges, de nem korlátos megállítási időpillanat* $\{W_t : t \geqslant 0\}$*-ra nézve és*

$$P(W_{T_{-a,b}} = -a) = \frac{b}{a+b}, \quad P(W_{T_{-a,b}} = b) = \frac{a}{a+b}, \quad \mathbb{E}T_{-a,b} = ab.$$

Bizonyítás. Legyen $T = T_{-a,b}$. Megmutatjuk, hogy T 1-valószínűséggel véges, nem korlátos megállítási időpillanat $\{W_t : t \geqslant 0\}$-ra nézve. Az, hogy T megállítási pillanat, T definíciójából triviális módon következik. Az, hogy T 1-valószínűséggel véges az iterált-logaritmus tétel felhasználásával egyszerűen adódik. Valóban, mivel W_n előállítható $W_n = \sum_{k=1}^{n}(W_k - W_{k-1})$ alakban, azaz n darab független, standard normális eloszlású valószínűségi változó összegeként, az iterált-logaritmus tétel alapján

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{W_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1\Big) = P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{W_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = -1\Big) = 1.$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n\log\log n} = +\infty$,

$$P\big(\limsup_{n\to\infty} W_n = +\infty\big) = P\big(\liminf_{n\to\infty} W_n = -\infty\big) = 1. \tag{1.4.13}$$

Továbbá a standard Wiener-folyamat trajektóriáinak folytonossága miatt

$$P(T = +\infty) = P\big(W_t \in (-a, b), \ \forall\, t \geqslant 0\big).$$

Ezért (1.4.13) alapján $P\big(W_t \in (-a, b), \ \forall\, t \geqslant 0\big) = 0$, és így $P(T = +\infty) = 1$.

A következőkben annak bizonyításával foglalkozunk, hogy T 1-valószínűséggel nem korlátos megállítási pillanat. Ha T korlátos lenne, akkor létezne olyan $0 < N \in \mathbb{R}$, hogy W_t N-ig 1-valószínűséggel kilépne a $(-a, b)$ sávból. Tegyük fel, hogy $a = \min(a, b)$. (Ha $b = \min(a, b)$ teljesülne, ugyanúgy kéne folytatni.) Ekkor

$$P\Big(\sup_{t\in[0,N]} |W_t| \geqslant a\Big) = 1,$$

és így

$$P\big(\tau_a \leqslant N \ \text{ vagy } \ \tau_{-a} \leqslant N\big) = 1, \tag{1.4.14}$$

ahol τ_{-a}, a $-a$ szint első elérési ideje, hasonlóan definiálható τ_a-hoz. A tükrözési elv segítségével belátható, hogy

$$P\big(\tau_a \leqslant N, \tau_{-a} \leqslant N\big) = P\big(\tau_{3a} \leqslant N \ \text{ vagy } \ \tau_{-3a} \leqslant N\big).$$

Így (1.4.14) alapján

$$P\big(\tau_{a/3} \leqslant N, \tau_{-a/3} \leqslant N\big) = 1.$$

Ezért $1 \leqslant P(\tau_{a/3} \leqslant N)$, azaz $P(\tau_{a/3} \leqslant N) = 1$. Ez azt jelenti, hogy $\tau_{a/3}$ eloszlása a $[0, N]$ intervallumra koncentrálódik, ami az 1.4.33. Következmény alapján elletmondás.

Mivel T nem korlátos megállítási időpillanat, ezért a Wald-azonosságokat nem alkalmazhatjuk rá. Azonban minden $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$ esetén $T \wedge n$ korlátos megállítási időpillanat $\{W_t : t \geqslant 0\}$-ra nézve, így az 1.4.54. Állítás (i) és (ii) része alapján

$$\mathbb{E}W_{T\wedge n} = 0, \qquad \mathbb{E}W_{T\wedge n}^2 = \mathbb{E}(T \wedge n).$$

Megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re és P-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén $|W_{T(\omega)\wedge n}(\omega)| \leqslant \max(a, b) \leqslant a+b$. Mivel

$$W_{T(\omega)\wedge n}(\omega) = \begin{cases} W_{T(\omega)}(\omega) & \text{ha} \quad T(\omega) \leqslant n, \\ W_n(\omega) & \text{ha} \quad T(\omega) > n, \end{cases}$$

és $P(T < +\infty) = 1$, továbbá a T (véletlen) időpontig a standard Wiener-folyamat trajektóriái 1-valószínűséggel $-a$ és $+b$ között vannak (felhasználva a standard Wiener-folyamat trajektóriáinak folytonosságát is), kapjuk a dolgot. Szintén a standard Wiener-folyamat trajektóriáinak folytonossága miatt (felhasználva azt is, hogy $P(T < +\infty) = 1$) P-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén $\lim_{n\to\infty} W_{T(\omega)\wedge n}(\omega) = W_{T(\omega)}(\omega)$. Így a dominált konvergencia tétel szerint

$$\mathbb{E}W_T = \mathbb{E}\Big(\lim_{n\to\infty} W_{T\wedge n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}W_{T\wedge n} = 0.$$

Azonban $T = T_{-a,b}$ értelmezése miatt

$$\mathbb{E}W_T = -aP(W_T = -a) + bP(W_T = b).$$

Így

$$0 = -aP(W_T = -a) + bP(W_T = b).$$

Mivel $P(W_T = -a) + P(W_T = b) = 1$, kapjuk, hogy

$$P(W_T = b) = \frac{a}{b}P(W_T = -a) = \frac{a}{b}(1 - P(W_T = b)),$$

amiből

$$P(W_T = b) = \frac{a}{a+b}, \qquad P(W_T = -a) = \frac{b}{a+b}.$$

Hasonlóan, a dominált konvergencia tétel alapján $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}W_{T\wedge n}^2 = \mathbb{E}W_T^2$, illetve a monoton konvergencia tételt használva $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(T \wedge n) = \mathbb{E}T$. Így

$$\mathbb{E}W_T^2 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}W_{T\wedge n}^2 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(T \wedge n) = \mathbb{E}T.$$

Mivel

$$\mathbb{E}W_T^2 = (-a)^2 P(W_T = -a) + b^2 P(W_T = b) = a^2\frac{b}{a+b} + b^2\frac{a}{a+b} = \frac{ab}{a+b}(a+b) = ab,$$

kapjuk, hogy $\mathbb{E}T = ab$. □

1.4.56. Megjegyzés. Legyen $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat és legyenek $a > 0, b > 0$ adott számok. Az előző állítás alapján könnyen kiszámíthatjuk annak a valószínűségét, hogy egy $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat hamarabb éri el a $b > 0$ szintet, mint a $-a < 0$ szintet. Az előző állítás jelöléseivel élve arra keressük a választ, hogy mennyi $P(W_T = b)$, ami pedig $a/(a+b)$. $\square$

1.4.57. Állítás. (Arkuszkoszinusz törvény) *Legyen* $\{W_t : t \geqslant 0\}$ *standard Wiener-folyamat és* $0 \leqslant a < b$. *Ekkor*

$$P\Big(\{\omega \in \Omega \,\Big|\, \exists\, t \in [a, b] : W_t(\omega) = 0\}\Big) = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{a}{b}},$$

ahol $\arccos$ *jelöli a* $\cos$ *függvény* $[0, \pi]$*-re való leszűkítésének inverzét. (Jelen esetben megint úgy tekintjük, hogy a standard Wiener-folyamat trajektóriái 1-valószínűséggel folytonosak és a korábban bevezetett filtrált valószínűségi mezőt vesszük alapul.)*

Bizonyítás. (Stromberg [8], Theorem 8.23 bizonyítása alapján) Ha $a = 0$, akkor $P(\exists\, t \in [0, b] : W_t = 0) = P(\Omega) = 1$, hiszen $W_0(\omega) = 0$, $\omega \in \Omega$. Másrészt $\arccos 0 = \pi/2$, így az $a = 0$ esetben triviális az állítás. Tegyük fel a továbbiakban, hogy $0 < a < b$. Először megmutatjuk, hogy

$$A := \{\omega \in \Omega \,\Big|\, \exists\, t \in [a, b] : W_t(\omega) = 0\}$$

esemény. Kiemeljük, hogy mivel a Wiener-folyamat trajektóriái (csak) 1-valószínűséggel folytonosak, ezt csak azon feltételezés mellett tudjuk megmutatni, hogy az alapul vett $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező teljes, azaz ha $C \in \mathcal{A}$, $P(C) = 0$ és $D \subseteq C$, akkor $D \in \mathcal{A}$ (és ekkor persze $P(D) = 0$). Az általunk tekintett filtrált valószínűségi mező teljes. Legyen

$$F := \{\omega \in \Omega \,\Big|\, t \in [0, +\infty) \mapsto W_t(\omega) \quad \text{folytonos}\}.$$

Tudjuk, a standard Wiener-folyamat definíciója alapján, hogy F esemény és $P(F) = 1$. Elég azt megmutatni, hogy $\overline{A} := \Omega \setminus A$ esemény. Mivel $\overline{A} = (\overline{A} \cap F) \cup (\overline{A} \cap \overline{F})$ és $\overline{A} \cap \overline{F} \subseteq \overline{F}$, $P(\overline{F}) = 0$, $\overline{F} \in \mathcal{A}$ miatt (felhasználva a teljességet) $\overline{A} \cap \overline{F} \in \mathcal{A}$, kapjuk, hogy elég azt megmutatni, hogy $\overline{A} \cap F \in \mathcal{A}$. Felhasználva, hogy kompakt halmazon folytonos függvény felveszi az infimumát és a szuprémumát adódik, hogy

$$\overline{A} \cap F = \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \exists\, n(\omega) \in \mathbb{N} : \forall\, t \in [a, b] : |W_t(\omega)| \geqslant \frac{1}{n(\omega)}\right\} \cap F.$$

Szintén a standard Wiener-folyamat folytonossága miatt

$$\begin{aligned}
&\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \exists\, n(\omega) \in \mathbb{N} : \forall\, t \in [a, b] : |W_t(\omega)| \geqslant \frac{1}{n(\omega)}\right\} \cap F \\
&\qquad = \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \exists\, n(\omega) \in \mathbb{N} : \forall\, t \in [a, b] \cap \mathbb{Q} : |W_t(\omega)| \geqslant \frac{1}{n(\omega)}\right\} \cap F \\
&\qquad = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \forall\, t \in [a, b] \cap \mathbb{Q} : |W_t(\omega)| \geqslant \frac{1}{n}\right\} \cap F \\
&\qquad = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{t \in [a,b] \cap \mathbb{Q}} \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, |W_t(\omega)| \geqslant \frac{1}{n}\right\} \cap F.
\end{aligned}$$

Mivel $[a,b]\cap\mathbb{Q}$ megszámlálható és minden $t\geqslant 0$, $n\in\mathbb{N}$-re $\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, |W_t(\omega)|\geqslant \frac{1}{n}\right\}$ esemény kapjuk, hogy

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{t\in[a,b]\cap\mathbb{Q}}\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, |W_t(\omega)|\geqslant \frac{1}{n}\right\}\cap F\in\mathcal{A}.$$

Ezzel megmutattuk, hogy A esemény. Legyen $U:[0,+\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}$,

$$(t,\omega)\mapsto U(t,\omega):=U_t(\omega):=W_a(\omega)-W_{a+t}(\omega).$$

Legyen $I:=[0,b-a]$ és $X:\Omega\to\mathbb{R}$, $\omega\mapsto X(\omega):=\sup_{s\in I}U_s(\omega)$. Annak indoklása, hogy X valószínűségi változó az 1.4.23. Megjegyzésben látottakhoz hasonlóan történhet. Most egy másik, mértékelméleti ismeretekre támaszkodó indoklást közlünk. Felhasználva a standard Wiener-folyamat trajektóriáinak P-m.m.-i folytonosságát, kapjuk, hogy

$$X(\omega)=\sup_{s\in I\cap\mathbb{Q}}U_s(\omega),\quad \text{P-m.m. } \omega\in\Omega.$$

Mivel minden $t\geqslant 0$-ra U_t valószínűségi változó, felhasználva azt, hogy megszámlálható sok valószínűségi változó szuprémuma újra valószínűségi változó, kapjuk, hogy $\sup_{s\in I\cap\mathbb{Q}}U_s$ valószínűségi változó. Felidézzük az alábbi mértékelméleti tételt.

Tétel: Ha $(X,\mathcal{A},\mu)$ egy teljes mértéktér, $f,g:X\to\mathbb{R}$ függvények, hogy f $(\mathcal{A},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mérhető és $f(x)=g(x)$ μ-m.m. $x\in X$, akkor g is $(\mathcal{A},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mérhető.

Mivel az alapul vett $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mező teljes, $f=\sup_{s\in I\cap\mathbb{Q}}U_s$ és $g=X$ választással kapjuk, hogy X valószínűségi változó.

Felhasználva, hogy egy standard Wiener-folyamat (-1)-szerese is standard Wiener-folyamat, az 1.4.24. Állítás (Markov-tulajdonság) alapján kapjuk, hogy $\{U_t : t\geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat, mely független az $\mathcal{F}_a^W=\sigma(W_u : 0\leqslant u\leqslant a)$ σ-algebrától, speciálisan W_a-tól is. Megmutatjuk X is független W_a-tól. Valóban, mivel $\sigma(U_t, t\geqslant 0)$ független $\sigma(W_a)$-tól, $\{U_t : t\geqslant 0\}$ bármilyen mérhető függvénye is független lesz W_a-tól. Így $\sup_{s\in I\cap\mathbb{Q}}U_s$ független W_a-tól. (Azt direktben nem tudjuk következtetni, hogy $X=\sup_{s\in I}U_s$ független W_a-tól, mert még az sem biztos, hogy a $\omega\in\Omega\mapsto\sup_{s\in I}U_s(\omega)$ leképezés mérhető.) Bevezetve az

$$A:=\big\{\omega\in\Omega : X(\omega)=\sup_{s\in I\cap\mathbb{Q}}U_s(\omega)\big\}$$

jelölést, $A\in\mathcal{A}$ és $P(A)=1$. Legyenek $B\in\sigma(X)$ és $C\in\sigma(W_a)$ tetszőlegesek. Ekkor létezik olyan $B^*\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, hogy $B=X^{-1}(B^*)$. Így

$$\begin{aligned}
P(B\cap C)&=P(B\cap C\cap A)=P(\{X\in B^*\}\cap A\cap C)=P\big(\{\sup_{s\in I\cap\mathbb{Q}}U_s\in B^*\}\cap A\cap C\big)\\
&=P\big(\{\sup_{s\in I\cap\mathbb{Q}}U_s\in B^*\}\cap C\big)=P\big(\sup_{s\in I\cap\mathbb{Q}}U_s\in B^*\big)P(C)\\
&=P\big(\{\sup_{s\in I\cap\mathbb{Q}}U_s\in B^*\}\cap A\big)P(C)=P(\{X\in B^*\}\cap A)P(C)=P(B)P(C),
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $P(A)=1$, és $\sup_{s\in I\cap\mathbb{Q}}U_s$ független W_a-tól.

Az 1.4.32. Állítás miatt minden $\alpha > 0$ esetén

(1.4.15)
$$P(X \geqslant \alpha) = P(\max_{s\in[0,b-a]} U_s \geqslant \alpha) = P(M_{b-a} \geqslant \alpha) = 2P(U_{b-a} > \alpha) = 2P(\mathcal{N}(0, b-a) > \alpha).$$

Legyen $Y(\omega) := \sup_{s\in I}(-U_s(\omega))$, $\omega \in \Omega$. Mivel $\{-U_t : t \geqslant 0\}$ is standard Wiener-folyamat kapjuk, hogy Y-nak és X-nek az eloszlása megegyezik.

Megmutatjuk, hogy

$$\{\omega \in \Omega \,\big|\, \exists\, t \in [a,b] : W_t(\omega) = 0\} = \{\omega \in \Omega \,\big|\, \exists\, s \in [0, b-a] : U_s(\omega) = W_a(\omega)\}.$$

Ugyanis, ha $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $\exists\, t \in [a,b]$, melyre $W_t(\omega) = 0$, akkor $s := t-a \in [0, b-a]$ és

$$U_s(\omega) = W_a(\omega) - W_{a+s}(\omega) = W_a(\omega) - W_t(\omega) = W_a(\omega).$$

Ha pedig $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $\exists\, s \in [0, b-a]$, melyre $U_s(\omega) = W_a(\omega)$, akkor $t := a+s \in [a,b]$ és $W_a(\omega) - W_{a+s}(\omega) = W_a(\omega)$ miatt $W_t(\omega) = W_{a+s}(\omega) = 0$. Ezért

$$P\Big(\exists\, t \in [a,b] : W_t = 0\Big) = P\Big(\exists\, s \in [0, b-a] : U_s = W_a\Big).$$

Mivel $P(W_a = 0) = 0$ minden $a \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} P\Big(\exists\, s \in [0, b-a] : U_s = W_a\Big) &= P\Big(\exists\, s \in [0, b-a] : U_s = W_a, W_a > 0\Big) \\ &\quad + P\Big(\exists\, s \in [0, b-a] : U_s = W_a, W_a < 0\Big). \end{aligned}$$

A standard Wiener-folyamat trajektóriáinak P-m.m.-i folytonossága miatt

$$\begin{aligned} \{\exists\, s \in [0, b-a] : U_s = W_a, W_a > 0\} \cap F &= \{\max_{s\in I} U_s \geqslant W_a, W_a > 0\} \cap F, \\ \{\exists\, s \in [0, b-a] : U_s = W_a, W_a < 0\} \cap F &= \{\min_{s\in I} U_s \leqslant W_a, W_a < 0\} \cap F. \end{aligned}$$

Ugyanis, ha $\omega \in F$-re $\exists\, s \in [0, b-a] : U_s(\omega) = W_a(\omega)$ és $W_a(\omega) > 0$, akkor $\max_{s\in I} U_s(\omega) \geqslant W_a(\omega)$. Fordítva, ha $W_a(\omega) > 0$ és $\max_{s\in I} U_s(\omega) \geqslant W_a(\omega)$, akkor abban az esetben, ha $\max_{s\in I} U_s(\omega) > W_a(\omega)$ kapjuk, hogy $\exists\, s \in [0, b-a] : U_s(\omega) > W_a(\omega) > 0$ és mivel $U_0(\omega) = 0$, a Bolzano-tétel miatt $\exists\, s_0 \in [0, s] \subseteq I : U_{s_0}(\omega) = W_a(\omega)$. Abban az esetben, ha $\max_{s\in I} U_s(\omega) = W_a(\omega)$ kihasználva, hogy kompakt halmazon folytonos függvény felveszi maximumát adódik, hogy $\exists\, s_0 \in I : U_{s_0}(\omega) = W_a(\omega)$.

A

$$\{\exists\, s \in [0, b-a] : U_s = W_a, W_a < 0\} \cap F = \{\min_{s\in I} U_s \leqslant W_a, W_a < 0\} \cap F$$

egyenlőség hasonlóan igazolható. Mivel $P(F) = 1$,

$$\begin{aligned} P\Big(\exists\, s \in [0, b-a] : U_s = W_a\Big) &= P(W_a > 0, \max_{s\in I} U_s \geqslant W_a) + P(W_a < 0, \min_{s\in I} U_s \leqslant W_a) \\ &= P(0 < W_a \leqslant X) + P(W_a < 0, -\min_{s\in I} U_s \geqslant -W_a) \\ &= P(0 < W_a \leqslant X) + P(0 < -W_a \leqslant Y). \end{aligned}$$

Mivel (W_a, X) és $(-W_a, Y)$ együttes eloszlása megegyezik, valamint W_a és X, ill. $-W_a$ és Y függetlenek, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
P\Big(\exists\, t \in [a,b] : W_t = 0\Big) &= 2P(0 < W_a \leqslant X) \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{0<\alpha<x\}} f_{(W_a,X)}(\alpha, x)\,\mathsf{d}\alpha\,\mathsf{d}x \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{0<\alpha<x\}} f_{W_a}(\alpha) f_X(x)\,\mathsf{d}\alpha\,\mathsf{d}x \\
&= 2\int_{0}^{+\infty}\Big(\int_{\alpha}^{+\infty} f_X(x)\,\mathsf{d}x\Big) f_{W_a}(\alpha)\,\mathsf{d}\alpha.
\end{aligned}$$

Felhasználva (1.4.15)-t kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
P\Big(\exists\, t \in [a,b] : W_t = 0\Big) &= 2\int_0^{+\infty} 2P(\mathcal{N}(0, b-a) > \alpha)\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}e^{-\frac{\alpha^2}{2a}}\,\mathsf{d}\alpha \\
&= 4\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\frac{1}{\sqrt{2\pi(b-a)}}\int_0^{+\infty}\Big(\int_{\alpha}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2(b-a)}}\,\mathsf{d}x\Big)e^{-\frac{\alpha^2}{2a}}\,\mathsf{d}\alpha.
\end{aligned}$$

Bevezetve az $x^2/(b-a) = y^2$, majd az $\alpha^2/a = t^2$ helyettesítést adódik, hogy

$$\begin{aligned}
P\Big(\exists\, t \in [a,b] : W_t = 0\Big) &= \frac{2}{\pi\sqrt{a(b-a)}}\int_0^{+\infty}\Big(\int_{\alpha/\sqrt{b-a}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\sqrt{b-a}\,\mathsf{d}y\Big)e^{-\frac{\alpha^2}{2a}}\,\mathsf{d}\alpha \\
&= \frac{2}{\pi\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}\Big(\int_{\alpha/\sqrt{b-a}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathsf{d}y\Big)e^{-\frac{\alpha^2}{2a}}\,\mathsf{d}\alpha \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\Big(\int_{\sqrt{a}t/\sqrt{b-a}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathsf{d}y\Big)e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathsf{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\Big(\int_{\sqrt{a}t/\sqrt{b-a}}^{+\infty} e^{-\frac{(y^2+t^2)}{2}}\,\mathsf{d}y\Big)\,\mathsf{d}t.
\end{aligned}$$

Áttérve polárkoordináta-rendszerre ($y = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$)

$$\begin{aligned}
P\Big(\exists\, t \in [a,b] : W_t = 0\Big) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\Big(\int_{\arccos(\sqrt{b-a}/\sqrt{b})}^{\pi/2} 1\,\mathsf{d}\theta\Big) r e^{-\frac{r^2}{2}}\,\mathsf{d}r \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\Big(\frac{\pi}{2} - \arccos\Big(\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{b}}\Big)\Big) r e^{-\frac{r^2}{2}}\,\mathsf{d}r \\
&= \Big(\frac{2}{\pi}\arccos\Big(\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{b}}\Big) - 1\Big)\int_0^{+\infty} -r e^{-\frac{r^2}{2}}\,\mathsf{d}r \\
&= \Big(\frac{2}{\pi}\arccos\Big(\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{b}}\Big) - 1\Big)\Big[e^{-\frac{r^2}{2}}\Big]_0^{+\infty} = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos\Big(\sqrt{1-\frac{a}{b}}\Big).
\end{aligned}$$

Azt kell már csak megmutatni, hogy minden $0 < a < b$ esetén

$$1 - \frac{2}{\pi}\arccos\Big(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\Big) = \frac{2}{\pi}\arccos\Big(\sqrt{\frac{a}{b}}\Big),$$

azaz
$$\frac{\pi}{2} = \arccos\Big(\sqrt{1-\frac{a}{b}}\Big) + \arccos\Big(\sqrt{\frac{a}{b}}\Big).$$
Mindkét oldal koszinuszát véve
$$0 = \sqrt{\frac{b-a}{b}}\sqrt{\frac{a}{b}} - \sin\Big(\arccos\Big(\sqrt{1-\frac{a}{b}}\Big)\Big)\sin\Big(\arccos\Big(\sqrt{\frac{a}{b}}\Big)\Big),$$
azaz
$$0 = \frac{\sqrt{a(b-a)}}{b} - \sqrt{1-\frac{b-a}{b}}\sqrt{1-\frac{a}{b}},$$
ami pedig a $0=0$ igaz egyenlőségre vezet. A $0=0$ igaz összefüggésből, a fenti ekvivalens átalakításokat végezve a
$$\cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \cos\Big(\arccos\Big(\sqrt{1-\frac{a}{b}}\Big) + \arccos\Big(\sqrt{\frac{a}{b}}\Big)\Big)$$
összefüggéshez jutunk. Mivel $\arccos\Big(\sqrt{1-\frac{a}{b}}\Big) + \arccos\Big(\sqrt{\frac{a}{b}}\Big) \in [0,\pi)$, kapjuk, hogy
$$\frac{\pi}{2} = \arccos\Big(\sqrt{1-\frac{a}{b}}\Big) + \arccos\Big(\sqrt{\frac{a}{b}}\Big).$$
□

1.5. Markov-folyamatok

1.5.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ *folyamat* ***Markov-folyamat****, ha tetszőleges* $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t$ *időpontok és tetszőleges* $y \in \mathbb{R}$ *esetén*
$$P(\xi_t < y \,|\, \xi_{t_1} = x_1, \ldots, \xi_{t_k} = x_k) = P(\xi_t < y \,|\, \xi_{t_k} = x_k), \quad P_{\xi_{t_1},\ldots,\xi_{t_k}}\text{-m.m. } (x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k.$$
(Itt $P_{\xi_{t_1},\ldots,\xi_{t_k}}$ *a* $(\xi_{t_1},\ldots,\xi_{t_k})$ *valószínűségi vektorváltozó eloszlását jelöli az* $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ *mérhető téren.)*

1.5.2. Megjegyzés. Több könyv, és a fogalmazás egyszerűsítése véget sok esetben mi is eltekintünk a Markov-folyamat 1.5.1. Definíciójában a $P_{\xi_{t_1},\ldots,\xi_{t_k}}$-m.m. $(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k$ (ill. más esetekben a feltételben szereplő eloszlás szerinti m.m.) kiírásától. □

1.5.3. Megjegyzés. Az 1.5.1. Definíció heurisztikusan azt mondja, hogy egy sztochasztikus folyamat akkor Markov-folyamat, ha elfelejti a múltját. Az 1.5.1. Definícióban σ-algebrára vonatkozó feltételes valószínűségek szerepelnek, azaz
$$P(\xi_t < y \,|\, \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t < y\}} \,|\, \sigma(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k})) = h(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}),$$
ahol $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ megfelelő tulajdonságokkal bíró Borel-mérhető függvény. Ezzel a h függvénnyel
$$P(\xi_t < y \,|\, \xi_{t_1} = x_1, \ldots, \xi_{t_k} = x_k) = h(x_1, \ldots, x_k), \quad P_{\xi_{t_1},\ldots,\xi_{t_k}}\text{-m.m. } (x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k.$$
Ha a ξ_t-k diszkrétek, akkor a feltételes valószínűség definíciója szerint is számolhatók a fenti feltételes valószínűségek. □

1.5.4. Megjegyzés. Legyen $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ Markov-folyamat. Vezessük be tetszőleges $0 \leqslant s < t$ és $x, y \in \mathbb{R}$ esetén az

$$F(s, x, t, y) =: P(\xi_t < y \,|\, \xi_s = x)$$

függvényt. (Megjegyezzük, hogy adott $0 \leqslant s < t$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén $F(s, x, t, y)$ csak P_{ξ_s}-m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén jól definiált.) Ekkor F-et a $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ Markov-folyamat **átmenetvalószínűségi eloszlásfüggvényének** hívjuk. Be lehet látni, hogy ξ_0 eloszlása (azaz a kezdeti eloszlás) és F egyértelműen meghatározza a $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ Markov-folyamat végesdimenziós eloszlásait. (Ez annak az analógja, hogy egy diszkrét idejű Markov-láncnál a végesdimenziós eloszlásokat egyértelműen meghatározza a kezdeti eloszlás és az átmenetvalószínűségek.) Egy (részben) heurisztikus gondolatmenet a következő. Azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ és $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ esetén ξ_0 eloszlása és F egyértelműen meghatározza a $(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k})$ vektor eloszlását. Felhasználva, hogy minden $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ esetén tetszőleges $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvényre fennáll, hogy

$$\mathbb{E}g(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}) = \int_{\mathbb{R}^{k+1}} g(x_1, \ldots, x_k) F(t_{k-1}, x_{k-1}, t_k, \mathsf{d}x_k) \ldots F(0, x_0, t_1, \mathsf{d}x_1) F_{\xi_0}(\mathsf{d}x_0),$$

a $g(x) := \mathbb{1}_{\{x_1 < t_1, \ldots, x_k < t_k\}}$, $x \in \mathbb{R}^k$ választással kapjuk a dolgot. □

1.5.5. Állítás. *A $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ sztochasztikus folyamat akkor és csak akkor Markov–folyamat, ha tetszőleges $0 \leqslant s < t$ időpontok és tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ esetén*

$$P(\xi_t < y \,|\, \xi_u,\, 0 \leqslant u \leqslant s) = P(\xi_t < y \,|\, \xi_s), \quad P\text{-m.m.}$$

A bizonyításhoz szükség van a monoton osztály tételre.

Legyen Ω egy tetszőleges halmaz és tetszőleges A, $A_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, részhalmazok esetén vezessük be az

$$A_n \uparrow A \qquad \Longleftrightarrow \qquad A_1 \subset A_2 \subset \cdots, \ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

$$A_n \downarrow A \qquad \Longleftrightarrow \qquad A_1 \supset A_2 \supset \cdots, \ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A,$$

jelöléseket.

1.5.6. Definíció. *Legyen Ω egy nemüres halmaz. Ekkor Ω részhalmazainak egy $\mathcal{C}$ rendszerét* ***monoton osztálynak*** *nevezzük, ha zárt a monoton határértékképzésre, azaz ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{C}$, és $A_n \uparrow A$ vagy $A_n \downarrow A$, akkor $A \in \mathcal{C}$.*

1.5.7. Megjegyzés. Minden σ-algebra monoton osztály, megfordítva azonban nem igaz.

1.5.8. Tétel. (Monoton osztály tétel) *Legyen Ω egy nemüres halmaz. Legyen $\mathcal{H}$ az Ω részhalmazainak egy halmazalgebrája. Legyen $\mathcal{C}$ az Ω részhalmazainak egy monoton osztálya, melyre $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}$. Ekkor $\sigma(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{C}$. (Az is igaz, hogy $\sigma(\mathcal{H})$ megegyezik a $\mathcal{H}$ halmazalgebrát tartalmazó monoton osztályok metszetével.)*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy monoton osztályok tetszőleges számosságú metszete is monoton osztály. Legyen I egy tetszőleges index halmaz és minden $i \in I$ esetén $\mathcal{C}_i$ egy, az Ω részhalmazaiból álló monoton osztály. Legyen $\widetilde{\mathcal{C}} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$. Ha $A_1, A_2, \ldots \in \widetilde{\mathcal{C}}$, és $A_n \uparrow A$ vagy $A_n \downarrow A$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $i \in I$ esetén $A_n \in \mathcal{C}_i$. Mivel $\mathcal{C}_i$ monoton osztály $A \in \mathcal{C}_i$ minden $i \in I$ esetén, így $A \in \widetilde{\mathcal{C}}$. Ezért $\widetilde{\mathcal{C}}$ monoton osztály. Tekintsük a $\mathcal{H}$ halmazalgebrát tartalmazó monoton osztályok $\mathcal{M}$ metszetét. (Ez a legszűkebb monoton osztály, mely tartalmazza a $\mathcal{H}$ halmazalgebrát.) Mivel $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}$ és $\mathcal{C}$ monoton osztály, így $\mathcal{M}$ létezik. Be fogjuk látni, hogy $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{H})$. Ez elegendő, hiszen $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}$ és $\mathcal{C}$ monoton osztály, így $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{C}$ és ezért $\sigma(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{C}$.

Rögzített $A \in \mathcal{M}$ esetén legyen

$$\mathcal{M}_A := \Big\{ B \in \mathcal{M} : A \cap B,\, A \cap \overline{B},\, \overline{A} \cap B \in \mathcal{M} \Big\}.$$

Felhasználva, hogy a $\mathcal{H}$ halmazalgebra része $\mathcal{M}$-nek és $\emptyset \in \mathcal{H}$, kapjuk, hogy $\emptyset \in \mathcal{M}$ és így $A \in \mathcal{M}_A$. Következésképpen, $\{\emptyset, A\} \subset \mathcal{M}_A$.

Megmutatjuk, hogy minden $A \in \mathcal{M}$ esetén $\mathcal{M}_A$ monoton osztály. Legyen $B_n \in \mathcal{M}_A$, $n \in \mathbb{N}$, olyan, hogy $B_n \uparrow B$ vagy $B_n \downarrow B$. Ekkor $\mathcal{M}_A$ definíciója miatt B_n, $A \cap B_n$, $A \cap \overline{B_n}$, $\overline{A} \cap B_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$. Mivel $\mathcal{M}$ monoton osztály, kapjuk, hogy $B \in \mathcal{M}$,

$$A \cap B = \begin{cases} A \cap \bigcup_{n=1}^\infty B_n = \bigcup_{n=1}^\infty A \cap B_n \in \mathcal{M} & \text{ha } B_n \uparrow B, \\ A \cap \bigcap_{n=1}^\infty B_n = \bigcap_{n=1}^\infty A \cap B_n \in \mathcal{M} & \text{ha } B_n \downarrow B, \end{cases}$$

$$A \cap \overline{B} = \begin{cases} A \cap \bigcap_{n=1}^\infty \overline{B_n} = \bigcap_{n=1}^\infty A \cap \overline{B_n} \in \mathcal{M} & \text{ha } B_n \uparrow B, \\ A \cap \bigcup_{n=1}^\infty \overline{B_n} = \bigcup_{n=1}^\infty A \cap \overline{B_n} \in \mathcal{M} & \text{ha } B_n \downarrow B, \end{cases},$$

és hasonlóan $\overline{A} \cap B \in \mathcal{M}$. Így $B \in \mathcal{M}_A$, amiből következik, hogy $\mathcal{M}_A$ monoton osztály.

Megmutatjuk, hogy $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}$. Az $\mathcal{M}_A \subseteq \mathcal{M}$ tartalmazás $\mathcal{M}_A$ definíciója miatt azonnal adódik. A másik irányú tartalmazást először $A \in \mathcal{H}$ esetén látjuk be. Belátjuk először, hogy $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}_A$. Ehhez azt kell belátni, hogy ha $B \in \mathcal{H}$, akkor $B \in \mathcal{M}$ és $A \cap B \in \mathcal{M}$, $A \cap \overline{B} \in \mathcal{M}$ valamint $\overline{A} \cap B \in \mathcal{M}$ is fennáll. Mivel $\mathcal{M}$ definíciója folytán $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}$, így $B \in \mathcal{M}$ teljesül. Mivel $\mathcal{H}$ halmazalgebra és $A, B \in \mathcal{H}$ ezért $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$ és $\overline{A} \cap B$ is benne van $\mathcal{H}$-ban és $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}$ miatt kapjuk, hogy $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}_A$. Mivel $\mathcal{M}_A$ monoton osztály és tartalmazza $\mathcal{H}$-t, $\mathcal{M}$ definíciója alapján kapjuk, hogy $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_A$, így $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}$, ha $A \in \mathcal{H}$.

Tetszőleges $B \in \mathcal{M}$ esetén a következőképpen járunk el. Megmutatjuk, hogy ekkor is fennáll, hogy $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}_B$. Legyen $A \in \mathcal{H}$ tetszőleges. Ekkor egyrészt $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}$ miatt $A \in \mathcal{M}$, másrészt az

$$\mathcal{M}_B = \Big\{ C \in \mathcal{M} : B \cap C,\, B \cap \overline{C},\, \overline{B} \cap C \in \mathcal{M} \Big\}$$

definíció alapján azt kell még belátni, hogy $B \cap A$ $B \cap \overline{A}$ és $\overline{B} \cap A$ benne vannak $\mathcal{M}$-ben. Mivel $A \in \mathcal{H}$, az előzőek miatt $\mathcal{M} = \mathcal{M}_A$, így mivel $B \in \mathcal{M}$ kapjuk, hogy $B \in \mathcal{M}_A$.

Ezért $\mathcal{M}_A$ definíciója alapján $A \cap B \in \mathcal{M}$, $A \cap \overline{B} \in \mathcal{M}$ és $\overline{A} \cap B \in \mathcal{M}$. Ezért $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}_B$. Mivel $\mathcal{M}_B$ monoton osztály és tartalmazza $\mathcal{H}$-t, $\mathcal{M}$ definíciója alapján $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_B$. Beláttuk tehát, hogy minden $A \in \mathcal{M}$ esetén $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}$.

Ebből már következik, hogy $\mathcal{M}$ halmazalgebra, hiszen ha $A, B \in \mathcal{M}$, úgy $\mathcal{M} = \mathcal{M}_A$ és $B \in \mathcal{M} = \mathcal{M}_A$ miatt $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B \in \mathcal{M}$ és nyilván $\Omega \in \mathcal{M}$ hiszen $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}$ és $\mathcal{H}$ halmazalgebra. ($\overline{A} \cap B \in \mathcal{M}$-ből $B = \Omega$ választással következik, hogy $\mathcal{M}$ tényleg zárt a komplementer képzésre.) Mivel $\mathcal{M}$ monoton osztály és a most bizonyítottak alapján halmazalgebra is, kapjuk, hogy $\mathcal{M}$ σ-algebra is, hiszen egy megszámlálható uniót fel lehet írni megszámlálható, növekvő unióként. Mivel $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}$, így $\sigma(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{M}$. Mivel a $\sigma(\mathcal{H})$ σ-algebra is monoton osztály, melyre $\mathcal{H} \subseteq \sigma(\mathcal{H})$, kapjuk, hogy $\mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{H})$, tehát valóban teljesül, hogy $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{H})$. □

Az 1.5.5. Állítás bizonyítása. Ha $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ Markov-folyamat, akkor tetszőleges $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k \leqslant s < t$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(\xi_t < y \,|\, \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}, \xi_s) = P(\xi_t < y \,|\, \xi_s), \quad P\text{-m.m.}$$

Ezért tetszőleges $A \in \sigma(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}, \xi_s)$ esetén (a feltételes várható érték definíciója alapján)

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}}\mathbb{I}_A\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}} \,|\, \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}, \xi_s)\mathbb{I}_A\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}} \,|\, \xi_s)\mathbb{I}_A\right]. \tag{1.5.1}$$

Ez az összefüggés nyilván fennáll az

$$\bigcup_{0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_k\leqslant s,\, k\in\mathbb{N}} \sigma(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}, \xi_s) \tag{1.5.2}$$

halmazalgebrára is. Az, hogy a fenti unió halmazalgebrát alkot a következőképpen látható be. Az $\emptyset$ benne van a fenti unióban, mert minden σ-algebrában benne van. Ha A eleme a fenti uniónak, akkor $\exists\, k \in \mathbb{N}$ és $\exists\ 0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leqslant s$, hogy $A \in \sigma(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}, \xi_s)$, és mivel egy σ-algebra zárt a komplementerképzésre, $\Omega \setminus A \in \sigma(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}, \xi_s)$, s ezért $\Omega \setminus A$ is eleme a fenti uniónak. Azt kell még leellenőrizni, hogy a fenti unió zárt a véges unióképzésre (elég csak azt megmutatni, hogy ha két halmaz benne van, akkor a két halmaz unióját is tartalmazza). Ha A_1 és A_2 eleme a fenti uniónak, akkor $\exists$ $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ és $\exists$ $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_{k_1} \leqslant s$, $0 \leqslant p_1 < p_2 < \cdots < p_{k_2} \leqslant s$, hogy $A_1 \in \sigma(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_{k_1}}, \xi_s)$ és $A_2 \in \sigma(\xi_{p_1}, \ldots, \xi_{p_{k_2}}, \xi_s)$. A generált σ-algebra definíciója alapján $A_1 \cup A_2 \in \sigma(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_{k_1}}, \xi_{p_1}, \ldots, \xi_{p_{k_2}}, \xi_s)$, és így $A_1 \cup A_2$ is benne van a fenti unióban.

A monoton konvergencia tétel felhasználásával megmutatjuk, hogy azok az A események, melyekre (1.5.1) teljesül monoton osztályt alkotnak. Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \ldots$ olyan események, melyekre

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}}\mathbb{I}_{A_n}) = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}} \,|\, \xi_s)\mathbb{I}_{A_n}\Big], \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.5.3}$$

és $A_n \uparrow A$ vagy $A_n \downarrow A$. Azt kell megmutatni, hogy

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}}\mathbb{I}_A) = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}} \,|\, \xi_s)\mathbb{I}_A\Big].$$

Tekintsük az $A_n \uparrow A$ esetet. Ekkor minden $\omega \in \Omega$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{(-\infty,y)}(\xi_t(\omega))\mathbb{I}_{A_n}(\omega) &\uparrow \mathbb{I}_{(-\infty,y)}(\xi_t(\omega))\mathbb{I}_A(\omega), \\ \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}} \,|\, \xi_s)(\omega)\mathbb{I}_{A_n}(\omega) &\uparrow \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}} \,|\, \xi_s)(\omega)\mathbb{I}_A(\omega). \end{aligned}$$

Mivel $\mathbb{I}_{(-\infty,y)}(\xi_t(\omega))\mathbb{I}_{A_n}(\omega) \leqslant 1$ minden $\omega \in \Omega$ esetén, kapjuk, hogy $\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}}\mathbb{I}_{A_n}) \leqslant 1$ és $\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}} \,|\, \xi_s)\mathbb{I}_{A_n}\Big) \leqslant 1$. Felhasználva azt is, hogy a kérdéses valószínűségi változók nemnegatívak a monoton konvergencia tétel segítségével kapjuk, hogy $n \to +\infty$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}}\mathbb{I}_{A_n}) &\uparrow \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}}\mathbb{I}_A), \\ \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}} \,|\, \xi_s)\mathbb{I}_{A_n}\Big) &\uparrow \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}} \,|\, \xi_s)\mathbb{I}_A\Big). \end{aligned}$$

Így (1.5.3) alapján

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}}\mathbb{I}_A) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}} \,|\, \xi_s)\mathbb{I}_A\Big).$$

Az $A_n \downarrow A$ eset hasonlóan kezelhető. Ezért a monoton osztály tétel szerint az (1.5.1) összefüggés fennáll az (1.5.2) halmazalgebra által generált σ-algebrára is. Megmutatjuk, hogy ez a σ-algebra éppen $\sigma(\xi_u : 0 \leqslant u \leqslant s)$.

Ugyanis megmutatjuk, hogy általában igaz az, ha $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ egy sztochasztikus folyamat, akkor minden $s > 0$-ra

$$\mathcal{A} := \sigma(\xi_u, 0 \leqslant u \leqslant s) = \sigma\left(\bigcup_{0\leqslant t_1<\dots<t_k\leqslant s, k\in\mathbb{N}} \sigma(\xi_{t_1},\dots,\xi_{t_k})\right) := \mathcal{K}. \tag{1.5.4}$$

Mivel minden $s > 0$-ra

$$\begin{aligned} \sigma(\xi_u, 0 \leqslant u \leqslant s) &= \sigma(\xi_u^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), 0 \leqslant u \leqslant s), \\ \sigma(\xi_u) &= \{\xi_u^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}, \quad 0 \leqslant u \leqslant s, \end{aligned}$$

és minden $0 \leqslant u \leqslant s$-re ($k = 1$ és $t_1 = u$ választással)

$$\sigma(\xi_u) \subseteq \bigcup_{0\leqslant t_1<\dots<t_k\leqslant s, k\in\mathbb{N}} \sigma(\xi_{t_1},\dots,\xi_{t_k}) \subseteq \mathcal{K},$$

kapjuk, hogy

$$\bigcup_{0\leqslant u\leqslant s} \Big\{\xi_u^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\Big\} \subseteq \mathcal{K}.$$

A generált σ-algebra definíciója alapján kapjuk, hogy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}$. Mivel minden $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant t_1 < \dots < t_k \leqslant s$ esetén

$$\sigma(\xi_{t_1},\dots,\xi_{t_k}) \subseteq \sigma(\xi_u, 0 \leqslant u \leqslant s),$$

kapjuk, hogy

$$\bigcup_{0\leqslant t_1<\dots<t_k\leqslant s, k\in\mathbb{N}} \sigma(\xi_{t_1},\dots,\xi_{t_k}) \subseteq \mathcal{A}.$$

A generált σ-algebra definíciója alapján kapjuk, hogy $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$. Így adódik (1.5.4). Ezért a feltételes várható érték definíciója alapján valóban teljesül, hogy

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}} \,|\, \xi_u,\, 0 \leqslant u \leqslant s) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}} \,|\, \xi_s).$$

Megfordítva, ha $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ olyan folyamat, melyre teljesül az állításbeli feltétel, akkor tetszőleges $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sigma(\xi_{t_k}) \subseteq \sigma(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_k}) \subseteq \sigma(\xi_u,\, 0 \leqslant u \leqslant t_k)$$

és

$$P(\xi_t < y \,|\, \xi_u,\, 0 \leqslant u \leqslant t_k) = P(\xi_t < y \,|\, \xi_{t_k}), \quad P\text{-m.m.} \tag{1.5.5}$$

Ez utóbbi egyenlőség két oldalán álló valószínűségi változóknak vegyük a $\sigma(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k})$ σ-algebrára vonatkozó feltételes várható értékét. Emlékeztetünk itt egy valószínűségszámítás 2.-ből tanult állításra miszerint, ha η olyan valószínűségi változó, hogy $\mathbb{E}|\eta| < +\infty$, akkor minden $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{A}$ rész-σ-algebrák esetén

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta \,|\, \mathcal{F}_2) \,|\, \mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta \,|\, \mathcal{F}_1) \,|\, \mathcal{F}_2) = \mathbb{E}(\eta \,|\, \mathcal{F}_1).$$

Felhasználva, hogy (1.5.5) alapján

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}} \,|\, \xi_u,\, 0 \leqslant u \leqslant t_k) \,|\, \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}} \,|\, \xi_{t_k}) \,|\, \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}\Big),$$

kapjuk az előbb idézett valség 2-es állítást használva, hogy

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}} \,|\, \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t<y\}} \,|\, \xi_{t_k}).$$

Ebből következik, hogy

$$P(\xi_t < y \,|\, \xi_{t_1} = x_1, \ldots, \xi_{t_k} = x_k) = P(\xi_t < y \,|\, \xi_{t_k} = x_k), \quad P_{\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}}\text{-m.m. } (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

$\square$

1.5.9. Állítás. *A $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ sztochasztikus folyamat akkor és csak akkor Markov-folyamat, ha tetszőleges $0 \leqslant s < t$ időpontok és tetszőleges $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos, Borel-mérhető függvény esetén*

$$\mathbb{E}(g(\xi_t) \,|\, \xi_u,\, 0 \leqslant u \leqslant s) = \mathbb{E}(g(\xi_t) \,|\, \xi_s), \quad P\text{-m.m.}$$

Bizonyítás. Ha $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ olyan sztochasztikus folyamat, mely rendelkezik az állításban megfogalmazott tulajdonsággal, akkor tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ esetén tekintsük a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \mathbb{I}_{(-\infty,y)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ függvényt. Erre alkalmazva a feltételt

$$P(\xi_t < y \,|\, \xi_u,\, 0 \leqslant u \leqslant s) = \mathbb{E}(g(\xi_t) \,|\, \xi_u,\, 0 \leqslant u \leqslant s) = \mathbb{E}(g(\xi_t) \,|\, \xi_s) = P(\xi_t < y \,|\, \xi_s), \quad \text{P-m.m.},$$

ami az 1.5.5. Állítás szerint azzal ekvivalens, hogy $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ Markov-folyamat.

Fordítva, legyen $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ Markov-folyamat. Az ún. jó halmazok módszerét használva, a Markov-tulajdonság miatt az állításbeli összefüggés teljesül az összes $g = \mathbb{I}_B$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ indikátorra. A feltételes várható érték linearitása miatt kapjuk, hogy az állításbeli összefüggés teljesül minden Borel-mérhető egyszerű (véges számosságú értékkészletű) függvényre. (Ugyanis, ha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető egyszerű függvény, akkor $\exists\ n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ diszjunkt felbontása $\mathbb{R}$-nek és $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $g = \sum_{i=1}^n y_i \mathbb{I}_{A_i}$.) A monoton konvergencia tétel felhasználásával megmutatjuk, hogy az állításbeli összefüggés teljesül minden nemnegatív, korlátos Borel–mérhető függvényre. Fel kell használnunk az alábbi mértékelméletből tanult eredményt, miszerint, ha $(X, \mathcal{A})$ egy mérhető tér és $g : X \to \mathbb{R}$ korlátos, Borel-mérhető függvény, hogy $g(x) \geqslant 0, x \in X$, akkor léteznek olyan $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ egyszerű, Borel-mérhető függvények, hogy

(i) $g(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$, $x \in X$,

(ii) $|\varphi_n(x)| \leqslant g(x)$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x)$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$,

(iv) $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X}\{|\varphi_n(x) - g(x)|\} = 0$.

Legyen tehát $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos, nemnegatív Borel-mérhető függvény, ekkor léteznek $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ egyszerű, Borel-mérhető függvények az előző tulajdonságokkal. Így minden $\omega \in \Omega$ esetén $\varphi_n(\xi_t(\omega)) \uparrow g(\xi_t(\omega))$ és $0 \leqslant \varphi_n(\xi_t(\omega)) \leqslant g(\xi_t(\omega))$. Mivel g korlátos, így $\mathbb{E}|\varphi_n(\xi_t)| < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ és $\mathbb{E}|g(\xi_t)| < +\infty$. Mindezek alapján a feltételes várható értékre vonatkozó monoton konvergencia tétel alkalmazható és kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\varphi_n(\xi_t) \,|\, \xi_u, 0 \leqslant u \leqslant s) \uparrow \mathbb{E}(g(\xi_t) \,|\, \xi_u, 0 \leqslant u \leqslant s) \qquad \text{P-m.m.},$$
$$\mathbb{E}(\varphi_n(\xi_t) \,|\, \xi_s) \uparrow \mathbb{E}(g(\xi_t) \,|\, \xi_s) \qquad \text{P-m.m.}$$

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$-re $\mathbb{E}(\varphi_n(\xi_t) \,|\, \xi_u, 0 \leqslant u \leqslant s) = \mathbb{E}(\varphi_n(\xi_t) \,|\, \xi_s)$ P-m.m., és megszámlálható sok 1-valószínűségű esemény metszete is 1-valószínűségű esemény kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(g(\xi_t) \,|\, \xi_u, 0 \leqslant u \leqslant s) = \mathbb{E}(g(\xi_t) \,|\, \xi_s) \quad \text{P-m.m.}$$

Ha g tetszőleges korlátos, Borel-mérhető függvény, akkor a $g = g^+ - g^-$ felbontást tekintve (ahol g^+ ill. g^- a g függvény pozitív ill. negatív része) kapjuk a dolgot, hiszen g^+ és g^- már korlátos, nemnegatív Borel-mérhető függvények. □

1.5.10. Állítás. *Legyen* $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ *egy független növekményű sztochasztikus folyamat. Ekkor* $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ *Markov-folyamat és az átmenetvalószínűségek a következő módon számolhatók, bármilyen* $0 \leqslant s < t$ *és* $y \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$P(\xi_t < y \,|\, \xi_s = x) = P(\xi_t - \xi_s < y - x), \quad P_{\xi_s}\text{-m.m. } x \in \mathbb{R}.$$

(Azaz a független növekményű sztochasztikus folyamatok Markov-folyamatok.)

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy tetszőleges $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t$ esetén

$$\sigma(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_k}) = \sigma(\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}). \tag{1.5.6}$$

Vezessük be tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén a $\zeta := (\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k})$ és az $\eta := (\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}})$ jelöléseket. Ekkor léteznek olyan $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ Borel-mérhető függvények, hogy $\eta = g(\zeta)$ és $\zeta = h(\eta)$. (A g és h függvények választhatók lineáris transzformációknak, s mivel a lineáris transzformációk folytonosak, így Borel-mérhetőek is.) Ezért

$$\begin{aligned}
\sigma(\zeta) &= \{\zeta^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\} = \Big\{\{\omega \in \Omega : \zeta(\omega) \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\Big\} \\
&= \Big\{\{\omega \in \Omega : h(\eta(\omega)) \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\Big\} = \Big\{\{\omega \in \Omega : \eta(\omega) \in h^{-1}(B)\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\Big\} \\
&= \Big\{\{\omega \in \Omega : \omega \in \eta^{-1}(h^{-1}(B))\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\Big\} = \{\eta^{-1}(h^{-1}(B)), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\} \subseteq \sigma(\eta),
\end{aligned}$$

hiszen h Borel-mérhetősége miatt $h^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ és mivel η valószínűségi vektorváltozó, így $\eta^{-1}(h^{-1}(B))$ benne van az η által generált σ-algebrában. Így $\sigma(\zeta) \subseteq \sigma(\eta)$ és hasonlóan látható be, hogy $\sigma(\eta) \subseteq \sigma(\zeta)$.

Most megmutatjuk, hogy tetszőleges $0 \leqslant s < t$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(\xi_t < y \,|\, \xi_s = x) = P(\xi_t - \xi_s < y - x), \quad P_{\xi_s}\text{-m.m. } x \in \mathbb{R}.$$

Mivel $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ független növekményű folyamat, $\xi_t - \xi_s$ és $\xi_s - \xi_0 = \xi_s$ függetlenek. Felhasználjuk azt a valószínűségszámítás 2-ből tanult állítást, hogy ha $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan Borel-mérhető függvény, hogy $\mathbb{E}|\xi g(\eta)| < +\infty$, akkor

$$\mathbb{E}(\xi g(\eta) \,|\, \eta = x) = g(x)\mathbb{E}(\xi \,|\, \eta = x), \quad P_\eta\text{-m.m. } x \in \mathbb{R}.$$

Továbbá, ha ξ és η függetlenek és $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan Borel-mérhető függvény, hogy $\mathbb{E}|f(\xi, \eta)| < +\infty$, akkor

$$\mathbb{E}(f(\xi, \eta) \,|\, \eta = x) = \mathbb{E}f(\xi, x), \quad P_\eta\text{-m.m. } x \in \mathbb{R}.$$

Ez alapján a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(z) = \mathbb{I}_{\{x\}}(z)$ választással kapjuk, hogy P_{ξ_s}-m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll, hogy

$$\begin{aligned}
P(\xi_t < y \,|\, \xi_s = x) &= \mathbb{I}_{\{x\}}(x) P(\xi_t < y \,|\, \xi_s = x) \\
&= \mathbb{I}_{\{x\}}(x)\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\xi_t < y\}} \,|\, \xi_s = x) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{x\}}(\xi_s)\mathbb{I}_{(-\infty, y)}(\xi_t) \,|\, \xi_s = x).
\end{aligned}$$

Mivel minden $\omega \in \Omega$ esetén

$$\mathbb{I}_{\{x\}}(\xi_s(\omega))\mathbb{I}_{(-\infty,y)}(\xi_t(\omega)) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \xi_s(\omega) = x \text{ és } \xi_t(\omega) < y, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

kapjuk, hogy P_{ξ_s}-m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll, hogy

$$\begin{aligned}
P(\xi_t < y \,|\, \xi_s = x) &= P(\xi_t < y, \xi_s = x \,|\, \xi_s = x) = P(\xi_t - \xi_s < y - x, \xi_s = x \,|\, \xi_s = x) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{x\}}(\xi_s)\mathbb{I}_{(-\infty, y-x)}(\xi_t - \xi_s) \,|\, \xi_s = x).
\end{aligned}$$

Mivel $\xi_t - \xi_s$ független ξ_s-től, az előbb idézett állítás alapján kapjuk, hogy P_{ξ_s}-m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{x\}}(\xi_s)\mathbb{I}_{(-\infty,y-x)}(\xi_t - \xi_s) \,|\, \xi_s = x) &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{x\}}(x)\mathbb{I}_{(-\infty,y-x)}(\xi_t - \xi_s)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{(-\infty,y-x)}(\xi_t - \xi_s)) = P(\xi_t - \xi_s < y - x).\end{aligned}$$

Tekintsünk tetszőleges $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t$ időpontokat és $y, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ számokat. Mivel $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ független növekményű folyamat, (1.5.6) alapján $\xi_t - \xi_{t_k}$ és $\sigma(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_k})$ függetlenek. Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy $P_{\xi_{t_1},\ldots,\xi_{t_k}}$-m.m. $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ esetén fennáll, hogy

$$\begin{aligned}P(\xi_t < y \,|\, \xi_{t_1} = x_1, \ldots, \xi_{t_k} = x_k) &= P(\xi_t - \xi_{t_k} < y - x_k, \xi_{t_k} = x_k \,|\, \xi_{t_1} = x_1, \ldots, \xi_{t_k} = x_k) \\ &= P(\xi_t - \xi_{t_k} < y - x_k) = P(\xi_t < y \,|\, \xi_{t_k} = x_k),\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy $P(\xi_t < y \,|\, \xi_s = x) = P(\xi_t - \xi_s < y - x)$-et már beláttuk. Így kapjuk, hogy $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ Markov-folyamat. □

1.5.11. Állítás. *A független, stacionárius növekményű sztochasztikus folyamatok Markov-folyamatok és az átmenetvalószínűségek a következő módon számolhatók: bármilyen $0 \leqslant s < t$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén*

$$P(\xi_t < y \,|\, \xi_s = x) = P(\xi_{t-s} < y - x), \quad P_{\xi_s}\text{-m.m. } x \in \mathbb{R}.$$

(Ilyenkor azt is mondják, hogy az átmenetvalószínűségek időhomogének, stacionáriusak.)

Bizonyítás. Az 1.5.10. Állítás és a stacionárius növekményűség alapján P_{ξ_s}-m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll, hogy

$$P(\xi_t < y \,|\, \xi_s = x) = P(\xi_t - \xi_s < y - x) = P(\xi_{t-s} - \xi_0 < y - x) = P(\xi_{t-s} < y - x).$$

□

Tehát például egy $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat Markov-folyamat, hiszen független, stacionárius növekményű. És így az átmenetvalószínűségi függvénye tetszőleges $0 \leqslant s < t$, $y \in \mathbb{R}$ és a Lebesgue-mérték szerint m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}P(W_t < y \,|\, W_s = x) &= P(W_{t-s} < y - x) = P(x + W_{t-s} < y) \\ &= P(\mathcal{N}(x, t-s) < y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{y} \exp\left\{ -\frac{(u-x)^2}{2(t-s)} \right\} du.\end{aligned}$$

Ezért minden $0 \leqslant s < t$, $y \in \mathbb{R}$ és a Lebesgue-mérték szerint m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll, hogy

$$f_{W_t \,|\, W_s}(y \,|\, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{ -\frac{(y-x)^2}{2(t-s)} \right\},$$

hiszen $f_{W_t\,|\,W_s}$ egy olyan függvény, amire bármilyen $y \in \mathbb{R}$ és a Lebesgue-mérték szerint m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll, hogy

$$P(W_t < y \,|\, W_s = x) = \int_{-\infty}^{y} f_{W_t\,|\,W_s}(u \,|\, x)\,\mathrm{d}u.$$

Azaz $W(t)$ feltételes eloszlása a $W(s) = x$ feltételre nézve $\mathcal{N}(x, t-s)$. (Ez összhangban van azzal, hogy a $W(t) - W(s)$ növekmény feltételes eloszlása a $W(s) = x$ feltételre nézve $\mathcal{N}(0, t-s)$, amely nem függ x-től.)

1.6. Martingálok

1.6.1. Definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{F})$ egy mérhető tér. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}$ rész-σ-algebráinak egy $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ serege filtráció $(\Omega, \mathcal{F})$-en, ha $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ minden $0 \leqslant s < t < +\infty$ esetén (monotonitás). Vezessük be az $\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{t\geqslant 0} \mathcal{F}_t\right)$ jelölést.*

1.6.2. Definíció. *Legyen $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ egy sztochasztikus folyamat $(\Omega, \mathcal{F})$-en, legyen továbbá tetszőleges $t \geqslant 0$ esetén*

$$\mathcal{F}_t^\xi := \sigma(\xi_s, 0 \leqslant s \leqslant t).$$

Megmutatható, hogy $\{\mathcal{F}_t^\xi, t \geqslant 0\}$ filtráció $(\Omega, \mathcal{F})$-en (lásd a következő megjegyzés (i) részét). Ezt a filtrációt a $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ folyamat által generált filtrációnak nevezzük.

1.6.3. Megjegyzés. (i): Végiggondoljuk, hogy $\{\mathcal{F}_t^\xi, t \geqslant 0\}$ valóban filtráció. Tetszőleges $0 \leqslant s < t$ esetén, (1.5.4) alapján,

$$\mathcal{F}_t^\xi = \sigma(\xi_u, 0 \leqslant u \leqslant t) = \sigma\left(\bigcup_{0\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant t, k\in\mathbb{N}} \sigma(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k})\right),$$

$$\mathcal{F}_s^\xi = \sigma(\xi_u, 0 \leqslant u \leqslant s) = \sigma\left(\bigcup_{0\leqslant v_1<\cdots<v_\ell\leqslant s, \ell\in\mathbb{N}} \sigma(\xi_{v_1}, \ldots, \xi_{v_\ell})\right).$$

Mivel

$$\bigcup_{0\leqslant v_1<\cdots<v_\ell\leqslant s, \ell\in\mathbb{N}} \sigma(\xi_{v_1}, \ldots, \xi_{v_\ell}) \subset \bigcup_{0\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant t, k\in\mathbb{N}} \sigma(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k}),$$

kapjuk, hogy $\mathcal{F}_s^\xi \subset \mathcal{F}_t^\xi$, ha $0 \leqslant s \leqslant t$.

(ii): Könnyen látható, hogy $\mathcal{F}_t^\xi$ az a legszűkebb σ-algebra, melyre nézve ξ_s mérhető minden $0 \leqslant s \leqslant t$ esetén. □

1.6.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ sztochasztikus folyamat adaptált az $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ filtrációra nézve, ha ξ_t $\mathcal{F}_t$-mérhető valószínűségi változó minden $t \geqslant 0$ esetén.*

A következőkben legyen $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ egy valós értékű, az $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ filtrációra nézve adaptált sztochasztikus folyamat egy $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn, melyre $\mathbb{E}|\xi_t| < +\infty$ minden $t \geqslant 0$-ra. Ezt a továbbiakban $\{\xi_t, \mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ módon fogjuk jelölni.

1.6.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $\{\xi_t, \mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ *sztochasztikus folyamat szubmartingál (szupermartingál), ha minden* $0 \leqslant s < t < +\infty$ *esetén*

$$\mathbb{E}(\xi_t \,|\, \mathcal{F}_s) \geqslant \xi_s \quad P\text{-}m.m. \quad (\mathbb{E}(\xi_t \,|\, \mathcal{F}_s) \leqslant \xi_s \quad P\text{-}m.m.).$$

Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_t, \mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ *sztochasztikus folyamat martingál, ha szubmartingál és szupermartingál is, azaz minden* $0 \leqslant s < t < +\infty$ *esetén*

$$\mathbb{E}(\xi_t \,|\, \mathcal{F}_s) = \xi_s \quad P\text{-}m.m. \tag{1.6.1}$$

1.6.6. Megjegyzés. (i): A martingál az ,,igazságos játék” egy modellje.

(ii): A martingál eredetileg a lónak az a szíja, ami a szája és a hasa között van, és megakadályozza, hogy túl magasra tudja emelni a fejét (felágaskodjon). (Ezenkívül állítólag, ha lentebb tartja a fejét a ló, akkor gyorsabban tud menni.) Az 1.6.10. Tétel (iii) állítása heurisztikusan a fent mondottakat szimbolizálja, innen ered állítólag a martingál elnevezés. □

Ha $\{\xi_t, \mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ martingál, akkor az (1.6.1) egyenlet mindkét oldalának várható értékét véve kapjuk, hogy tetszőleges $0 \leqslant s < t$ esetén $\mathbb{E}\xi_t = \mathbb{E}\xi_s$, így $\mathbb{E}\xi_t = \mathbb{E}\xi_0$, $t \geqslant 0$.

1.6.7. Megjegyzés. Tekintsünk egy $\{\xi_t, \mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ szubmartingált és legyen ξ_∞ egy $\mathcal{F}_\infty$-mérhető valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}|\xi_\infty| < +\infty$. Ha tetszőleges $0 \leqslant t < +\infty$ esetén

$$\mathbb{E}(\xi_\infty \,|\, \mathcal{F}_t) \geqslant \xi_t \quad \text{P-}m.m.,$$

akkor heurisztikusan mondhatjuk azt, hogy $\{\xi_t, \mathcal{F}_t : 0 \leqslant t \leqslant \infty\}$ is egy szubmartingál ξ_∞ ún. végső elemmel. Hasonló konvencióval élhetünk szupermartingálok, ill. martingálok esetén is. □

1.6.8. Állítás. *Legyen* $\{\xi_t = (\xi_t^{(1)}, \dots, \xi_t^{(d)}), \mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ *martingálok d-dimenziós vektora és* $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *konvex függvény, melyre* $\mathbb{E}|\varphi(\xi_t)| < \infty$ *minden* $t \geqslant 0$*-ra. Ekkor* $\{\varphi(\xi_t), \mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ *szubmartingál, speciálisan* $\{\|\xi_t\|, \mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ *szubmartingál.*

A 2.3.1. Feladatban $d = 1$ esetben igazoljuk az 1.6.8. Állítást.

1.6.9. Állítás. *Ha a* $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ *folyamat független növekményű és* $\mathbb{E}|\xi_t| < +\infty$ *tetszőleges* $t \geqslant 0$ *esetén, akkor* $\{\xi_t - \mathbb{E}\xi_t, \mathcal{F}_t^\xi : t \geqslant 0\}$ *martingál.*

Bizonyítás. Nyilván $\{\xi_t - \mathbb{E}\xi_t, : t \geqslant 0\}$ is független növekményű, ezért elegendő azt az esetet vizsgálni, amikor $\mathbb{E}\xi_t = 0$ tetszőleges $t \geqslant 0$ esetén.

Az 1.5.10. Állítás bizonyításában beláttuk, hogy tetszőleges $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k \leqslant s < t$ esetén $\xi_t - \xi_s$ és $\sigma(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_k})$ függetlenek, ezért (1.5.4) alapján $\xi_t - \xi_s$ és $\sigma(\xi_u, 0 \leqslant u \leqslant s)$ is függetlenek (a 2.3.2. Feladat (i) részének megoldásában ezt részletesebben is kifejtjük standard Wiener-folyamat esetén). Így P-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén

$$\mathbb{E}(\xi_t \,|\, \xi_u, 0 \leqslant u \leqslant s) = \mathbb{E}(\xi_t - \xi_s \,|\, \xi_u, 0 \leqslant u \leqslant s) + \mathbb{E}(\xi_s \,|\, \xi_u, 0 \leqslant u \leqslant s) = \mathbb{E}(\xi_t - \xi_s) + \xi_s = \xi_s.$$

□

Fontosak a szubmartingálokra vonatkozó ún. alap-egyenlőtlenségek.

1.6.10. Tétel. *Legyen* $\{\xi_t, \mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ *egy szubmartingál, melynek minden trajektóriája jobbról folytonos. Legyen továbbá* $[\sigma, \tau]$ *részintervalluma* $[0, +\infty)$*-nek és* $\lambda > 0$ *valós szám. Ekkor igazak a következők:*

(i) **Első szubmartingál egyenlőtlenség:**

$$\lambda P\big(\sup_{\sigma \leqslant t \leqslant \tau} \xi_t \geqslant \lambda\big) \leqslant \mathbb{E}\xi_\tau^+,$$

ahol $\xi_\tau^+ := \max\{\xi_\tau, 0\}$ ξ_τ *pozitív részét jelöli,*

(ii) **Második szubmartingál egyenlőtlenség:**

$$\lambda P\big(\inf_{\sigma \leqslant t \leqslant \tau} \xi_t \leqslant -\lambda\big) \leqslant \mathbb{E}\xi_\tau^+ - \mathbb{E}\xi_\sigma,$$

(iii) **Doob-féle maximál-egyenlőtlenség:** *Ha még az is igaz, hogy minden* $t \geqslant 0$ *esetén* $\xi_t \geqslant 0$ *P-m.m., akkor minden olyan* $p > 1$*-re, melyre* $\mathbb{E}\xi_\tau^p < +\infty$ *teljesül, kapjuk, hogy*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{\sigma \leqslant t \leqslant \tau} \xi_t\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\xi_\tau^p.$$

(iv) **A trajektóriák regularitása:** *P-m.m.* $\omega \in \Omega$*-ra a* $\{\xi_t(\omega), t \geqslant 0\}$ *trajektóriák kompakt intervallumokon korlátosak és* $(0, \infty)$*-en léteznek a baloldali határértékek (a jobboldali határértékek nyilván léteznek, hiszen feltételünk alapján a trajektóriák jobbról folytonosak).*

1.7. Poisson-folyamat

1.7.1. Megjegyzés. Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ sztochasztikus folyamat **számláló folyamat**, ha ξ_t interpretálható úgy, mint a t időpontig bekövetkező bizonyos ,,események" száma valamilyen kísérletben.

1.7.2. Példa. Az alábbiakban példákat mutatunk számláló folyamatra.

(i) Jelölje ξ_t a t időpontig egy adott áruházba betérő emberek számát. Ekkor $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ számláló folyamat, ahol egy vásárlónak az áruházba történő belépése felel meg egy eseménynek. Ha ξ_t a t időpontban az áruházban levő emberek számát jelölné, akkor $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ nem lenne számláló folyamat.

(ii) Jelölje ξ_t a t időpontig egy adott meccsen a találatok számát. Ekkor $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ számláló folyamat, ahol az felel meg egy eseménynek, mikor gól születik.

Az egyik legfontosabb számláló folyamat az ún. Poisson-folyamat.

1.7.3. Definíció. *Legyen* $\lambda > 0$ *és legyenek* $\eta_1, \eta_2, \ldots$ *független,* λ *paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Legyen* $T_k := \eta_1 + \cdots + \eta_k$, $k \in \mathbb{N}$, *és* $T_0 := 0$. *Legyen*

$$\xi_t := \max\{k \in \mathbb{Z}_+ : T_k \leqslant t\}, \qquad t \geqslant 0.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ $\boldsymbol{\lambda}$ ***paraméterű Poisson-folyamat***. *(Itt* $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$.*)*

1.7.4. Megjegyzés. Nyilván, $P(\xi_0 = 0) = 1$, hiszen $T_0 = 0$ és $k \geqslant 1$ esetén $P(T_k = 0) = 0$, ugyanis $k \geqslant 1$ esetén T_k abszolút folytonos eloszlású. □

1.7.5. Állítás. *A* $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ *folyamat akkor és csak akkor* λ *paraméterű Poisson-folyamat, ha*

(i) *független, stacionárius növekményű,*

(ii) *tetszőleges* $0 \leqslant s < t$ *időpontok esetén* $\xi_t - \xi_s \sim Poiss(\lambda(t - s))$,

(iii) *a* $[0, \infty) \ni t \mapsto \xi_t$ *trajektóriák jobbról folytonosak.*

Bizonyítás. Ha $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ λ paraméterű Poisson-folyamat, akkor $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{k+1}$ függetlensége miatt

$$\begin{aligned}
P(\xi_t = k) &= P(\eta_1 + \cdots + \eta_k \leqslant t < \eta_1 + \cdots + \eta_k + \eta_{k+1}) \\
&= \underset{\substack{x_1+\cdots+x_k \leqslant t < x_1+\cdots+x_k+x_{k+1} \\ x_1,\ldots,x_{k+1} \geqslant 0}}{\int \cdots \int} \lambda^{k+1} e^{-\lambda(x_1+\cdots+x_k+x_{k+1})} \, dx_1 \ldots dx_k \, dx_{k+1}.
\end{aligned}$$

Kiintegrálva az x_{k+1} változó szerint (az integrálási tartományon $t - x_1 - \cdots - x_k \geqslant 0$):

$$\int_{t-x_1-\cdots-x_k}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x_{k+1}} \, dx_{k+1} = e^{-\lambda(t-x_1-\ldots-x_k)},$$

így

$$P(\xi_t = k) = \underset{\substack{x_1+\cdots+x_k \leqslant t \\ x_1,\ldots,x_k \geqslant 0}}{\int \cdots \int} \lambda^k e^{-\lambda t} \, dx_1 \ldots dx_k.$$

Ha bevezetjük az $y_j := x_1 + \cdots + x_j$, $j = 1, \ldots, k$ új változókat, akkor a transzformáció Jacobi-determinánsa 1. Ugyanis,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix},$$

és így

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}.$$

Ezért a transzformáció Jacobi-determinánsa

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Így

$$\int\limits_{\substack{x_1+\cdots+x_k\leqslant t \\ x_1,\ldots,x_k\geqslant 0}} \cdots \int dx_1 \ldots dx_k = \int\limits_{0\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant\ldots\leqslant y_k\leqslant t} \cdots \int dy_1 \ldots dy_k.$$

Nyilván az $1, 2, \ldots, k$ számok tetszőleges $i_1, i_2, \ldots, i_k$ permutációja esetén

$$\int\limits_{0\leqslant y_{i_1}\leqslant y_{i_2}\leqslant\ldots\leqslant y_{i_k}\leqslant t} \cdots \int dy_1 \ldots dy_k = \int\limits_{0\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant\ldots\leqslant y_k\leqslant t} \cdots \int dy_1 \ldots dy_k.$$

Ugyanis, vezessük be az

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

helyettesítést, ahol A olyan mátrix, melynek ℓ-edik sorában az i_ℓ-edik elem 1, a többi pedig 0 $(\ell = 1, \ldots, k)$. Mivel $i_1, \ldots, i_k$ egy permutációja az $1, \ldots, k$ számoknak, kapjuk, hogy A determinánsa $(-1)^{I(i_1,\ldots,i_k)}$, ahol $I(i_1, \ldots, i_k)$ az $i_1, \ldots, i_k$ permutáció összes inverzióinak a számát jelöli. Így a transzformáció Jacobi-determinánsának abszolútértéke 1 és az integrálási tartomány is megfelelően alakul. Tekintve az $1, \ldots, k$ számok összes $i_1, \ldots, i_k$ permutációját, az ezekre vonatkozó, fenti típusú integráloknak az összege éppen a t élhosszúságú k-dimenziós kocka térfogata, s mivel minden ilyen integrál egymással egyenlő adódik, hogy

$$\int\limits_{0\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant\ldots\leqslant y_k\leqslant t} \cdots \int dy_1 \ldots dy_k = \frac{t^k}{k!}.$$

Tehát végülis

$$P(\xi_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

azaz $\xi_t \sim \mathrm{Poiss}(\lambda t)$.

Tetszőleges $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ és $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_n$ esetén, $\eta_1, \eta_2, \ldots$ függetlensége alapján

$$\begin{aligned}
&P(\xi_{t_1} = k_1,\, \xi_{t_2} = k_2, \ldots, \xi_{t_n} = k_n) = P(T_{k_i} \leqslant t_i < T_{k_i+1}, i = 1, \ldots, n) \\
&= P(\eta_1 + \cdots + \eta_{k_i} \leqslant t_i < \eta_1 + \cdots + \eta_{k_i+1},\, i = 1, \ldots, n) \\
&= \int\limits_{\substack{x_1+\cdots+x_{k_i} \leqslant t_i < x_1+\cdots+x_{k_i+1},\, i=1,\ldots,n \\ x_1,\ldots,x_{k_n+1} \geqslant 0}} \cdots \int \lambda^{k_n+1} e^{-\lambda(x_1+\cdots+x_{k_n+1})}\, dx_1 \ldots dx_{k_n+1}.
\end{aligned}$$

Kiintegrálva az x_{k_n+1} változó szerint (az integrálási tartományon $t_n - x_1 - \cdots - x_{k_n} \geqslant 0$):

$$\int_{t_n - x_1 - \cdots - x_{k_n}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x_{k_n+1}}\, \mathsf{d}x_{k_n+1} = e^{-\lambda(t_n - x_1 - \cdots - x_{k_n})},$$

és így

$$P(\xi_{t_1} = k_1,\, \xi_{t_2} = k_2, \ldots, \xi_{t_n} = k_n) = \int\limits_{\substack{x_1+\cdots+x_{k_i} \leqslant t_i < x_1+\cdots+x_{k_i+1},\, i=1,\ldots,n-1 \\ x_1+\cdots+x_{k_n} \leqslant t_n,\, x_1,\ldots,x_{k_n} \geqslant 0}} \cdots \int \lambda^{k_n} e^{-\lambda t_n}\, dx_1 \ldots dx_{k_n}.$$

(Ha $k_{n-1} = k_n$, akkor $i = n-1$-re $t_{n-1} < x_1 + \cdots + x_{k_n+1}$ nem feltétel az előző integrálási tartományban, mert nincs integrálás x_{k_n+1} szerint.)

Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel megmutatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&P(\xi_{t_1} = k_1,\, \xi_{t_2} = k_2, \ldots, \xi_{t_n} = k_n) \\
&= \frac{t_1^{k_1} (t_2 - t_1)^{k_2 - k_1} \cdots (t_n - t_{n-1})^{k_n - k_{n-1}}}{k_1! (k_2 - k_1)! \cdots (k_n - k_{n-1})!} \lambda^{k_n} e^{-\lambda t_n}.
\end{aligned} \tag{1.7.1}$$

Tekintsük csak az $n = 2$ esetet. Vezessük be ekkor az $y_i = x_1 + \cdots + x_i$, $i = 1, \ldots, k_2$ helyettesítést. Hasonlóan az előzőekhez a transzformáció Jacobi-determinánsa 1, így

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\substack{x_1+\cdots+x_{k_1} \leqslant t_1 < x_1+\cdots+x_{k_1+1} \\ x_1+\cdots+x_{k_2} \leqslant t_2,\, x_1,\ldots,x_{k_2} \geqslant 0}} \cdots \int dx_1 \ldots dx_{k_2} &= \int\limits_{\substack{0 \leqslant y_{k_1} \leqslant t_1 < y_{k_1+1} \\ y_{k_2} \leqslant t_2,\, 0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_{k_2}}} \cdots \int dy_1 \ldots dy_{k_2} \\
&= \int\limits_{\substack{0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_{k_1} \leqslant t_1 \\ t_1 < y_{k_1+1} \leqslant y_{k_1+2} \leqslant \cdots \leqslant y_{k_2} \leqslant t_2}} \cdots \int dy_1 \ldots dy_{k_2}.
\end{aligned}$$

Külön csinálva permutációt az első k_1 darab változóra, majd a maradék $k_2 - k_1$ darab változóra kijön, hogy

$$\int\limits_{\substack{0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_{k_1} \leqslant t_1 \\ t_1 < y_{k_1+1} \leqslant y_{k_1+2} \leqslant \cdots \leqslant y_{k_2} \leqslant t_2}} \cdots \int dy_1 \ldots dy_{k_2} = \frac{t_1^{k_1}}{k_1!} \frac{(t_2 - t_1)^{k_2 - k_1}}{(k_2 - k_1)!}.$$

Ezért tetszőleges $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ és $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ nemnegatív egészek esetén

$$\begin{aligned}
&P(\xi_{t_1} = \ell_1,\, \xi_{t_2} - \xi_{t_1} = \ell_2, \ldots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}} = \ell_n) \\
&= P(\xi_{t_1} = \ell_1,\, \xi_{t_2} = \ell_1 + \ell_2, \ldots, \xi_{t_n} = \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_n) \\
&= \frac{t_1^{\ell_1}(t_2 - t_1)^{\ell_2} \cdots (t_n - t_{n-1})^{\ell_n}}{\ell_1!\ell_2! \cdots \ell_n!} \lambda^{\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_n} e^{-\lambda t_n}.
\end{aligned}$$

Speciálisan tetszőleges $0 \leqslant s < t$ esetén $\xi_t - \xi_s \sim \mathrm{Poiss}(\lambda(t-s))$, hiszen a

$$P(\xi_{t_1} = \ell_1,\, \xi_{t_2} - \xi_{t_1} = \ell_2) = \frac{t_1^{\ell_1}(t_2 - t_1)^{\ell_2}}{\ell_1!\ell_2!} \lambda^{\ell_1+\ell_2} e^{-\lambda t_2}$$

egyenlőség mindkét oldalát szummázva ℓ_1 szerint 1-től $+\infty$-ig kapjuk, hogy

$$P(\xi_{t_2} - \xi_{t_1} = \ell_2) = \frac{(t_2 - t_1)^{\ell_2}}{\ell_2!} \lambda^{\ell_2} e^{-\lambda t_2} \sum_{\ell_1=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t_1)^{\ell_1}}{\ell_1!} = \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{\ell_2}}{\ell_2!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}.$$

Ezért

$$\begin{aligned}
&P(\xi_{t_1} = \ell_1,\, \xi_{t_2} - \xi_{t_1} = \ell_2, \ldots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}} = \ell_n) \\
&= P(\xi_{t_1} = \ell_1) P(\xi_{t_2} - \xi_{t_1} = \ell_2) \cdots P(\xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}} = \ell_n).
\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy a folyamat valóban független, stacionárius növekményű.

A trajektóriák jobbról folytonossága rajz alapján könnyen látható.

Fordítva, ha $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ olyan folyamat, mely rendelkezik az állításban leírt tulajdonságokkal, akkor a trajektóriái nemnegatív egész értékű függvények, hiszen $s = 0$-val (ii)-ből látjuk, hogy $\xi_t \sim \mathrm{Poiss}(\lambda t)$. Másrészt a trajektóriák monoton növekvő függvények, mert (ii) alapján a növekmények is Poisson eloszlásúak. Legyen

$$T_k := \inf\{t \geqslant 0 : \xi_t \geqslant k\}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

és $\eta_k := T_k - T_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Ekkor (i) alapján $T_0 = 0$ és a trajektóriák monoton növekvősége miatt $\eta_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $t \geqslant 0$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{\omega \in \Omega : T_k(\omega) \leqslant t\} = \{\omega \in \Omega : \xi_t(\omega) \geqslant k\}. \tag{1.7.2}$$

Egyrészt, T_k definíciója alapján adódik, hogy

$$\{\omega \in \Omega : T_k(\omega) \leqslant t\} \supseteq \{\omega \in \Omega : \xi_t(\omega) \geqslant k\}.$$

Másrészt, ha $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $T_k(\omega) < t$, akkor mivel $T_k(\omega) = \inf\{s \geqslant 0 : \xi_s(\omega) \geqslant k\}$ adódik, hogy létezik olyan $t_1 \geqslant 0$, hogy $T_k(\omega) \leqslant t_1 < t$ és $\xi_{t_1}(\omega) \geqslant k$. Mivel a trajektóriák monoton növekvő függvények $\xi_t(\omega) \geqslant \xi_{t_1}(\omega)$, így $\xi_t(\omega) \geqslant k$. Ha $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $T_k(\omega) = t$, akkor létezik olyan $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy $t_n \downarrow t$, úgy, hogy $\xi_{t_n}(\omega) \geqslant k$, $n \in \mathbb{N}$.

Mivel a trajektóriák jobbról folytonosak $\lim_{n\to\infty} \xi_{t_n}(\omega) = \xi_t(\omega)$. Így $\xi_t(\omega) \geqslant k$. Mivel ξ_t egész értékű, így az is teljesül, hogy

$$\xi_t(\omega) = \max\{k \in \mathbb{Z}_+ : T_k(\omega) \leqslant t\},$$

ugyanis

$$\max\{k \in \mathbb{Z}_+ : T_k(\omega) \leqslant t\} = \max\{k \in \mathbb{Z}_+ : \xi_t(\omega) \geqslant k\} = \xi_t(\omega).$$

Azt kell még belátni, hogy $\eta_1, \eta_2, \ldots$ független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Először megmutatjuk, hogy $(T_1, T_2, \ldots, T_k)$ sűrűségfüggvénye

$$f_{T_1,T_2,\ldots,T_k}(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \begin{cases} \lambda^k e^{-\lambda u_k} & \text{ha } 0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_k, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Tetszőleges $0 = t_0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ esetén, (1.7.2) alapján

$$\begin{aligned} &P(T_1 \leqslant t_1,\, T_2 \leqslant t_2, \ldots, T_k \leqslant t_k) = P(\xi_{t_1} \geqslant 1,\, \xi_{t_2} \geqslant 2, \ldots, \xi_{t_k} \geqslant k) \\ &= \sum_{\substack{0 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_k \\ i_\ell \geqslant \ell,\, \ell = 1,\ldots,k}} P(\xi_{t_1} = i_1,\, \xi_{t_2} = i_2, \ldots, \xi_{t_k} = i_k), \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

és az (i),(ii) tulajdonságok alapján

$$\begin{aligned} &P(\xi_{t_1} = i_1,\, \xi_{t_2} = i_2, \ldots, \xi_{t_k} = i_k) \\ &= P(\xi_{t_1} = i_1,\, \xi_{t_2} - \xi_{t_1} = i_2 - i_1, \ldots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}} = i_k - i_{k-1}) \\ &= P(\xi_{t_1} = i_1) P(\xi_{t_2} - \xi_{t_1} = i_2 - i_1) \cdots P(\xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}} = i_k - i_{k-1}) \\ &= \frac{t_1^{i_1} (t_2 - t_1)^{i_2 - i_1} \cdots (t_k - t_{k-1})^{i_k - i_{k-1}}}{i_1! (i_2 - i_1)! \cdots (i_k - i_{k-1})!} \lambda^{i_k} e^{-\lambda t_k}. \end{aligned} \tag{1.7.4}$$

Leellenőrizzük, hogy

(1.7.5)
$$\sum_{\substack{0 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_k \\ i_\ell \geqslant \ell,\, \ell = 1,\ldots,k}} \frac{t_1^{i_1} (t_2 - t_1)^{i_2 - i_1} \cdots (t_k - t_{k-1})^{i_k - i_{k-1}}}{i_1! (i_2 - i_1)! \cdots (i_k - i_{k-1})!} \lambda^{i_k} e^{-\lambda t_k} = \int \cdots \int_{\substack{0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_k \\ u_1 \leqslant t_1, \ldots, u_k \leqslant t_k}} \lambda^k e^{-\lambda u_k} \, \mathsf{d}u_1 \ldots \mathsf{d}u_k.$$

Ha $k = 1$, úgy (1.7.5) baloldala:

$$\sum_{i_1 = 1}^{+\infty} \frac{(\lambda t_1)^{i_1}}{i_1!} e^{-\lambda t_1} = e^{-\lambda t_1} (e^{\lambda t_1} - 1) = 1 - e^{-\lambda t_1},$$

illetve (1.7.5) jobboldala:

$$\int_0^{t_1} \lambda e^{-\lambda u_1} \, \mathsf{d}u_1 = \big[- e^{-\lambda u_1} \big]_0^{t_1} = 1 - e^{-\lambda t_1}.$$

Ha $k=2$, úgy (1.7.5) baloldala:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{0\leqslant i_1\leqslant i_2\\ i_1\geqslant 1,\, i_2\geqslant 2}} \frac{t_1^{i_1}(t_2-t_1)^{i_2-i_1}}{i_1!(i_2-i_1)!}\lambda^{i_2}e^{-\lambda t_2}\\
&\qquad= \sum_{i_2=2}^{+\infty} \frac{t_1(t_2-t_1)^{i_2-1}}{(i_2-1)!}\lambda^{i_2}e^{-\lambda t_2} + \sum_{i_1=2}^{+\infty}\sum_{i_2=i_1}^{+\infty} \frac{t_1^{i_1}(t_2-t_1)^{i_2-i_1}}{i_1!(i_2-i_1)!}\lambda^{i_2}e^{-\lambda t_2}\\
&\qquad= \sum_{i_2=1}^{+\infty} \frac{t_1(t_2-t_1)^{i_2}}{i_2!}\lambda^{i_2+1}e^{-\lambda t_2} + \sum_{i_1=2}^{+\infty}\sum_{i_2=0}^{+\infty} \frac{t_1^{i_1}(t_2-t_1)^{i_2}}{i_1!i_2!}\lambda^{i_2+i_1}e^{-\lambda t_2}\\
&\qquad= t_1\lambda e^{-\lambda t_2}(e^{\lambda(t_2-t_1)}-1) + \sum_{i_1=2}^{+\infty}\frac{(t_1\lambda)^{i_1}}{i_1!}e^{-\lambda t_2}e^{\lambda(t_2-t_1)}\\
&\qquad= t_1\lambda(e^{-\lambda t_1}-e^{-\lambda t_2}) + \sum_{i_1=2}^{+\infty}\frac{(t_1\lambda)^{i_1}}{i_1!}e^{-\lambda t_1}\\
&\qquad= t_1\lambda(e^{-\lambda t_1}-e^{-\lambda t_2}) + e^{-\lambda t_1}\big(e^{\lambda t_1}-1-\lambda t_1\big) = 1-e^{-\lambda t_1}-\lambda t_1 e^{-\lambda t_2}.
\end{aligned}$$

Illetve $k=2$ esetén (1.7.5) jobboldala:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\substack{0<u_1<u_2\\ u_1\leqslant t_1,\, u_2\leqslant t_2}} \lambda^2 e^{-\lambda u_2}\,\mathsf{d}u_1\mathsf{d}u_2 &= \int_0^{t_1}\int_{u_1}^{t_2}\lambda^2 e^{-\lambda u_2}\,\mathsf{d}u_1\mathsf{d}u_2 = \int_0^{t_1}\Big[-\lambda e^{-\lambda u_2}\Big]_{u_2=u_1}^{u_2=t_2}\,\mathsf{d}u_1\\
&= \int_0^{t_1}\lambda(e^{-\lambda u_1}-e^{-\lambda t_2})\,\mathsf{d}u_1 = \Big[-e^{-\lambda u_1}-\lambda u_1 e^{-\lambda t_2}\Big]_{u_1=0}^{u_1=t_1}\\
&= 1-e^{-\lambda t_1}-\lambda t_1 e^{-\lambda t_2}.
\end{aligned}$$

A $k\geqslant 3$ esetben az alábbi módon ellenőrizhető le (1.7.5). A következő gondolatmenet Iglói Endrétől származik. Jelöljük az (1.7.5)-beli baloldali összeget S_k-val, a jobboldali integrált pedig I_k-val. Ekkor S_k és I_k is $t_1,\dots,t_k$-tól függ. Továbbá

$$\begin{aligned}
I_k &= \lambda^k\int_0^{t_1}\int_{u_1}^{t_2}\cdots\int_{u_{k-2}}^{t_{k-1}}\int_{u_{k-1}}^{t_k} e^{-\lambda u_k}\,\mathsf{d}u_k\mathsf{d}u_{k-1}\dots\mathsf{d}u_2\mathsf{d}u_1\\
&= \lambda^{k-1}\int_0^{t_1}\int_{u_1}^{t_2}\cdots\int_{u_{k-2}}^{t_{k-1}} e^{-\lambda u_{k-1}}\,\mathsf{d}u_{k-1}\dots\mathsf{d}u_2\mathsf{d}u_1\\
&\qquad\qquad - e^{-\lambda t_k}\lambda^{k-1}\int_0^{t_1}\int_{u_1}^{t_2}\cdots\int_{u_{k-2}}^{t_{k-1}} 1\,\mathsf{d}u_{k-1}\dots\mathsf{d}u_2\mathsf{d}u_1.
\end{aligned}$$

Bevezetve a

$$J_{k-1} := \int_0^{t_1}\int_{u_1}^{t_2}\cdots\int_{u_{k-2}}^{t_{k-1}} 1\,\mathsf{d}u_{k-1}\dots\mathsf{d}u_2\mathsf{d}u_1, \qquad k=2,3,\dots,$$

jelölést kapjuk, hogy

$$I_k = I_{k-1} - e^{-\lambda t_k}\lambda^{k-1}J_{k-1}, \qquad k\in\mathbb{N}. \tag{1.7.6}$$

Írjuk fel S_k-t is olyan alakban, mint az I_k-t, azaz úgy, hogy az i_k (azaz a t_k-t tartalmazó tényező) szerinti összegzés legyen a legbelső. Bevezetve a $\max(a,b) := m(a,b)$ jelölést,

$$
\begin{aligned}
S_k &= \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=m(i_1,2)}^{\infty} \cdots \sum_{i_{k-1}=m(i_{k-2},k-1)}^{\infty} \sum_{i_k=m(i_{k-1},k)}^{\infty} \frac{t_1^{i_1}(t_2-t_1)^{i_2-i_1}\cdots(t_{k-1}-t_{k-2})^{i_{k-1}-i_{k-2}}}{i_1!(i_2-i_1)!\cdots(i_{k-1}-i_{k-2})!} \\
&\qquad \times \frac{(t_k-t_{k-1})^{i_k-i_{k-1}}}{(i_k-i_{k-1})!}\lambda^{i_k}e^{-\lambda t_k} \\
&= \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=m(i_1,2)}^{\infty} \cdots \sum_{i_{k-1}=m(i_{k-2},k-1)}^{\infty} \frac{t_1^{i_1}(t_2-t_1)^{i_2-i_1}\cdots(t_{k-1}-t_{k-2})^{i_{k-1}-i_{k-2}}}{i_1!(i_2-i_1)!\cdots(i_{k-1}-i_{k-2})!} \\
&\qquad \sum_{i_k=m(i_{k-1},k)}^{\infty} \frac{(t_k-t_{k-1})^{i_k-i_{k-1}}}{(i_k-i_{k-1})!}\lambda^{i_k}e^{-\lambda t_k}.
\end{aligned}
$$

Bevezetve az

$$
A := \sum_{i_k=m(i_{k-1},k)}^{\infty} \frac{(t_k-t_{k-1})^{i_k-i_{k-1}}}{(i_k-i_{k-1})!}\lambda^{i_k} \qquad \text{jelölést,}
$$

kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{i_k-i_{k-1}=m(0,k-i_{k-1})}^{\infty} \frac{(\lambda(t_k-t_{k-1}))^{i_k-i_{k-1}}}{(i_k-i_{k-1})!}\lambda^{i_{k-1}} = \sum_{j=m(0,k-i_{k-1})}^{\infty} \frac{(\lambda(t_k-t_{k-1}))^{j}}{j!}\lambda^{i_{k-1}} \\
&= \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda(t_k-t_{k-1}))^j}{j!}\lambda^{i_{k-1}} & \text{ha} \quad i_{k-1}=k-1, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda(t_k-t_{k-1}))^j}{j!}\lambda^{i_{k-1}} & \text{ha} \quad i_{k-1}\geqslant k, \end{cases} \\
&= \begin{cases} (e^{\lambda(t_k-t_{k-1})}-1)\lambda^{i_{k-1}} & \text{ha} \quad i_{k-1}=k-1, \\ e^{\lambda(t_k-t_{k-1})}\lambda^{i_{k-1}} & \text{ha} \quad i_{k-1}\geqslant k. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Így

$$
\begin{aligned}
S_k &= \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=m(i_1,2)}^{\infty} \cdots \sum_{i_{k-1}=m(i_{k-2},k-1)}^{\infty} \frac{t_1^{i_1}(t_2-t_1)^{i_2-i_1}\cdots(t_{k-1}-t_{k-2})^{i_{k-1}-i_{k-2}}}{i_1!(i_2-i_1)!\cdots(i_{k-1}-i_{k-2})!} \\
&\qquad \times \Big(e^{-\lambda t_{k-1}}\lambda^{i_{k-1}}\mathbb{1}_{\{i_{k-1}\geqslant k\}} + (e^{-\lambda t_{k-1}}-e^{-\lambda t_k})\lambda^{i_{k-1}}\mathbb{1}_{\{i_{k-1}=k-1\}}\Big).
\end{aligned}
$$

Felhasználva, hogy

$$
\begin{aligned}
&e^{-\lambda t_{k-1}}\lambda^{i_{k-1}}\mathbb{1}_{\{i_{k-1}\geqslant k\}} + (e^{-\lambda t_{k-1}}-e^{-\lambda t_k})\lambda^{i_{k-1}}\mathbb{1}_{\{i_{k-1}=k-1\}} \\
&\qquad = e^{-\lambda t_{k-1}}\lambda^{i_{k-1}}\mathbb{1}_{\{i_{k-1}\geqslant k-1\}} - e^{-\lambda t_k}\lambda^{i_{k-1}}\mathbb{1}_{\{i_{k-1}=k-1\}},
\end{aligned}
$$

kapjuk, hogy

$$
S_k = S_{k-1} - e^{-\lambda t_k}\lambda^{k-1} \sum_{i_1=1}^{k-1} \sum_{i_2=m(i_1,2)}^{k-1} \cdots \sum_{i_{k-2}=m(i_{k-3},k-2)}^{k-1} \frac{t_1^{i_1}(t_2-t_1)^{i_2-i_1}\cdots(t_{k-1}-t_{k-2})^{i_{k-1}-i_{k-2}}}{i_1!(i_2-i_1)!\cdots(i_{k-1}-i_{k-2})!}.
$$

Bevezetve minden $k = 2, 3, \ldots,$ esetén a

$$T_{k-1} = \sum_{i_1=1}^{k-1} \sum_{i_2=m(i_1,2)}^{k-1} \cdots \sum_{i_{k-2}=m(i_{k-3},k-2)}^{k-1} \frac{t_1^{i_1}(t_2-t_1)^{i_2-i_1}\cdots(t_{k-1}-t_{k-2})^{i_{k-1}-i_{k-2}}}{i_1!(i_2-i_1)!\cdots(i_{k-1}-i_{k-2})!},$$

jelölést, kapjuk, hogy

$$S_k = S_{k-1} - e^{-\lambda t_k}\lambda^{k-1}T_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.7.7}$$

Ha megmutatjuk, hogy $J_k = T_k$, $k \in \mathbb{N}$, úgy (1.7.6) és (1.7.7) alapján teljes indukcióval befejezhető a bizonyítás. Az alábbiakban $J_k = T_k$, $k \in \mathbb{N}$, igazolásával foglalkozunk. Ismert, hogy ha $X_1, \ldots, X_n$ független, a $[0, t]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók, úgy az $X_1^*, \ldots, X_n^*$ rendezett mintára vonatkozóan, tetszőleges $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant t$ esetén

$$P\Big(X_1^* < t_1, X_2^* < t_2, \ldots, X_n^* < t_n\Big) = \frac{n!}{t^n}\int_0^{t_1}\int_{x_1}^{t_2}\cdots\int_{x_{n-1}}^{t_n} 1 \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

(Ez utóbbi tényt az 1.7.15. Tétel bizonyításában mi is megmutatjuk.) Így, ha $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, úgy $0 \leqslant \frac{t_1}{t_k} < \frac{t_2}{t_k} < \cdots < \frac{t_{k-1}}{t_k} < 1$, és

$$J_k = \frac{(t_k)^k}{k!} P\Big(X_1^* < t_1, \ldots, X_k^* < t_k\Big),$$

ahol $X_1, \ldots, X_k$ független, a $[0, t_k]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Mivel $\frac{X_1}{t_k}, \ldots, \frac{X_k}{t_k}$ független, a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók,

$$J_k = \frac{(t_k)^k}{k!} P\Big(U_1^* < \frac{t_1}{t_k}, \ldots, U_{k-1}^* < \frac{t_{k-1}}{t_k}, U_k^* < 1\Big) = \frac{(t_k)^k}{k!} P\Big(U_1^* < \frac{t_1}{t_k}, \ldots, U_{k-1}^* < \frac{t_{k-1}}{t_k}\Big),$$

ahol $U_1, \ldots, U_{k-1}, U_k$ független, a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Továbbá megmutatjuk, hogy az $U_1, \ldots, U_k$ mintát alapul véve

$$T_k = \frac{(t_k)^k}{k!} P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}\left\{\left[0, \frac{t_i}{t_k}\right)\text{-ba legalább } i \text{ mintaelem esik}\right\}\right).$$

Felhasználva, hogy

$$\left[0, \frac{t_1}{t_k}\right) \subseteq \left[0, \frac{t_2}{t_k}\right) \subseteq \cdots \subseteq \left[0, \frac{t_{k-1}}{t_k}\right),$$

kapjuk, hogy (gondoljunk a polinomiális eloszlásra)

$$\begin{aligned}
&P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}\left\{\left[0,\frac{t_i}{t_k}\right)\text{-ba legalább } i \text{ mintaelem esik}\right\}\right)\\
&=\sum_{i_1=1}^{k}\sum_{i_2=m(i_1,2)}^{k}\cdots\sum_{i_{k-1}=m(i_{k-2},k-1)}^{k}\frac{k!}{i_1!(i_2-i_1)!\cdots(i_{k-1}-i_{k-2})!(k-i_{k-1})!}\\
&\qquad\times\left(\frac{t_1}{t_k}\right)^{i_1}\left(\frac{t_2}{t_k}-\frac{t_1}{t_k}\right)^{i_2-i_1}\cdots\left(\frac{t_{k-1}}{t_k}-\frac{t_{k-2}}{t_k}\right)^{i_{k-1}-i_{k-2}}\left(1-\frac{t_{k-1}}{t_k}\right)^{k-i_{k-1}}\\
&=\frac{k!}{(t_k)^k}\sum_{i_1=1}^{k}\sum_{i_2=m(i_1,2)}^{k}\cdots\sum_{i_{k-1}=m(i_{k-2},k-1)}^{k}\frac{t_1^{i_1}(t_2-t_1)^{i_2-i_1}\cdots(t_{k-1}-t_{k-2})^{i_{k-1}-i_{k-2}}(t_k-t_{k-1})^{k-i_{k-1}}}{i_1!(i_2-i_1)!\cdots(i_{k-1}-i_{k-2})!}\\
&=\frac{k!}{(t_k)^k}T_k.
\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy az

$$P\Big(U_1^*<\frac{t_1}{t_k},\dots,U_{k-1}^*<\frac{t_{k-1}}{t_k}\Big)=P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}\left\{\left[0,\frac{t_i}{t_k}\right)\text{-ba legalább } i \text{ mintaelem esik}\right\}\right)$$

egyenlőség triviális módon igaz, kapjuk, hogy $J_k=T_k$, $k\in\mathbb{N}$. Tehát $(T_1,T_2,\dots,T_k)$ sűrűségfüggvénye valóban a megadott alakú.

Megjegyezzük (bár nem fogjuk felhasználni), fennáll az is, hogy

$$\begin{aligned}
&P(\xi_{t_1}=i_1,\,\xi_{t_2}-\xi_{t_1}=i_2-i_1,\dots,\xi_{t_k}-\xi_{t_{k-1}}=i_k-i_{k-1})\\
&=P(T_{i_j}\leqslant t_j<T_{i_j+1},\,j=1,\dots,k).
\end{aligned}$$

Ugyanis, például $k=2$-re, (1.7.2) alapján és felhasználva azt, hogy ξ_t egész értékű

$$\begin{aligned}
P(T_{i_1}\leqslant t_1<T_{i_1+1},T_{i_2}\leqslant t_2<T_{i_2+1})&=P(\xi_{t_1}\geqslant i_1,\xi_{t_1}<i_1+1,\xi_{t_2}\geqslant i_2,\xi_{t_2}<i_2+1)\\
&=P(\xi_{t_1}=i_1,\xi_{t_2}=i_2)=P(\xi_{t_1}=i_1,\xi_{t_2}-\xi_{t_1}=i_2-i_1).
\end{aligned}$$

Ezért tetszőleges $x_1,\dots,x_k\geqslant 0$ esetén

$$\begin{aligned}
P(\eta_1<x_1,\,\eta_2<x_2,\dots,\eta_k<x_k)&=P(T_1<x_1,\,T_2-T_1<x_2,\dots,T_k-T_{k-1}<x_k)\\
&=\underset{\substack{0<y_1<y_2<\dots<y_k\\ y_1<x_1,\,y_2-y_1<x_2,\dots,y_k-y_{k-1}<x_k}}{\int\cdots\int}\lambda^k e^{-\lambda y_k}\,dy_1dy_2\dots dy_k.
\end{aligned}$$

Végrehajtva az $y_i=u_1+\dots+u_i$, $i=1,\dots,k$ helyettesítést kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
P(\eta_1<x_1,\,\eta_2<x_2,\dots,\eta_k<x_k)&=\underset{0<u_j<x_j,\,j=1,\dots,k}{\int\cdots\int}\lambda^k e^{-\lambda(u_1+u_2+\dots+u_k)}\,du_1du_2\dots du_k\\
&=\prod_{j=1}^{k}\int_0^{x_j}\lambda e^{-\lambda u_j}\,\mathrm{d}u_j=\prod_{j=1}^{k}(1-e^{-\lambda x_j}),
\end{aligned}$$

amiből következik, hogy $\eta_1, \eta_2, \ldots$ valóban független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. $\Box$

Az alábbiakban az 1.7.5. Állítás egy részére teljesen független bizonyítást adunk.

1.7.6. Állítás. (Karatzas–Shreve [3], Problem 1.3.2) *Az 1.7.3. Definíció jelöléseivel élve,*

(i) *ha* $0 \leqslant s < t$, *akkor*

$$P(T_{\xi_s+1} > t \,|\, \mathcal{F}_s^\xi) = e^{-\lambda(t-s)}, \quad P\text{-m.m.}$$

(ii) *ha* $0 \leqslant s < t$, *akkor* $\xi_t - \xi_s$ *Poisson eloszlású* $\lambda(t-s)$ *paraméterrel és független* $\mathcal{F}_s^\xi$*-től. (Itt* $\mathcal{F}_t^\xi = \sigma(\xi_s, 0 \leqslant s \leqslant t)$, $t \geqslant 0$.*)*

Bizonyítás. (i) Legyen $s \geqslant 0$ és $n \in \mathbb{N}$ tetszőlegesen rögzített. Tekintsük az $\mathcal{F}_s^\xi$ σ-algebra nyomát a $\{\xi_s = n\}$ halmazon, ezen azt a $\mathcal{G}$ σ-algebrát értjük, mely az összes $A \cap \{\xi_s = n\}$, $A \in \mathcal{F}_s^\xi$ alakú eseményből áll. Hasonlóan tekintsük a $\sigma(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ σ-algebra nyomát a $\{\xi_s = n\}$ halmazon, ezt $\mathcal{H}$-val fogjuk jelölni. A $\mathcal{G}$ σ-algebra számára generátorrendszert alkotnak a $\{\xi_{t_1} \leqslant n_1, \ldots, \xi_{t_k} \leqslant n_k, \xi_s = n\}$ alakú események, ahol $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_k \leqslant s$ és $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_+, n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_k \leqslant n$. Felhasználva (1.7.2)-t és T_i-k definícióját, kapjuk, hogy minden ilyen halmaz benne van $\mathcal{H}$-ban. A $\mathcal{H}$ σ-algebra számára generátorrendszert alkotnak a $\{T_1 \leqslant t_1, \ldots, T_{n-1} \leqslant t_{n-1}, \xi_s = n\}$ alakú események, ahol $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_{n-1} \leqslant s$. Felhasználva (1.7.2)-t kapjuk, hogy minden ilyen halmaz benne van $\mathcal{G}$-ben. Így $\mathcal{G} = \mathcal{H}$.

Ezért minden $\widetilde{A} \in \mathcal{F}_s^\xi$ esetén létezik olyan $A \in \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ esemény, hogy

$$\widetilde{A} \cap \{\xi_s = n\} = A \cap \{\xi_s = n\}.$$

A feltételes várható érték definíciója, ξ_s értelmezése és $s < t$ miatt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{A} \cap \{\xi_s = n\}} P(T_{n+1} > t \,|\, \mathcal{F}_s^\xi) \, \mathsf{d}P &= P(\{T_{n+1} > t\} \cap \widetilde{A} \cap \{\xi_s = n\}) \\
&= P(\{T_{n+1} > t\} \cap A \cap \{\xi_s = n\}) = P(\{T_{n+1} > t\} \cap A \cap \{T_n \leqslant s < T_{n+1}\}) \\
&= P(\{T_n + \eta_{n+1} > t\} \cap A \cap \{T_n \leqslant s\}).
\end{aligned}$$

Mivel η_{n+1} független T_n-től és $\mathbb{I}_A$-tól is, a teljes valószínűség tétele alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&P(\{T_n + \eta_{n+1} > t\} \cap A \cap \{T_n \leqslant s\}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P(\{T_n > t - u\} \cap A \cap \{T_n \leqslant s\} \,|\, \eta_{n+1} = u) f_{\eta_{n+1}}(u) \, \mathsf{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P(\{T_n > t - u\} \cap A \cap \{T_n \leqslant s\}) f_{\eta_{n+1}}(u) \, \mathsf{d}u \\
&= \int_{t-s}^{\infty} P(\{T_n > t - u\} \cap A \cap \{T_n \leqslant s\}) \lambda e^{-\lambda u} \, \mathsf{d}u \\
&= e^{-\lambda(t-s)} \int_0^{\infty} P(\{T_n + u > s\} \cap A \cap \{T_n \leqslant s\}) \lambda e^{-\lambda u} \, \mathsf{d}u,
\end{aligned}$$

és így

$$\begin{aligned}
P(\{T_n + \eta_{n+1} > t\} \cap A \cap \{T_n \leqslant s\})
&= e^{-\lambda(t-s)} P(\{T_n + \eta_{n+1} > s\} \cap A \cap \{T_n \leqslant s\}) \\
&= e^{-\lambda(t-s)} P(A \cap \{T_n \leqslant s < T_{n+1}\}) \\
&= e^{-\lambda(t-s)} P(A \cap \{\xi_s = n\}) = e^{-\lambda(t-s)} P(\widetilde{A} \cap \{\xi_s = n\}).
\end{aligned}$$

Így

$$\int_{\widetilde{A} \cap \{\xi_s = n\}} P(T_{n+1} > t \,|\, \mathcal{F}_s^\xi) \, \mathsf{d}P = e^{-\lambda(t-s)} P(\widetilde{A} \cap \{\xi_s = n\}),$$

minden $0 \leqslant s < t$, $n \in \mathbb{N}$ és $\widetilde{A} \in \mathcal{F}_s^\xi$ esetén. Mivel $\sum_{n=0}^\infty P(\widetilde{A} \cap \{\xi_s = n\}) = P(\widetilde{A})$ és

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^\infty \int_{\widetilde{A} \cap \{\xi_s = n\}} P(T_{n+1} > t \,|\, \mathcal{F}_s^\xi) \, \mathsf{d}P &= \sum_{n=0}^\infty P(\{T_{n+1} > t\} \cap \widetilde{A} \cap \{\xi_s = n\}) \\
&= \sum_{n=0}^\infty P(\{T_{\xi_s+1} > t\} \cap \widetilde{A} \cap \{\xi_s = n\}) = P(\{T_{\xi_s+1} > t\} \cap \widetilde{A}) \\
&= \int_{\widetilde{A}} P(\{T_{\xi_s+1} > t\} \,|\, \mathcal{F}_s^\xi) \, \mathsf{d}P,
\end{aligned}$$

így adódik, hogy

$$\int_{\widetilde{A}} P(T_{\xi_s+1} > t \,|\, \mathcal{F}_s^\xi) \, \mathsf{d}P = e^{-\lambda(t-s)} P(\widetilde{A}),$$

minden $\widetilde{A} \in \mathcal{F}_s^\xi$ esetén. Ebből pedig a feltételes várható érték definíciója alapján már következik (i).

(ii) Legyen minden $k \geqslant 1$ esetén

$$Y_k := T_{n+k+1} - T_{n+1} = \sum_{j=n+2}^{n+k+1} \eta_j.$$

Ekkor Y_k független a $\sigma(\eta_1, \ldots, \eta_{n+1})$ σ-algebrától és gamma-eloszlású k és λ paraméterekkel minden $k \geqslant 1$-re, azaz Y_k sűrűségfüggvénye

$$f_{Y_k}(u) = \begin{cases} \frac{\lambda^k u^{k-1} e^{-\lambda u}}{(k-1)!} & \text{ha} \quad u > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad u \leqslant 0. \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy minden $\theta > 0$ és $k \geqslant 1$ esetén

$$P(Y_k > \theta) = \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda\theta)^j}{j!} \right) e^{-\lambda\theta}. \qquad (1.7.8)$$

Ugyanis $k = 1$-re,

$$P(Y_1 > \theta) = P(\eta_{n+2} > \theta) = 1 - F_{\eta_{n+2}}(\theta) = 1 - (1 - e^{-\lambda\theta}) = e^{-\lambda\theta}.$$

Tegyük fel, hogy (1.7.8) igaz $1, 2, \ldots, k$-ra, és mutassuk meg, hogy fennáll $k+1$-re is. Mivel Y_k és η_{n+k+2} függetlenek, a teljes várható érték tétele alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
P(Y_{k+1} > \theta) &= P(Y_k + \eta_{n+k+2} > \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} P(Y_k + u > \theta \,|\, \eta_{n+k+2} = u) f_{\eta_{n+k+2}}(u)\,\mathsf{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P(Y_k > \theta - u) f_{\eta_{n+k+2}}(u)\,\mathsf{d}u = \int_0^{\theta} P(Y_k > \theta - u)\lambda e^{-\lambda u}\,\mathsf{d}u + \int_{\theta}^{\infty} \lambda e^{-\lambda u}\,\mathsf{d}u \\
&= \int_0^{\theta} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda(\theta-u))^j}{j!} e^{-\lambda(\theta-u)} \lambda e^{-\lambda u}\,\mathsf{d}u + e^{-\lambda\theta} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} e^{-\lambda\theta} \int_0^{\theta} (\theta-u)^j\,\mathsf{d}u + e^{-\lambda\theta} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda\theta)^{j+1}}{(j+1)!} e^{-\lambda\theta} + e^{-\lambda\theta} = \sum_{j=0}^{k} \frac{(\lambda\theta)^j}{j!} e^{-\lambda\theta}.
\end{aligned}$$

Legyen $\widetilde{A} \in \mathcal{F}_s^{\xi}$, ekkor létezik olyan $A \in \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ esemény, hogy

$$\widetilde{A} \cap \{\xi_s = n\} = A \cap \{\xi_s = n\}.$$

Hasonlóan az (i) rész megoldásában látottakhoz kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{A}\cap\{\xi_s=n\}} P(\xi_t - \xi_s \leqslant k \,|\, \mathcal{F}_s^{\xi})\,\mathsf{d}P &= P(\{\xi_t - \xi_s \leqslant k\} \cap A \cap \{\xi_s = n\}) \\
&= P(\{\xi_t \leqslant n + k\} \cap A \cap \{\xi_s = n\}) \\
&= P(\{T_{n+k+1} > t\} \cap A \cap \{\xi_s = n\}).
\end{aligned}$$

Felhasználva Y_k definícióját és azt, hogy Y_k független T_{n+1}-től és $\mathbb{I}_A$-tól is, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
P(\{T_{n+k+1} > t\} \cap A \cap \{\xi_s = n\}) &= P(\{T_{n+1} + Y_k > t\} \cap A \cap \{\xi_s = n\}) \\
&= \int_0^{\infty} P(\{T_{n+1} + u > t\} \cap A \cap \{\xi_s = n\}) f_{Y_k}(u)\,\mathsf{d}u.
\end{aligned}$$

Ha $u \geqslant t - s$, akkor

$$\begin{aligned}
\{T_{n+1} + u > t\} \cap A \cap \{\xi_s = n\} &= \{T_{n+1} > t - u\} \cap A \cap \{T_n \leqslant s < T_{n+1}\} \\
&= A \cap \{T_n \leqslant s < T_{n+1}\} = A \cap \{\xi_s = n\} = \widetilde{A} \cap \{\xi_s = n\},
\end{aligned}$$

ezért (1.7.8) alapján

$$\begin{aligned}
\int_{t-s}^{\infty} P(\{T_{n+1} + u > t\} \cap A \cap \{\xi_s = n\}) f_{Y_k}(u)\,\mathsf{d}u &= P(\widetilde{A} \cap \{\xi_s = n\}) P(Y_k > t - s) \\
&= P(\widetilde{A} \cap \{\xi_s = n\}) \sum_{j=0}^{k-1} e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Mivel $\widetilde{A} \cap \{\xi_s = n\} \in \mathcal{F}_s^{\xi}$, (i) alapján kapjuk, hogy

$$P(\{T_{\xi_s+1} > y\} \cap \widetilde{A} \cap \{\xi_s = n\}) = e^{-\lambda(y-s)} P(\widetilde{A} \cap \{\xi_s = n\}), \quad 0 \leqslant s < y.$$

Ezért

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t-s} P(\{T_{n+1}+u>t\}\cap A\cap\{\xi_s=n\})f_{Y_k}(u)\,\mathrm{d}u\\
&\qquad=\int_0^{t-s} P(\{T_{\xi_s+1}>t-u\}\cap\widetilde{A}\cap\{\xi_s=n\})f_{Y_k}(u)\,\mathrm{d}u\\
&\qquad=P(\widetilde{A}\cap\{\xi_s=n\})\int_0^{t-s} e^{-\lambda(t-s-u)}f_{Y_k}(u)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} P(\{T_{n+1}+u>t\}\cap A\cap\{\xi_s=n\})f_{Y_k}(u)\,\mathrm{d}u\\
&\qquad=P(\widetilde{A}\cap\{\xi_s=n\})\left(\sum_{j=0}^{k-1} e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^j}{j!}+\int_0^{t-s} e^{-\lambda(t-s-u)}f_{Y_k}(u)\,\mathrm{d}u\right).
\end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned}
\int_0^{t-s} e^{-\lambda(t-s-u)}f_{Y_k}(u)\,\mathrm{d}u&=\int_0^{t-s} e^{-\lambda(t-s-u)}\frac{\lambda^k u^{k-1}e^{-\lambda u}}{(k-1)!}\,\mathrm{d}u=\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda(t-s)}\int_0^{t-s} u^{k-1}\,\mathrm{d}u\\
&=\frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)},
\end{aligned}$$

kapjuk, hogy

$$\int_{\widetilde{A}\cap\{\xi_s=n\}} P(\xi_t-\xi_s\leqslant k\mid\mathcal{F}_s^\xi)\,\mathrm{d}P=P(\widetilde{A}\cap\{\xi_s=n\})\sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^j}{j!}$$

minden $0\leqslant s<t$, $n\in\mathbb{Z}_+$ és $\widetilde{A}\in\mathcal{F}_s^\xi$ esetén. Hasonlóan az (i) rész megoldásában látottakhoz, összegezve ezen egyenlet mindkét oldalát n-re adódik, hogy

$$\int_{\widetilde{A}} P(\xi_t-\xi_s\leqslant k\mid\mathcal{F}_s^\xi)\,\mathrm{d}P=P(\widetilde{A})\sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^j}{j!}$$

minden $\widetilde{A}\in\mathcal{F}_s^\xi$ és $k\in\mathbb{N}$ esetén. Ebből pedig a feltételes várható érték definíciója alapján már következik (ii). □

Az alábbiakban a Poisson-folyamat egy újabb (sorrendben a harmadik) definiálására lehetőséget adó állítást tárgyalunk. Szükségünk lesz arra a fogalomra, hogy egy $f(x)$ függvény $o(x)$ tulajdonságú, amint $x\to0$.

1.7.7. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény* $o(x)$ *tulajdonságú, amint* $x\to0$, *ha*

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0.$$

1.7.8. Megjegyzés. Tekintsünk egy-két példát.

(i) Az $f(x) = x^2$ függvény $o(x)$ tulajdonságú, amint $x \to 0$, mert

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

(ii) Az $f(x) = x$ függvény nem $o(x)$ tulajdonságú, amint $x \to 0$, mert

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \neq 0.$$

(iii) Ha f és g $o(x)$ tulajdonságúak, amint $x \to 0$, akkor $f+g$ és cf $(c \in \mathbb{R})$ is $o(x)$ tulajdonságú, amint $x \to 0$.

(Az a tény, hogy az f függvény $o(x)$ tulajdonságú, amint $x \to 0$ heurisztikusan azt jelenti, hogy $f(x)$ gyorsabban tart a 0-hoz, mint az x függvény, ha $x \to 0$.)

1.7.9. Tétel. *Legyen* $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ *egy valós értékű sztochasztikus folyamat. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ λ *paraméterű Poisson-folyamat,*

(ii) (a) *független, stacionárius növekményű,*

(b) *nemnegatív egész értékű, valamint tetszőleges* $t \geqslant 0$ *esetén* $P(\xi_t \geqslant 2) = o(t)$ *és* $P(\xi_t = 1) = \lambda t + o(t)$ *amint* $t \downarrow 0$,

(c) *a* $[0, \infty) \ni t \mapsto \xi_t$ *trajektóriák jobbról folytonosak.*

1.7.10. Megjegyzés. Az előző tétel (ii)/(b) részében a $P(\xi_t \geqslant 2) = o(t)$ és $P(\xi_t = 1) = \lambda t + o(t)$ amint $t \downarrow 0$ feltételek részletesebben kiírva azt jelentik, hogy

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{P(\xi_t \geqslant 2)}{t} = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{t\downarrow 0} \frac{P(\xi_t = 1)}{t} = \lambda.$$

□

1.7.11. Állítás. *Legyen* $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ λ *paraméterű Poisson-folyamat. Ekkor az 1.7.3. Definícióban bevezetett* T_n, $n \in \mathbb{N}$ *valószínűségi változók* n*-edrendű,* λ *paraméterű gamma eloszlásúak. A* T_n *valószínűségi változót az* n*-edik esemény* **várakozási idejének** *szokás nevezni.*

Bizonyítás. **(Ross [7], 216. old. alapján)** Az állítás rögtön következik abból, hogy $T_n = \eta_1 + \cdots + \eta_n$, $n \in \mathbb{N}$, ahol $\eta_1, \ldots, \eta_n$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók; tudva azt, hogy n darab független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összegének eloszlása n-edrendű, λ paraméterű gamma eloszlás.

Az érdekesség kedvéért adunk egy ,,elemibb" bizonyítást is. Felhasználva ξ_t definícióját, kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{\xi_t \geqslant n\} = \{T_n \leqslant t\}.$$

Tudva azt, hogy T_n, $n \in \mathbb{N}$, eloszlása abszolút folytonos, hiszen abszolút folytonos eloszlások konvolúciója, kapjuk, hogy T_n eloszlásfüggvénye a $t > 0$ helyen

$$F_{T_n}(t) = P(T_n < t) = P(T_n \leqslant t) = P(\xi_t \geqslant n).$$

(Ha $t \leqslant 0$, akkor $F_{T_n}(t) = 0$, hiszen T_n nemnegatív.) Mivel ξ_t Poisson eloszlású λt paraméterrel

$$F_{T_n}(t) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}.$$

Felhasználva, hogy egy hatványsor a konvergencia tartományán belül "tagonként" differenciálható, a t változó szerint differenciálva kapjuk, hogy ha $t > 0$, akkor

$$\begin{aligned}
f_{T_n}(t) &= \sum_{j=n}^{\infty} \Big(\lambda \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}(-\lambda) \Big) \\
&= \lambda e^{-\lambda t} \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} - \lambda e^{-\lambda t} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!},
\end{aligned}$$

ami pontosan egy n-edrendű, λ paraméterű gamma eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a $t > 0$ helyen. □

Legyen $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ λ paraméterű Poisson-folyamat és legyen $0 < p < 1$ rögzített. Gondoljunk a Poisson-folyamat számláló-folyamatos megközelítésére. Tegyük fel, hogy minden alkalommal, mikor egy ,,esemény" bekövetkezik azt vagy I-es típusúnak vagy II-es típusúnak minősítjük. Feltételezzük, hogy egy eseményt I-es típusúnak p, II-es típusúnak $1 - p$ valószínűséggel minősítünk és ezek a minősítések egymástól teljesen függetlenül történnek. Tekintsük például az 1.7.2. Példa (i) részét. Tegyük fel, hogy egy eseményt, azaz egy vásárló érkezését aszerint minősítjük, osztályozzuk, hogy ő férfi vagy nő. Jelen esetben $p = 1/2$ természetes választás. (A $p \neq 1/2$ eset annak felelhetne meg, hogy az áruházat kicseréljük például egy (női) fodrász szalonra.) A továbbiakban újra az általános konstrukciót tekintjük. Tetszőleges $t \geqslant 0$ esetén jelölje $\xi_t^{(1)}$ a t időpontig I-típusúnak minősített események, $\xi_t^{(2)}$ pedig a II-típusúnak minősített események számát. Nyilván $\xi_t = \xi_t^{(1)} + \xi_t^{(2)}$ minden $t \geqslant 0$ esetén.

1.7.12. Állítás. (Poisson-folyamat ritkítása, Ross [7], Chapter 5, Proposition 3.2) *Ekkor* $\{\xi_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ λp *paraméterű,* $\{\xi_t^{(2)} : t \geqslant 0\}$ $\lambda(1-p)$ *paraméterű, egymástól független Poisson-folyamatok.*

Bizonyítás. Felhasználva $\xi_t^{(1)}$ és $\xi_t^{(2)}$ konstrukcióját az könnyen adódik, hogy $\{\xi_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ és $\{\xi_t^{(2)} : t \geqslant 0\}$ független növekményű folyamatok, és a trajektóriák jobbról folytonossága is nyilvánvaló. A következőkben meghatározzuk $\xi_t^{(1)}$ és $\xi_t^{(2)}$ együttes eloszlását, azaz a

$$P(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m), \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+$$

valószínűségeket. A teljes valószínűség tétele alapján kapjuk, hogy

$$P(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m \,|\, \xi_t = k) P(\xi_t = k).$$

Ahhoz, hogy a t időpontig n darab I-típusú és m darab II-típusú esemény következzen be szükséges, hogy összesen $n+m$ esemény következzen be a t időpontig, így

$$P(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m \,|\, \xi_t = k) = 0, \qquad \text{ha} \qquad k \neq n+m.$$

Ezért, felhasználva, hogy ξ_t Poisson eloszlású λt paraméterrel, kapjuk, hogy minden $n, m \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$\begin{aligned} P(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m) &= P(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m \,|\, \xi_t = n+m) P(\xi_t = n+m) \\ &= P(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m \,|\, \xi_t = n+m) \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Mivel minden eseményt p valószínűséggel I-típusúnak, $(1-p)$ valószínűséggel II-típusúnak osztályozunk, feltételezve, hogy összesen $n+m$ esemény következett be, az I-típusú események száma $(n+m)$-edrendű és p-paraméterű binomiális eloszlást követ. Ezért annak a valószínűsége, hogy $n+m$ eseményből n-et I-típusúnak, m-et II-típusúnak osztályozunk

$$\binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m.$$

Így

$$\begin{aligned} P(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m) &= \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{(\lambda t p)^n}{n!} e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!} e^{-\lambda t(1-p)}. \end{aligned} \tag{1.7.9}$$

Összegezve ezen egyenlet két oldalát m szerint

$$\begin{aligned} P(\xi_t^{(1)} = n) &= \sum_{m=0}^{\infty} P(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m) \\ &= \frac{(\lambda t p)^n}{n!} e^{-\lambda t p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!} e^{-\lambda t(1-p)} = \frac{(\lambda t p)^n}{n!} e^{-\lambda t p}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Hasonlóan

$$P(\xi_t^{(2)} = m) = \frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!} e^{-\lambda t(1-p)}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Ezért (1.7.9) alapján

$$P(\xi_t^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m) = P(\xi_t^{(1)} = n)P(\xi_t^{(2)} = m), \qquad t \geqslant 0, \ \ n, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.7.10}$$

Hasonlóan beláthatjuk, hogy $0 \leqslant s < t$, n, $m \in \mathbb{Z}_+$, esetén

$$P(\xi_t^{(1)} - \xi_s^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} - \xi_s^{(2)} = m) = \frac{(\lambda(t-s)p)^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)p} \frac{(\lambda(t-s)(1-p))^m}{m!} e^{-\lambda(t-s)(1-p)}.$$

(Az s időpont után a t időpontig bekövetkező I-típusú, illetve II-típusú eseményeket kell figyelni.) Ebből az is következik, hogy tetszőleges $0 \leqslant s < t$ esetén

$$\begin{aligned} &\xi_t^{(1)} - \xi_s^{(1)} \sim \xi_{t-s}^{(1)} \sim \text{Poiss}(\lambda(t-s)p), \\ &\xi_t^{(2)} - \xi_s^{(2)} \sim \xi_{t-s}^{(2)} \sim \text{Poiss}\big(\lambda(t-s)(1-p)\big). \end{aligned}$$

Azaz $\{\xi_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ és $\{\xi_t^{(2)} : t \geqslant 0\}$ stacionárius növekményű folyamatok is és a növekmények eloszlása a 1.7.5. Állítás (ii) részében megkívánt. A 1.7.5. Állítás alapján $\{\xi_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ λp paraméterű Poisson-folyamat, $\{\xi_t^{(2)} : t \geqslant 0\}$ pedig $\lambda(1-p)$ paraméterű Poisson-folyamat.

A következőkben, felhasználva (1.7.9)-t, megmutatjuk, hogy a $\{\xi_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ és $\{\xi_t^{(2)} : t \geqslant 0\}$ Poisson-folyamatok függetlenek. Azt kell megmutatnunk, hogy a $\sigma(\xi_t^{(1)}, t \geqslant 0)$ és a $\sigma(\xi_t^{(2)}, t \geqslant 0)$ σ-algebrák függetlenek. Először megmutatjuk, hogy tetszőleges $s, t \geqslant 0$ esetén $\xi_s^{(1)}$ és $\xi_t^{(2)}$ függetlenek. Feltehető, hogy $0 \leqslant s < t$. Ekkor tetszőleges $n, m \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$\begin{aligned} P(\xi_s^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m) &= \sum_{k=0}^{m} P(\xi_s^{(1)} = n, \xi_s^{(2)} = k, \xi_t^{(2)} = m) \\ &= \sum_{k=0}^{m} P(\xi_s^{(1)} = n, \xi_s^{(2)} = k, \xi_t^{(2)} - \xi_s^{(2)} = m - k). \end{aligned}$$

Felhasználva (1.7.10)-t, azt, hogy az s időpontig bekövetkező I-es, illetve II-es típusú események száma független az s időpont után a t időpontig bekövetkező I-es, illetve II-es típusú események számától, és azt is, hogy $\{\xi_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ és $\{\xi_t^{(2)} : t \geqslant 0\}$ független növekményű folyamatok, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(\xi_s^{(1)} = n, \xi_t^{(2)} = m) &= \sum_{k=0}^{m} P(\xi_s^{(1)} = n, \xi_s^{(2)} = k) P(\xi_t^{(2)} - \xi_s^{(2)} = m - k) \\ &= \sum_{k=0}^{m} P(\xi_s^{(1)} = n) P(\xi_s^{(2)} = k) P(\xi_t^{(2)} - \xi_s^{(2)} = m - k) \\ &= \sum_{k=0}^{m} P(\xi_s^{(1)} = n) P(\xi_s^{(2)} = k, \xi_t^{(2)} - \xi_s^{(2)} = m - k) \\ &= \sum_{k=0}^{m} P(\xi_s^{(1)} = n) P(\xi_s^{(2)} = k, \xi_t^{(2)} = m) \\ &= P(\xi_s^{(1)} = n) P(\xi_t^{(2)} = m). \end{aligned}$$

Tehát $\xi_t^{(1)}$ és $\xi_s^{(2)}$ függetlenek tetszőleges $s, t \geqslant 0$ esetén. Ebből már következik, hogy a szóbanforgó σ-algebrák is függetlenek (a pontos bizonyítás a Kolmogorov 0-1 törvény bizonyításánál látottaknak megfelelően történhet).

Megjegyezzük, hogy Daley–Vere-Jones [1], Exercise 2.3.2 (b) alapján, ha ξ előállítható $\xi = \xi' + \xi''$ alakban, ahol ξ' és ξ'' nemtriviális, független pont folyamatok, akkor ξ' és ξ'' is Poisson-folyamat. □

1.7.13. Megjegyzés. Nem az a meglepő, hogy $\{\xi_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ és $\{\xi_t^{(2)} : t \geqslant 0\}$ Poisson-folyamatok, hanem az, hogy függetlenek. Jelölje például ξ_t a t időpontig egy bankba érkező ügyfelek számát (az időt mérjük órában). Tegyük fel, hogy $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ 1 paraméterű Poisson-folyamat. Tételezzük fel továbbá azt is, hogy minden egyes ügyfél $1/2$ valószínűséggel férfi, ill. nő. Tudjuk, hogy a bank nyitása utáni 10 órában 100 férfi érkezett. Várhatóan mennyi nő érkezett ez idő alatt a bankba? Egy **téves** érvelés a következő, mivel 100 férfi érkezett és minden érkező $1/2$ valószínűséggel férfi, várhatóan összesen 200-an érkeztek, ezért várhatóan 100 nő érkezett ez idő alatt. Azonban ez hibás érvelés. A helyes gondolatmenet a következő. Az 1.7.12. Állítás alapján, ha $\xi_t^{(2)}$ jelöli a t időpontig a bankba érkező női ügyfelek számát, akkor $\{\xi_t^{(2)} : t \geqslant 0\}$ $1/2$ paraméterű Poisson-folyamat. Így az első 10 órában érkező női ügyfelek száma Poisson eloszlású $10 \cdot 1/2 = 5$ paraméterrel. S mivel a Poisson eloszlás várható értéke megegyezik a paraméterével kapjuk, hogy várhatóan 5 nő érkezik a bankba az első 10 órában (s ez független az ez idő alatt a bankba érkező férfi ügyfelek számától). □

1.7.14. Megjegyzés. (Független Poisson-folyamatokra vonatkozó várakozási idők) Legyenek $\{\xi_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ és $\{\xi_t^{(2)} : t \geqslant 0\}$ független λ_1, ill. λ_2 paraméterű Poisson-folyamatok. Jelölje $T_n^{(1)}$, ill. $T_n^{(2)}$, $n \in \mathbb{N}$ az első, ill. második folyamatra vonatkozó várakozási időket. A $P(T_n^{(1)} < T_m^{(2)})$, $n, m \in \mathbb{N}$ valószínűség kiszámításával foglalkozunk. (Azaz arra keressük a választ, mi annak a valószínűsége, hogy egy Poisson-folyamatban hamarabb következik be n darab esemény, mint egy másik, tőle független Poisson-folyamatban m darab esemény.) Tekintsük először az $n = m = 1$ esetet. Ekkor $T_1^{(1)}$ λ_1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, $T_1^{(2)}$ pedig tőle független λ_2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Így a teljes várható érték tétele alapján kapjuk, hogy

$$P(T_1^{(1)} < T_1^{(2)}) = \int_0^{+\infty} P(T_1^{(1)} < T_1^{(2)} \,|\, T_1^{(2)} = x) f_{T_1^{(2)}}(x)\, \mathsf{d}x.$$

Felhasználva azt, ha ξ és η független valószínűségi változók és $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan mérhető függvény, hogy $\mathbb{E}|g(\xi, \eta)| < +\infty$, akkor $\mathbb{E}(g(\xi, \eta) \,|\, \eta = y) = \mathbb{E}(g(\xi, y))$, P_η-m.m. $y \in \mathbb{R}$, kapjuk, hogy

$$P(T_1^{(1)} < T_1^{(2)} \,|\, T_1^{(2)} = x) = P(T_1^{(1)} < x), \quad P_{T_1^{(2)}}\text{-m.m. } x \in \mathbb{R}. \tag{1.7.11}$$

Felhasználva, hogy $P_{T_1^{(2)}}$ abszolút folytonos az $\mathbb{R}$-en értelmezett Lebesgue-mértékre nézve,

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
P(T_1^{(1)} < T_1^{(2)}) &= \int_0^{+\infty} P(T_1^{(1)} < x)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\,\mathsf{d}x = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda_1 x})\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\,\mathsf{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\,\mathsf{d}x - \int_0^{+\infty} \lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\,\mathsf{d}x = 1 - \lambda_2 \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}.
\end{aligned}$$

Így

$$P(T_1^{(1)} < T_1^{(2)}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}. \tag{1.7.12}$$

Határozzuk meg most annak a valószínűségét, hogy a $\{\xi_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ Poisson-folyamatban 2 esemény is bekövetkezik, mielőtt a $\{\xi_t^{(2)} : t \geqslant 0\}$ Poisson-folyamatban egy esemény is bekövetkezne, azaz a $P(T_2^{(1)} < T_1^{(2)})$ valószínűségre vagyunk kíváncsiak. Tekintsük az alábbi (kicsit heurisztikus) gondolatmenetet. Ahhoz, hogy a $\{\xi_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ Poisson-folyamatban 2 esemény is azelőtt következzen be, hogy a $\{\xi_t^{(2)} : t \geqslant 0\}$ Poisson-folyamatban egy esemény is bekövetkezne szükséges, hogy az első esemény a $\{\xi_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ Poisson-folyamatból következzen be, ennek valószínűsége (1.7.12) alapján $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$. Feltételezve, hogy az első esemény a $\{\xi_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ Poisson-folyamatból következik be, ahhoz, hogy $T_2^{(1)} < T_1^{(2)}$ legyen szükséges és elégséges, hogy a második esemény is a $\{\xi_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ folyamatból következzen be. Azonban az első esemény bekövetkezésekor mindkét folyamat újjászületik (memoryless property), így ez a feltételes valószínűség is $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$. Így a keresett valószínűség

$$P(T_2^{(1)} < T_1^{(2)}) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2.$$

A pontos indoklás a következő. A teljes várható érték tétele alapján

$$\begin{aligned}
P(T_2^{(1)} < T_1^{(2)}) &= \int_0^{+\infty} P(T_2^{(1)} < T_1^{(2)} \,|\, T_1^{(2)} = x)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\,\mathsf{d}x \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} P(T_2^{(1)} < T_1^{(2)} \,|\, T_1^{(2)} = x, T_1^{(1)} = y)\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 y} e^{-\lambda_2 x}\,\mathsf{d}x\,\mathsf{d}y \\
&= \lambda_1\lambda_2 \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x P(T_2^{(1)} < T_1^{(2)} \,|\, T_1^{(2)} = x, T_1^{(1)} = y) e^{-\lambda_1 y}\,\mathsf{d}y\right) e^{-\lambda_2 x}\,\mathsf{d}x,
\end{aligned}$$

hiszen, ha $x < y$, akkor $P(T_2^{(1)} < T_1^{(2)} \,|\, T_1^{(2)} = x, T_1^{(1)} = y) = 0$, mert $T_1^{(1)} \leqslant T_2^{(1)}$. Ha $x \geqslant y \geqslant 0$, akkor

$$\begin{aligned}
P(T_2^{(1)} < T_1^{(2)} \,|\, T_1^{(2)} = x, T_1^{(1)} = y) &= P(T_2^{(1)} - T_1^{(1)} < T_1^{(2)} - y \,|\, T_1^{(2)} = x, T_1^{(1)} = y) \\
&= P(T_2^{(1)} - T_1^{(1)} < T_1^{(2)} - y \,|\, T_1^{(2)} = x) \\
&= P(T_2^{(1)} - T_1^{(1)} < x - y) = 1 - e^{-\lambda_1(x-y)},
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $T_1^{(2)}$ független $T_1^{(1)}$-től (az alapul vett Poisson-folyamatok függetlensége miatt), azt, hogy $T_2^{(1)} - T_1^{(1)}$ független $T_1^{(1)}$-től, ill. $T_1^{(2)}$-től (hiszen az 1.7.3. Definíció alapján $T^{(1)}$ független növekményű folyamat, ill. az alapul vett Poisson-folyamatok függetlenek), valamint a legvégén azt, hogy $T_2^{(1)} - T_1^{(1)}$ exponenciális eloszlású λ_1 paraméterrel. Így

$$\begin{aligned}
P(T_2^{(1)} < T_1^{(2)}) &= \lambda_1\lambda_2 \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x (1 - e^{-\lambda_1(x-y)}) e^{-\lambda_1 y} \, \mathsf{d}y \right) e^{-\lambda_2 x} \, \mathsf{d}x \\
&= \lambda_1\lambda_2 \int_0^{+\infty} \left(\left[\frac{e^{-\lambda_1 y}}{-\lambda_1} \right]_0^x - e^{-\lambda_1 x} \int_0^x 1 \, \mathsf{d}y \right) e^{-\lambda_2 x} \, \mathsf{d}x \\
&= \lambda_1\lambda_2 \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{\lambda_1}(e^{-\lambda_1 x} - 1) - e^{-\lambda_1 x} x \right) e^{-\lambda_2 x} \, \mathsf{d}x.
\end{aligned}$$

Innen egyszerű számolás mutatja, hogy

$$P(T_2^{(1)} < T_1^{(2)}) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^2.$$

Általában megmutatható, hogy tetszőleges $n, m \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$P(T_n^{(1)} < T_m^{(2)}) = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n+m-1-k}.$$

□

A Poisson-folyamattal nemcsak a Poisson eloszlás és az exponenciális eloszlás áll kapcsolatban. Megmutatjuk, hogyan jön itt elő az egyenletes és a binomiális eloszlás.

1.7.15. Tétel. *Legyen* $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ λ *paraméterű Poisson-folyamat. Ekkor minden* $n \in \mathbb{N}$ *és* $t > 0$ *esetén* $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ *feltételes eloszlása a* $\{\xi_t = n\}$ *feltételre vonatkozóan megegyezik a* $(0, t)$ *intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók* n *elemű rendezett mintájának eloszlásával. Azaz minden* $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$ *és* $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant t$ *esetén*

$$P(T_1 \leqslant t_1, T_2 \leqslant t_2, \ldots, T_n \leqslant t_n \,|\, \xi_t = n) = \frac{n!}{t^n} \int \cdots \int_{\substack{x_1+\cdots+x_i \leqslant t_i \\ x_i \geqslant 0, i=1,\ldots,n}} 1 \, \mathsf{d}x_1 \ldots \mathsf{d}x_n.$$

Bizonyítás. A feltételes várható érték definíciója alapján és felhasználva, hogy ξ_t Poisson eloszlású λt paraméterrel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
P(T_1 \leqslant t_1, T_2 \leqslant t_2, \ldots, T_n \leqslant t_n \,|\, \xi_t = n) &= \frac{P(T_1 \leqslant t_1, T_2 \leqslant t_2, \ldots, T_n \leqslant t_n, \xi_t = n)}{P(\xi_t = n)} \\
&= \frac{P(T_1 \leqslant t_1, T_2 \leqslant t_2, \ldots, T_n \leqslant t_n, \xi_t = n)}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}.
\end{aligned}$$

Felhasználva a $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ Poisson-folyamat definícióját és azt, hogy a definiálásában szereplő $\eta_1, \eta_2, \ldots$ valószínűségi változók független, λ paraméterű exponenciális eloszlásúak

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&P(T_1 \leqslant t_1, T_2 \leqslant t_2, \dots, T_n \leqslant t_n, \xi_t = n) \\
&\quad = P(\eta_1 \leqslant t_1, \eta_1 + \eta_2 \leqslant t_2, \dots, \eta_1 + \dots + \eta_n \leqslant t_n, \eta_1 + \dots + \eta_{n+1} > t) \\
&\quad = \int_{(0,+\infty)^{n+1}} \mathbb{I}_{\{x_1 \leqslant t_1, x_1+x_2 \leqslant t_2, \dots, x_1+\dots+x_n \leqslant t_n, x_1+\dots+x_{n+1} > t\}} f_{(\eta_1,\dots,\eta_{n+1})}(x_1, \dots, x_{n+1}) \, \mathsf{d}x_1 \cdots \mathsf{d}x_{n+1} \\
&\quad = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2 - x_1} \cdots \int_0^{t_n - x_1 - \dots - x_{n-1}} \int_{t - x_1 - \dots - x_n}^{+\infty} \lambda^{n+1} e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_{n+1})} \, \mathsf{d}x_1 \cdots \mathsf{d}x_{n+1} \\
&\quad = \lambda^{n+1} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2 - x_1} \cdots \int_0^{t_n - x_1 - \dots - x_{n-1}} e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)} \left[\frac{e^{-\lambda u}}{-\lambda} \right]_{u = t - x_1 - \dots - x_n}^{u = +\infty} \mathsf{d}x_1 \cdots \mathsf{d}x_n \\
&\quad = \lambda^n e^{-\lambda t} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2 - x_1} \cdots \int_0^{t_n - x_1 - \dots - x_{n-1}} 1 \, \mathsf{d}x_1 \cdots \mathsf{d}x_n.
\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}
P(T_1 \leqslant t_1, T_2 \leqslant t_2, \dots, T_n \leqslant t_n \mid \xi_t = n) &= \frac{n!}{t^n} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2 - x_1} \cdots \int_0^{t_n - x_1 - \dots - x_{n-1}} 1 \, \mathsf{d}x_1 \cdots \mathsf{d}x_n \\
&= \frac{n!}{t^n} \underset{\substack{x_1 + \dots + x_i \leqslant t_i \\ x_i \geqslant 0, i = 1, \dots, n}}{\int \cdots \int} 1 \, \mathsf{d}x_1 \dots \mathsf{d}x_n.
\end{aligned}$$

Végrehajtva az $x_1 + \dots + x_i = y_i$, $i = 1, \dots, n$ helyettesítést, a helyettesítés Jacobi-mátrixa determinánsának abszolút értéke 1, és az $x_1 + \dots + x_i \leqslant t_i$, $x_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, n$ integrálási tartomány az $y_i \leqslant t_i$, $i = 1, \dots, n$, $0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \dots \leqslant y_n$ integrálási tartományba megy át. Így

$$(1.7.13) \qquad P(T_1 \leqslant t_1, T_2 \leqslant t_2, \dots, T_n \leqslant t_n \mid \xi_t = n) = \frac{n!}{t^n} \int_0^{t_1} \int_{y_1}^{t_2} \cdots \int_{y_{n-1}}^{t_n} 1 \, \mathsf{d}y_1 \cdots \mathsf{d}y_n.$$

Azt kell még megmutatni, hogy a (1.7.13) formula jobb oldala megegyezik a $(0, t)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók n elemű rendezett mintájának eloszlásfüggvényének a $(t_1, \dots, t_n)$ helyen felvett értékével. Legyenek $X_1, \dots, X_n$ független, a $(0, t)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Meghatározzuk az $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ rendezett minta elemeinek együttes sűrűségfüggvényét. Először az együttes eloszlásfüggvényüket határozzuk meg:

$$F_{X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1^{(n)} < x_1, X_2^{(n)} < x_2, \dots, X_n^{(n)} < x_n).$$

Csak olyan $x_1, \dots, x_n$-ekre vizsgálódunk, melyekre $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n \leqslant t$. Az, hogy $x_i \in (0, t)$ azért van, mert a mintánk $(0, t)$-n egyenletes eloszlásra van. A növekvő sorrend pedig azért, mert ha például $x_1 > x_2$, akkor $X_1^{(n)} \leqslant X_2^{(n)} < x_2 < x_1$ miatt $X_1^{(n)} < x_1$, így

$$P(X_1^{(n)} < x_1, X_2^{(n)} < x_2, \dots, X_n^{(n)} < x_n) = P(X_2^{(n)} < x_2, \dots, X_n^{(n)} < x_n).$$

Ezért amikor az együttes sűrűségfüggvényt határozzuk meg deriválással, az x_1 változó szerint konstans függvényt kell deriválni, így az ilyen helyeken a sűrűségfüggvény nulla.

Tehát

$$\begin{aligned}
P(X_1^{(n)} < x_1, X_2^{(n)} < x_2, \dots, X_n^{(n)} < x_n) &= \underset{\substack{(y_1,\dots,y_n)\in(0,t)^n \\ y_i^{(n)}<x_i,\, i=1,\dots,n}}{\int\cdots\int} \frac{1}{t^n}\,\mathsf{d}y_1\dots\mathsf{d}y_n \\
&= n! \underset{\substack{(y_1,\dots,y_n)\in(0,t)^n \\ y_1\leqslant\cdots\leqslant y_n,\, y_i<x_i,\, i=1,\dots,n}}{\int\cdots\int} \frac{1}{t^n}\,\mathsf{d}y_1\dots\mathsf{d}y_n,
\end{aligned}$$

ugyanis $P(X_1^{(n)} < x_1, X_2^{(n)} < x_2, \dots, X_n^{(n)} < x_n)$ az $X_1, \dots, X_n$ minta egy függvényének várható értékeként írható fel, és az $X_1, \dots, X_n$ minta együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X_1,\dots,X_n}(y_1,\dots,y_n) = \begin{cases} \frac{1}{t^n} & \text{ha} \quad y_i \in (0,t), \ \ i = 1,\dots,n, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

az utolsó lépésben pedig az integrandus $y_1, \dots, y_n$-ben való szimmetriáját, illetve azt használtuk fel, hogy egy permutáció mátrix determinánsának abszolútértéke 1-el egyenlő.

Ezért

$$f_{X_1^{(n)},\dots,X_n^{(n)}}(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n} & \text{ha} \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant t, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Valóban, minden $n \in \mathbb{N}$ és $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant t$ esetén

$$\begin{aligned}
P(X_1^{(n)} < t_1, X_2^{(n)} < t_2, \dots, X_n^{(n)} < t_n) &= \frac{n!}{t^n} \underset{\substack{x_i\leqslant t_i, i=1,\dots,n \\ 0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant t}}{\int\cdots\int} 1\,\mathsf{d}x_1\dots\mathsf{d}x_n \\
&= \frac{n!}{t^n} \int_0^{t_1} \int_{x_1}^{t_2} \cdots \int_{x_{n-1}}^{t_n} 1\,\mathsf{d}x_1\dots\mathsf{d}x_n.
\end{aligned}$$

Ez utóbbi pedig megegyezik (1.7.13) jobboldalával. □

1.7.16. Következmény. *Legyen* $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ λ *paraméterű Poisson-folyamat. Ekkor minden* $n \in \mathbb{N}$ *és* $t > 0$ *esetén* $T_1, \dots, T_{n-1}$ *együttes eloszlása a* $\{T_n = t\}$ *feltételre vonatkozóan megegyezik a* $(0,t)$ *intervallumon egyenletes eloszlásból vett* $n-1$ *elemű rendezett minta együttes eloszlásával.*

Bizonyítás. Hasonlóan bizonyítható, mint az 1.7.15. Tétel. Ross [7], 230. oldalán találunk egy heurisztikus gondolatmenetet arra vonatkozóan, hogyan vezethető vissza ez az állítás az 1.7.15. Tételre. □

1.7.17. Megjegyzés. Ha például $\xi_1 = 3$, és arra vagyunk kíváncsiak, hogy a $(0,1)$ időintervallumban várhatóan milyen időpontokban következett be a $\xi_1 = 3$ által jelzett 3 darab esemény, akkor azt mondhatjuk, hogy a bekövetkezési időpontok együttes eloszlása a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlásra vett 3 elemű rendezett minta eloszlásával egyezik meg. Jelölje X_1^*, X_2^*, X_3^* a szóbanforgó rendezett mintát. Ismert, hogy $\mathbb{E}X_i^* = \frac{i}{4}$, $i = 1,2,3$. Így a szóbanforgó 3 darab esemény várhatóan az $1/4$, $2/4$ és $3/4$ időpontokban következett be. □

Az alábbiakban azt vizsgáljuk meg, hogyan jön be a Poisson-folyamatnál a binomiális eloszlás.

1.7.18. Állítás. *Legyen* $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ λ *paraméterű Poisson-folyamat. Ekkor minden* $0 < u < t$ *és* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* ξ_u *feltételes eloszlása a* $\xi_t = n$ *feltételre vonatkozóan* n*-edrendű,* u/t *paraméterű binomiális eloszlás. Azaz minden* $0 < u < t$ *és* $k \leqslant n$, $k, n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$P(\xi_u = k \,|\, \xi_t = n) = \binom{n}{k}\left(\frac{u}{t}\right)^k\left(1-\frac{u}{t}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\frac{u^k(t-u)^{n-k}}{t^n}.$$

Bizonyítás. Ugyanis a Poisson-folyamat tulajdonságai alapján

$$\begin{aligned}
P(\xi_u = k \,|\, \xi_t = n) &= \frac{P(\xi_u = k, \xi_t = n)}{P(\xi_t = n)} = \frac{P(\xi_u = k, \xi_t - \xi_u = n-k)}{P(\xi_t = n)} \\
&= \frac{P(\xi_u = k)P(\xi_t - \xi_u = n-k)}{P(\xi_t = n)} \\
&= \frac{\frac{(\lambda u)^k}{k!}e^{-\lambda u}\frac{(\lambda(t-u))^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(t-u)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}} = \binom{n}{k}\frac{u^k(t-u)^{n-k}}{t^n}.
\end{aligned}$$

□

Poisson-folyamat ritkítása

Az 1.7.12. Állítás szerint, ha egy λ paraméterű Poisson-folyamat minden egyes ,,eseményét" egymástól függetlenül I. vagy II. típusúnak osztályozzuk p, ill. $1-p$ valószínűséggel, akkor az I-típusú, ill. II-típusú események számláló-folyamatai egymástól független λp, ill. $\lambda(1-p)$ paraméterű Poisson-folyamatok.

Vizsgáljunk most egy kicsit összetettebb helyzetet. Tegyük fel, hogy a bekövetkező eseményeket k darab, egymástól különböző típusúnak osztályozhatjuk és az, hogy egy eseményt milyen típusúnak minősítünk függ attól is, hogy mikor következik be. Tegyük fel, hogy ha egy esemény az y időpontban következik be, akkor őt $p_i(y)$ valószínűséggel minősítjük i-edik típusúnak $(i = 1, \ldots, k)$, minden olyan eseménytől (és annak minősítésétől) függetlenül, ami előtte következett be. (Nyilván $\sum_{i=1}^k p_i(y) = 1$ minden $y \geqslant 0$ esetén.) Az 1.7.12. Állítás alapján bizonyítható a következő állítás.

1.7.19. Állítás. (Ross [7], Chapter 5, Proposition 3.3) *Legyen* $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ λ *paraméterű Poisson-folyamat és tekintsük az előző konstrukciót. Jelölje* $\xi_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$ *a* $t \geqslant 0$ *időpontig bekövetkező* i*-edik típusú események számát. Ekkor minden* $t \geqslant 0$ *esetén*

$\xi_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$ független Poisson eloszlású valószínűségi változók $\mathbb{E}(\xi_i(t)) = \lambda \int_0^t p_i(s)\,\mathsf{d}s$ paraméterekkel.

Az alábbiakban megfogalmazunk még két érdekes állítást.

1.7.20. Állítás. (Poisson-folyamatra vonatkozó nagy számok erős törvénye) *Legyen $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-folyamat. Ekkor*

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{t\to\infty} \frac{\xi_t(\omega)}{t} = \lambda\right\}\right) = 1.$$

Bizonyítás. Legyen $t > 0$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor ξ_t definíciója miatt $T_{\xi_t} \leqslant t < T_{\xi_t+1}$. Ha $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $\xi_t(\omega) > 0$, úgy

$$\frac{T_{\xi_t(\omega)}(\omega)}{\xi_t(\omega)} \leqslant \frac{t}{\xi_t(\omega)} < \frac{T_{\xi_t(\omega)+1}(\omega)}{\xi_t(\omega)} = \frac{T_{\xi_t(\omega)+1}(\omega)}{\xi_t(\omega)+1}\frac{\xi_t(\omega)+1}{\xi_t(\omega)}. \tag{1.7.14}$$

Megmutatjuk, hogy $P(\lim_{t\to\infty} \xi_t = +\infty) = 1$. Tudjuk, hogy P-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén a $t \in [0, +\infty) \mapsto \xi_t(\omega)$ trajektória monoton növekvő. Tegyük fel, hogy valamely $\omega \in \Omega$ esetén a $t \in [0, +\infty) \mapsto \xi_t(\omega)$ trajektória korlátos. Ekkor létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ és $t_0 \in [0, +\infty)$, hogy $\xi_{t_0}(\omega) = n_0$ és $\xi_t(\omega) \leqslant n_0$ bármilyen $t \in [0, +\infty)$ esetén. Így ξ_t definíciója alapján $T_{n_0+1}(\omega) > t$, ha $t \in [0, +\infty)$. Felhasználva, hogy

$$P\big(T_{n_0+1} > t, \forall\, t \in [0, +\infty)\big) \leqslant P(T_{n_0+1} > t), \quad t \in [0, +\infty),$$

és $\lim_{t\to\infty} P(T_{n_0+1} > t) = 0$, kapjuk, hogy $P(T_{n_0+1} > t, \forall\, t \in [0, +\infty)) = 0$. Ezért P-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén a $t \in [0, +\infty) \mapsto \xi_t(\omega)$ trajektória nem korlátos. Felhasználva, hogy egy monoton növekvő, nem korlátos (valós) sorozat $+\infty$-hez konvergál, kapjuk, hogy $P(\lim_{t\to\infty} \xi_t = +\infty) = 1$. A nagy számok erős törvénye alapján tudjuk, hogy

$$\frac{T_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n \eta_k}{n} \to \mathbb{E}\eta_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad P\text{-m.m.}$$

Mivel $P(\lim_{t\to\infty} \xi_t = +\infty) = 1$ és ξ_t nemnegatív értékű, kapjuk, hogy

$$\frac{T_{\xi_t}}{\xi_t} \to \frac{1}{\lambda}, \quad P\text{-m.m.} \tag{1.7.15}$$

Mivel $P(\lim_{t\to\infty} \xi_t = +\infty) = 1$, az is következik, hogy

$$P\Big(\Big\{\omega \in \Omega \,|\, \exists\, t_0 \geqslant 0 : \xi_t(\omega) > 0, \forall\, t \geqslant t_0\Big\}\Big) = 1.$$

Így (1.7.14) és (1.7.15) alapján P-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén

$$\frac{1}{\lambda} \leqslant \liminf_{t\to\infty} \frac{t}{\xi_t(\omega)} \leqslant \limsup_{t\to\infty} \frac{t}{\xi_t(\omega)} \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

Ezért P-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén létezik a $\lim_{t\to\infty} \frac{t}{\xi_t(\omega)}$ határérték és $\frac{1}{\lambda}$-val egyenlő. Ebből már következik a bizonyítandó állítás. □

1.7.21. Állítás. *Legyen* $\lambda > 0$ *és* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *nemnegatív egész értékű valószínűségi változók sorozata. Ekkor* X_n *akkor és csak akkor konvergál eloszlásban a* λ *paraméterű Poisson eloszláshoz, amint* $n \to +\infty$, *ha minden* $\varphi : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ *korlátos függvényre*

$$\lim_{n\to\infty} \Big[\mathbb{E}(X_n\varphi(X_n)) - \lambda\mathbb{E}\varphi(X_n+1)\Big] = 0.$$

Bizonyítás. Lásd, L. H. Y. Chen: Poisson approximation for dependent trials, *Ann. Probab.* 3 (1975), 534-545, illetve Barbour, Holst, Janson: *Poisson approximation*, Oxford Studies in Probability, vol. 2, 1992. □

1.8. Nemstacionárius Poisson-folyamat, összetett Poisson-folyamat

1.8.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy* $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ **nemstacionárius (más néven inhomogén) Poisson-folyamat** $\lambda(t)$, $t \geqslant 0$ **intenzitásfüggvénnyel** *(ahol* $\lambda(t)$, $t \geqslant 0$, *egy nemnegatív, lokálisan integrálható függvény), ha*

(i) $\xi_0 = 0$ *és nemnegatív egész értékű,*

(ii) *független növekményű,*

(iii) *tetszőleges* $t \geqslant 0$ *esetén* $P(\xi_{t+h} - \xi_t \geqslant 2) = o(h)$ *és* $P(\xi_{t+h} - \xi_t = 1) = \lambda(t)h + o(h)$,

(iv) *a* $t \mapsto \xi_t$ *trajektóriák jobbról folytonosak.*

(Azon, hogy $\lambda(t)$, $t \geqslant 0$, *lokálisan integrálható azt értjük, hogy* $[0, +\infty)$ *minden véges részintervallumán integrálható függvény.)*

Vezessük be az $m(t) := \int_0^t \lambda(s)\,\mathsf{d}s$, $t \geqslant 0$ jelölést. Mivel $\lambda(t)$, $t \geqslant 0$, lokálisan integrálható, $m(t) \in [0, +\infty)$, $t \geqslant 0$. Megmutatható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $s, t \geqslant 0$ esetén

$$P(\xi_{t+s} - \xi_t = n) = \frac{(m(t+s) - m(t))^n}{n!} e^{-(m(t+s)-m(t))}. \tag{1.8.1}$$

Tehát $\xi_{t+s} - \xi_s$ Poisson eloszlású $m(t+s) - m(t)$ paraméterrel. Speciálisan ξ_t Poisson eloszlású $m(t)$ várható értékkel, ezért az $m(t)$ függvényt a folyamat **várható érték függvényének** is szokás hívni. Abban a speciális esetben mikor $\lambda(t) \equiv \lambda$ (azaz $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ λ paraméterű Poisson-folyamat), $m(t) = \lambda t$. A nemstacionárius Poisson-folyamat jelentőségére az alábbi példa mutat rá.

1.8.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $\{X_t : t \geqslant 0\}$ *sztochasztikus folyamat* λ **paraméterű összetett Poisson-folyamat**, *ha előállítható*

$$X_t = \sum_{i=1}^{\xi_t} Y_i, \qquad t \geqslant 0 \tag{1.8.2}$$

alakban, ahol $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ λ *paraméterű Poisson-folyamat,* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ *független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek függetlenek a* $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ *Poisson-folyamattól is.*

1.8.3. Megjegyzés. (i) Az $Y_n \equiv 1$, $n \in \mathbb{N}$ választással $X_t = \xi_t$, $t \geqslant 0$, így visszakapjuk a szokásos Poisson-folyamatot.

(ii) Tegyük fel, hogy egy sporteseményre buszok szállítják a nézőket. Jelölje ξ_t a t időpontig induló buszok számát és tegyük fel, hogy $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ Poisson-folyamat. Tegyük fel továbbá, hogy az egyes buszok által szállított utasok számát leíró valószínűségi változók egymástól függetlenek és azonos eloszlásúak. Jelölje X_t a t időpontig a rendezvényre megérkezett nézők számák. Ekkor $\{X_t : t \geqslant 0\}$ összetett Poisson-folyamat, az (1.8.2) reprezentációban Y_n jelenti az n-edik busszal érkező utasok számát.

1.8.4. Definíció. *Legyenek* X *és* Y *valószínűségi változók, hogy* $\mathbb{E}X^2 < +\infty$. *Ekkor* X**-nek** Y**-ra vonatkozó feltételes varianciáján** *a*

$$\mathrm{Var}(X \,|\, Y) := \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X \,|\, Y))^2 \,|\, Y\Big)$$

valószínűségi változót értjük.

1.8.5. Lemma. (Teljes szórásnégyzet tétele) *Legyenek* X *és* Y *valószínűségi változók, hogy* $\mathbb{E}X^2 < +\infty$. *Ekkor*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(\mathrm{Var}(X \,|\, Y)) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(X \,|\, Y)).$$

Bizonyítás. Felhasználva $\mathrm{Var}(X \,|\, Y)$ definícióját és azt, hogy $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi \,|\, \eta))$, $(\mathbb{E}|\xi| < +\infty)$ kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\mathrm{Var}(X \,|\, Y)) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X \,|\, Y))^2 = \mathbb{E}X^2 - 2\mathbb{E}(X\mathbb{E}(X \,|\, Y)) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \,|\, Y)^2).$$

Mivel $D^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$, adódik, hogy

$$\mathrm{Var}(\mathbb{E}(X \,|\, Y)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \,|\, Y)^2) - \big(\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \,|\, Y))\big)^2 = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \,|\, Y)^2) - (\mathbb{E}X)^2.$$

Így

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{Var}(X \,|\, Y)) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(X \,|\, Y)) &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 + 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \,|\, Y)^2) - 2\mathbb{E}(X\mathbb{E}(X \,|\, Y)) \\ &= D^2X + 2\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X \,|\, Y)\big(\mathbb{E}(X \,|\, Y) - X\big)\Big).\end{aligned}$$

Azt kell csak megmutatnunk, hogy

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X \,|\, Y)(\mathbb{E}(X \,|\, Y) - X)\Big) = 0.$$

Felhasználva újra, hogy $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi \,|\, \eta))$, $(\mathbb{E}|\xi| < +\infty)$ és, hogy $\mathbb{E}(f(\eta)\xi \,|\, \eta) = f(\eta)\mathbb{E}(\xi \,|\, \eta)$ kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X \,|\, Y)\Big(\mathbb{E}(X \,|\, Y) - X\Big)\Big) &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X \,|\, Y)\Big(\mathbb{E}(X \,|\, Y) - X\Big)\Big|\, Y\Big)\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}(X \,|\, Y)\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X \,|\, Y) - X\Big|\, Y\Big)\Big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}(X \,|\, Y)\Big(\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X \,|\, Y) \,|\, Y\big) - \mathbb{E}(X \,|\, Y)\Big)\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}(X \,|\, Y)\Big(\mathbb{E}(X \,|\, Y) - \mathbb{E}(X \,|\, Y)\Big)\Big] = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \,|\, Y) \cdot 0) = 0.\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy másként is bizonyíthattunk volna. Tekintsük az $X = (X-\mathbb{E}(X \,|\, Y)) + \mathbb{E}(X \,|\, Y)$ felbontást. Az előzőekben megmutattuk, hogy

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X \,|\, Y)\Big(\mathbb{E}(X \,|\, Y) - X\Big)\Big) = 0,$$

így

$$\mathrm{Var}X = \mathrm{Var}(X - \mathbb{E}(X \,|\, Y)) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(X \,|\, Y)).$$

Mivel $\mathrm{Var}(X - \mathbb{E}(X \,|\, Y)) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X \,|\, Y))^2$ és $\mathbb{E}(\mathrm{Var}(X \,|\, Y)) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X \,|\, Y))^2$ kapjuk a bizonyítandó állítást. □

1.8.6. Állítás. *Legyen* $\{X_t : t \geqslant 0\}$ λ *paraméterű összetett Poisson-folyamat. Ekkor*

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_t \,|\, \xi_t)) = \mathbb{E}\xi_t \mathbb{E}Y_1 = \lambda t \mathbb{E}Y_1, \tag{1.8.3}$$

$$\mathrm{Var}X_t = \mathbb{E}(\xi_t \mathrm{Var}Y_1) + \mathrm{Var}(\xi_t \mathbb{E}Y_1) = \lambda t \mathbb{E}Y_1^2. \tag{1.8.4}$$

Bizonyítás. Határozzuk meg először az $\mathbb{E}(X_t \,|\, \xi_t)$ feltételes várható értéket. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén, mivel ξ_t és $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ függetlenek, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X_t \,|\, \xi_t = n) = \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{\xi_t} Y_i \,|\, \xi_t = n\Big) = \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i \,|\, \xi_t = n\Big) = \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i\Big) = n\mathbb{E}Y_1.$$

Így

$$\mathbb{E}(X_t \,|\, \xi_t) = \xi_t \mathbb{E}(Y_1), \tag{1.8.5}$$

amiből $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_t \,|\, \xi_t)) = \mathbb{E}\xi_t \mathbb{E}Y_1 = \lambda t \mathbb{E}Y_1$.

Alkalmazva az 1.8.5. Lemmát $Y = \xi_t$-vel kapjuk, hogy

$$\mathrm{Var}X_t = \mathbb{E}(\mathrm{Var}(X_t \,|\, \xi_t)) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(X_t \,|\, \xi_t)).$$

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén, felhasználva, hogy ξ_t és $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ függetlenek és azt, hogy $\mathbb{E}(X_t \,|\, \xi_t) = \xi_t \mathbb{E}Y_1$, adódik, hogy

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_t \,|\, \xi_t = n) &= \mathbb{E}\Big(\big(X_t - \mathbb{E}(X_t \,|\, \xi_t)\big)^2 \,|\, \xi_t = n\Big) = \mathbb{E}\Big(\big(X_t - \xi_t \mathbb{E}Y_1\big)^2 \,|\, \xi_t = n\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\mathbb{E}Y_1\Big)^2 = \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i - \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i\Big)\Big)^2 \\
&= \mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i\Big) = n\mathrm{Var}Y_1,
\end{aligned}$$

így

$$\mathrm{Var}(X_t \,|\, \xi_t) = \xi_t \mathrm{Var}Y_1. \tag{1.8.6}$$

Ezért (1.8.5) és (1.8.6) alapján

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}X_t &= \mathbb{E}(\xi_t \mathrm{Var}Y_1) + \mathrm{Var}(\xi_t \mathbb{E}Y_1) = \lambda t \mathrm{Var}Y_1 + (\mathbb{E}Y_1)^2 \lambda t \\
&= \lambda t(\mathrm{Var}Y_1 + (\mathbb{E}Y_1)^2) = \lambda t \mathbb{E}Y_1^2,
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\mathrm{Var}\xi_t = \lambda t$, mivel ξ_t Poisson eloszlású λt paraméterrel. □

1.9. Ornstein–Uhlenbeck-folyamat

Az alábbiakban felidézzük a karakterisztikus függvényekre vonatkozó Hincsin–Bochner-tételt, és a Cauchy-eloszlással kapcsolatos számunkra lényeges tudnivalókat.

1.9.1. Tétel. (Hincsin–Bochner-tétel) *Egy* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *függvény akkor és csak akkor karakterisztikus függvénye valamely valószínűségi változónak, ha folytonos, pozitív szemidefinit és* $\varphi(0) = 1$.

Megjegyezzük, hogy φ pozitív szemidefinitsége azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ esetén a $(\varphi(t_j - t_l))_{j,l=1,\ldots,n}$ mátrix pozitív szemidefinit, azaz minden $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ esetén

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \varphi(t_j - t_l) z_j \overline{z_l} \geqslant 0.$$

1.9.2. Definíció. *Az* X *valószínűségi változót* (β, α) *paraméterű Cauchy-eloszlásúnak nevezzük, ahol* $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ *tetszőleges valós számok, ha eloszlásfüggvénye*

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Így X *sűrűségfüggvénye*

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (x-\beta)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Megmutatható, hogy ha Y $(0,1)$ paraméterű Cauchy-eloszlású, akkor $X := \alpha Y + \beta$, ahol $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, (β, α) paraméterű Cauchy-eloszlású. Ismert az is, hogy Y karakterisztikus függvénye $\varphi_Y(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$. Így

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\Big(e^{it(\alpha Y + \beta)}\Big) = e^{it\beta} e^{-\alpha|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A továbbiakban legyen ξ $(0, \alpha)$ paraméterű Cauchy-eloszlású. Ekkor $\varphi_\xi(t) = e^{-\alpha|t|}$, $t \in \mathbb{R}$. Így a Hincsin–Bochner-tétel szerint minden $c > 0$-ra a

$$K : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad K(s,t) := c\varphi_\xi(t-s) = ce^{-\alpha|t-s|}$$

függvény szimmetrikus és pozitív szemidefinit. Így az 1.4.13. Állítás szerint létezik olyan $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ Gauss-folyamat (valamilyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn), melynek 0 a várható érték függvénye és K a kovariancia-függvénye.

Megmutatjuk, hogy ennek a Gauss-folyamatnak van folytonos modifikációja. Az így definiált sztochasztikus folyamatot c és α paraméterű **Ornstein–Uhlenbeck-folyamat**nak hívjuk (OU-process). A Kolmogorov-kritérium alapján elég azt belátni, hogy léteznek olyan γ, d, $\varepsilon > 0$ számok, hogy

$$\mathbb{E}|\xi_t - \xi_s|^\gamma \leqslant d|t-s|^{1+\varepsilon}, \quad \forall\ s, t \geqslant 0.$$

(A modifikáció definíciója miatt a modifikáció is ugyanazon a valószínűségi mezőn lesz értelmezve, mint az alapul vett Gauss-folyamat.)

Az alábbiakban $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ véges dimenziós eloszlásait vizsgáljuk. Az nem igaz, hogy $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ független növekményű lenne, ugyanis tetszőleges $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[(\xi_{t_2} - \xi_{t_1})(\xi_{t_3} - \xi_{t_2})\Big] &= \operatorname{cov}(\xi_{t_2}, \xi_{t_3}) - \operatorname{cov}(\xi_{t_2}, \xi_{t_2}) - \operatorname{cov}(\xi_{t_1}, \xi_{t_3}) + \operatorname{cov}(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}) \\ &= c\Big[e^{-\alpha(t_3-t_2)} - 1 - e^{-\alpha(t_3-t_1)} + e^{-\alpha(t_2-t_1)}\Big].\end{aligned}$$

A $t_1 := 1/\alpha$, $t_2 := 2/\alpha$, $t_3 := 3/\alpha$ választással kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\Big[(\xi_{t_2} - \xi_{t_1})(\xi_{t_3} - \xi_{t_2})\Big] = c\Big[e^{-1} - 1 - e^{-2} + e^{-1}\Big] \approx -c \cdot 0,399 \neq 0.$$

Fennáll azonban, hogy tetszőleges $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ esetén az alábbi, módosított növekmények függetlenek

$$\xi_{t_2} - e^{-\alpha(t_2-t_1)}\xi_{t_1}, \qquad \xi_{t_4} - e^{-\alpha(t_4-t_3)}\xi_{t_3}.$$

Valóban, mivel $\mathbb{E}\xi_t = 0,\, t \geqslant 0$ kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[(\xi_{t_2} - e^{-\alpha(t_2-t_1)}\xi_{t_1})(\xi_{t_4} - e^{-\alpha(t_4-t_3)}\xi_{t_3})\Big] \\ &= \operatorname{cov}(\xi_{t_2}, \xi_{t_4}) - e^{-\alpha(t_4-t_3)}\operatorname{cov}(\xi_{t_2}, \xi_{t_3}) - e^{-\alpha(t_2-t_1)}\operatorname{cov}(\xi_{t_1}, \xi_{t_4}) + e^{-\alpha(t_2-t_1)}e^{-\alpha(t_4-t_3)}\operatorname{cov}(\xi_{t_1}, \xi_{t_3}) \\ &= c\Big[e^{-\alpha(t_4-t_2)} - e^{-\alpha(t_4-t_3)}e^{-\alpha(t_3-t_2)} - e^{-\alpha(t_2-t_1)}e^{-\alpha(t_4-t_1)} + e^{-\alpha(t_2-t_1)}e^{-\alpha(t_4-t_3)}e^{-\alpha(t_3-t_1)}\Big] = 0.\end{aligned}$$

Így a megfelelően módosított növekmények már korrelálatlanok. Ekkor a

$$\Big(\xi_{t_2} - e^{-\alpha(t_2-t_1)}\xi_{t_1},\ \xi_{t_4} - e^{-\alpha(t_4-t_3)}\xi_{t_3}\Big) \tag{1.9.1}$$

vektor normális eloszlású, ugyanis $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \xi_{t_3}, \xi_{t_4})$ normális eloszlású, mivel $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ Gauss-folyamat, és ezen vektor egy speciális lineáris kombinációjaként megkapható (1.9.1) tetszőleges lineáris kombinációja (lásd az 1.4.11. Állítást). Így adódik, hogy a szóbanforgó módosított növekmények függetlenek.

Tetszőleges $0 \leqslant s < t$ esetén meghatározzuk az f_{ξ_s,ξ_t} sűrűségfüggvényt. Mivel $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ Gauss-folyamat, kapjuk, hogy (ξ_s, ξ_t) 2-dimenziós normális eloszlású, várható érték vektora $(0, 0)$, kovariancia-mátrixa

$$D := \begin{pmatrix}\operatorname{cov}(\xi_s, \xi_s) & \operatorname{cov}(\xi_s, \xi_t) \\ \operatorname{cov}(\xi_t, \xi_s) & \operatorname{cov}(\xi_t, \xi_t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & ce^{-\alpha(t-s)} \\ ce^{-\alpha(t-s)} & c\end{pmatrix}.$$

Így

$$f_{\xi_s,\xi_t}(\underline{x}) = f_{\xi_s,\xi_t}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det D}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\langle D^{-1}\underline{x}, \underline{x}\rangle\Big\}.$$

Itt $\det D = c^2 - c^2 e^{-2\alpha(t-s)} = c^2(1 - e^{-2\alpha(t-s)})$, és

$$D^{-1} = \frac{1}{c^2(1 - e^{-2\alpha(t-s)})} \begin{pmatrix} c & -ce^{-\alpha(t-s)} \\ -ce^{-\alpha(t-s)} & c \end{pmatrix} = \frac{1}{c(1 - e^{-2\alpha(t-s)})} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-\alpha(t-s)} \\ -e^{-\alpha(t-s)} & 1 \end{pmatrix},$$

valamint

$$\left\langle D^{-1}\underline{x}, \underline{x} \right\rangle = \underline{x}^\top D^{-1} \underline{x} = \frac{1}{c(1 - e^{-2\alpha(t-s)})} \Big(x_1^2 - 2x_1 x_2 e^{-\alpha(t-s)} + x_2^2 \Big).$$

Így minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_{\xi_s,\xi_t}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi c\sqrt{1 - e^{-2\alpha(t-s)}}} \exp\left\{ - \frac{1}{2c(1 - e^{-2\alpha(t-s)})} \big(x_1^2 - 2x_1 x_2 e^{-\alpha(t-s)} + x_2^2 \big) \right\}.$$

1.9.3. Megjegyzés. Az $\mathbb{E}|\xi_t - \xi_s|^\gamma$ várható értéket számolhatnánk az

$$\mathbb{E}|\xi_t - \xi_s|^\gamma = \int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^\gamma f_{\xi_s,\xi_t}(x, y) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

képlettel, azonban az integrálás nem könnyen végezhető el. Így más módszert keresünk a meghatározására. □

1.9.4. Megjegyzés. (OU-folyamat előállítása Wiener-folyamat segítségével) Az alábbiakban az Ornstein–Uhlenbeck-folyamathoz kiindulásul szolgáló $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ Gauss-folyamatot „átírjuk egy kicsit más alakban.” Legyen

$$\eta_t := \sqrt{c} e^{-\alpha t} W_{e^{2\alpha t}}, \quad t \geqslant 0,$$

ahol $\{W_t : t \geqslant 0\}$ egy standard Wiener-folyamat. Ezt hívják Lamperti-transzformációnak (az η és W közötti kapcsolatot). Megmutatjuk, hogy $\{\eta_t : t \geqslant 0\}$ is Gauss-folyamat és ugyanolyan véges dimenziós eloszlásokkal rendelkezik, mint a $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ Gauss-folyamat. Ekkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ esetén

$$\begin{aligned} &\Big(\eta_{t_1} = \sqrt{c} e^{-\alpha t_1} W_{e^{2\alpha t_1}}, \; \cdots, \; \eta_{t_n} = \sqrt{c} e^{-\alpha t_n} W_{e^{2\alpha t_n}} \Big) \\ &\qquad = \begin{pmatrix} \sqrt{c} e^{-\alpha t_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{c} e^{-\alpha t_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{c} e^{-\alpha t_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{e^{2\alpha t_1}} \\ W_{e^{2\alpha t_2}} \\ \vdots \\ W_{e^{2\alpha t_n}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mivel $\{W_t : t \geqslant 0\}$ Gauss-folyamat és $e^{2\alpha t_1} < \cdots < e^{2\alpha t_n}$, kapjuk, hogy $(W_{e^{2\alpha t_1}}, \dots, W_{e^{2\alpha t_n}})$ n-dimenziós normális eloszlású, és így $(\eta_{t_1}, \dots, \eta_{t_n})$ is n-dimenziós normális eloszlású. Tudva azt, hogy Gauss-folyamatokkal állunk szemben, ahhoz, hogy a véges dimenziós eloszlások megegyezzenek elegendő azt ellenőrizni, hogy a két folyamat várható érték függvénye és kovariancia-függvénye megegyezik. (Gondoljunk arra, hogy egy többdimenziós normális eloszlás karakterisztikus függvényét várható érték vektora és kovariancia-mátrixa egyértelműen meghatározza.) Ekkor

$$\mathbb{E}\eta_t = \sqrt{c}e^{-\alpha t}\mathbb{E}(W_{e^{2\alpha t}}) = 0,$$

és

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\eta_s,\eta_t) &= ce^{-\alpha(t+s)}\operatorname{cov}(W_{e^{2\alpha s}},W_{e^{2\alpha t}}) = ce^{-\alpha(t+s)}e^{2\alpha(t\wedge s)} = \begin{cases} ce^{-\alpha(s-t)} & \text{ha} \quad s\geqslant t,\\ ce^{-\alpha(t-s)} & \text{ha} \quad s<t,\end{cases}\\ &= ce^{-\alpha|t-s|} = \operatorname{cov}(\xi_s,\xi_t).\end{aligned}$$

□

Így kapjuk, hogy $\mathbb{E}|\xi_t-\xi_s|^\gamma = \mathbb{E}|\eta_t-\eta_s|^\gamma$. Megmutatjuk, hogy a Kolmogorov-kritériumban $\gamma=2$ választás még nem elég, ugyanis csak azt tudjuk igazolni, hogy

$$\mathbb{E}(\xi_t-\xi_s)^2 = 2c(1-e^{-\alpha|t-s|}) \leqslant 2c\alpha|t-s|. \tag{1.9.2}$$

(Az lenne a jó, ha $|t-s|$ 1-nél nagyobb kitevőn szerepelne.) Valóban, mivel $\mathbb{E}\xi_t = \mathbb{E}\xi_s = 0$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi_t-\xi_s)^2 &= \mathbb{D}^2(\xi_t-\xi_s) = \operatorname{cov}(\xi_t,\xi_t) - 2\operatorname{cov}(\xi_t,\xi_s) + \operatorname{cov}(\xi_s,\xi_s)\\ &= ce^{-\alpha 0} - 2ce^{-\alpha|t-s|} + ce^{-\alpha 0} = 2c(1-e^{-\alpha|t-s|}) \leqslant 2c\alpha|t-s|,\end{aligned}$$

ugyanis $1-e^{-x}\leqslant x$ minden $x\in\mathbb{R}$ esetén. Az $r=3$ választás azért nem tűnik jónak, mert megmarad az abszolút érték. Legyen most $\gamma=4$ és $0\leqslant s<t$. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi_t-\xi_s)^4 = \mathbb{E}(\eta_t-\eta_s)^4 &= \mathbb{E}\Big(\sqrt{c}e^{-\alpha t}W_{e^{2\alpha t}} - \sqrt{c}e^{-\alpha s}W_{e^{2\alpha s}}\Big)^4\\ &= c^2e^{-4\alpha s}\mathbb{E}\Big(e^{-\alpha(t-s)}W_{e^{2\alpha t}} - W_{e^{2\alpha s}}\Big)^4.\end{aligned}$$

Ezen várható érték egyszerűen kiszámolható, de az alábbi módszerrel még egyszerűbben kiszámolható $\mathbb{E}(\xi_t-\xi_s)^4$.

Felhasználva, hogy (ξ_s,ξ_t) 2-dimenziós normális eloszlású, kapjuk, hogy $\xi_t-\xi_s$ 1-dimenziós normális eloszlású (lineáris kombinációra gondolva). A korábbiak alapján $\xi_t-\xi_s$ várható értéke 0, szórásnégyzete pedig $2c(1-e^{-\alpha|t-s|})$, és így

$$\xi_t-\xi_s \sim \mathcal{N}\big(0, 2c(1-e^{-\alpha|t-s|})\big),$$

azaz

$$\xi_t-\xi_s \sim \sqrt{2c(1-e^{-\alpha|t-s|})}\,\mathcal{N}(0,1).$$

Ezért

$$\mathbb{E}(\xi_t-\xi_s)^4 = \Big(2c(1-e^{-\alpha|t-s|})\Big)^2\mathbb{E}\mathcal{N}(0,1)^4 = 4c^2(1-e^{-\alpha|t-s|})^2\cdot 3,$$

és felhasználva (1.9.2)-at kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi_t-\xi_s)^4 \leqslant 3(2c\alpha|t-s|)^2 = 12c^2\alpha^2(t-s)^2.$$

Azaz a Kolmogorov-kritérium teljesül $\gamma=4$, $\varepsilon=1$ és $d=12c^2\alpha^2$ választásokkal.

2. Feladatok

2.1. Alapfogalmak, független növekményű folyamatok

2.1.1. Feladat. Igaz-e, hogy az összes valós értékű sztochasztikus folyamat halmazán nem vezethető be olyan művelet, amelyre nézve az csoport?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* $+$ legyen a művelet. □

2.1.2. Feladat. Létezik-e olyan $\{X_t : t \geqslant 0\}$ sztochasztikus folyamat, hogy tetszőleges $t, s \geqslant 0$ esetén $X_t X_s$ értelmezhető és léteznek olyan $t_1, t_2, t_3 \geqslant 0$ számok, hogy

$$(X_{t_1} X_{t_2}) X_{t_3} \neq X_{t_1}(X_{t_2} X_{t_3})?$$

Megoldás. A válasz: **Igen.** *Indoklás:* Legyen $\{X_t : t \geqslant 0\}$ egy olyan sztochasztikus folyamat, melynek fázistere a Cayley-gyűrű. A Cayley-gyűrű definíciója a következő. Tekintsük a következő 8 dimenziós, $\mathbb{R}$ feletti vektorteret

$$\left\{a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k + a_5 l + a_6 ie + a_7 jl + a_8 kl \,\middle|\, a_i \in \mathbb{R},\, i = 1, \ldots, 8\right\},$$

ahol a bázis elemek szorzása a következőképpen van megadva:

·	1	i	j	k	e	ie	je	ke
1	1	i	j	k	e	ie	je	ke
i	i	-1	k	-j	ie	-e	-ke	je
j	j	-k	-1	i	je	ke	-e	-ie
k	k	j	-i	-1	ke	-je	ie	-e
e	e	-ie	-je	-ke	-1	i	j	k
ie	ie	e	-ke	je	-i	-1	-k	j
je	je	ke	e	-ie	-j	k	-1	-i
ke	ke	-je	ie	e	-k	-j	i	-1

A Cayley-gyűrű egy nem asszociatív gyűrű, mivel $(ij)e = ke$ és $i(je) = -ke$. □

2.1.3. Feladat. Igaz-e, hogy ekvivalens folyamatok modifikációi is ekvivalensek?

Megoldás. A válasz: **Igen.** *Indoklás:* Egy folyamat ekvivalens a modifikációival, és folyamatok ekvivalenciája ekvivalencia-reláció. □

2.1.4. Feladat. Legyenek $\{X_t : t \geqslant 0\}$ és $\{Y_t : t \geqslant 0\}$ stacionárius, független növekményű sztochasztikus folyamatok. Igaz-e, hogy ekkor véges dimenziós eloszlásaik megegyeznek?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* Legyen $\{W_t : t \geqslant 0\}$ egy standard Wiener-folyamat. Ekkor a $\{2W_t : t \geqslant 0\}$ folyamat is stacionárius, független növekményű. De a véges dimenziós eloszlásaik nem egyeznek meg. □

2.1.5. Feladat. Legyen $\{X_t : t \geqslant 0\}$ egy olyan sztochasztikus folyamat, melyre

$$\mathbb{E}(|X_{t+h} - X_t|) \leqslant h, \quad t \geqslant 0, \quad h > 0.$$

Igaz-e, hogy ekkor létezik folytonos modifikációja a folyamatnak?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* Ellenpéldát adunk. Legyen $\{X_t : t \geqslant 0\}$ 1-paraméterű Poisson-folyamat. Ekkor $X_{t+h} - X_t$ eloszlása megegyezik X_h eloszlásával, tehát h-paraméterű Poisson eloszlás. Így $\mathbb{E}|X_{t+h} - X_t| = h$, $t \geqslant 0$, $h > 0$. Viszont a folyamatnak nem létezik folytonos modifikációja, mert ha $\{Y_t : t \geqslant 0\}$ folytonos modifikáció volna, akkor $P(X_t \in \mathbb{Z}_+) = 1, t \geqslant 0$, miatt $P(Y_t \in \mathbb{Z}_+) = 1, t \geqslant 0$, volna. Ezért

$$P\big(Y_t \in \mathbb{Z}_+ : \forall\, t \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}\big) = 1 \qquad \text{teljesülne.} \tag{2.1.1}$$

Nyilván

$$\Big\{Y_t \in \mathbb{Z}_+ : \forall\, t \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}\Big\} \cap \Big\{Y : \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \quad \text{folytonos}\Big\} \subset \Big\{Y_t = Y_0 : \forall\, t \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}\Big\}.$$

Felhasználva, hogy $P(Y_t = Y_0 : \forall\, t \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}) = 0$, (2.1.1) alapján kapjuk, hogy

$$P\big(Y : \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \quad \text{folytonos}\big) = 0,$$

és így $P\big(Y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \text{folytonos}\big) = 0$. Azaz ellentmondásra jutottunk. Felhívjuk a figyelmet, hogy a feladatbeli feltétel nem a Kolmogorov-kritériumban szereplő feltétel, ugyanis a jobboldalon $h^{1+\beta}$ (valamilyen $\beta > 0$-val) helyett h áll. □

2.1.6. Feladat. Igaz-e, hogy ha $\{X_t : t \geqslant 0\}$ és $\{Y_t : t \geqslant 0\}$ olyan független, stacionárius növekményű sztochasztikus folyamatok, hogy véges dimenziós eloszlásaik megegyeznek, akkor $P(X_t = Y_t) = 1$ minden $t \geqslant 0$-ra? (A feladat megoldása során a független növekményűség 1.3.1. Definíciójában tekintsünk el attól, hogy a folyamat 0-ból indul.)

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* Legyenek X és Y olyan valószínűségi változók, hogy $F_X(x) = F_Y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, azaz ugyanolyan eloszlásúak, de $P(X = Y) < 1$. (Erre példa: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y := -X$.) Legyen $X_t := X, t \geqslant 0$ és $Y_t = Y, t \geqslant 0$.

Megadunk egy másik ellenpéldát is. Legyen $\{W_t : t \geqslant 0\}$ egy standard Wiener-folyamat és ξ egy olyan standard normális eloszlású valószínűségi változó, mely független a $\sigma(W_t : t \geqslant 0)$ σ-algebrától. Legyen $X_t := \xi + W_t, t \geqslant 0$, és $Y_t := -\xi + W_t, t \geqslant 0$. Ekkor nyilván

$$P(X_t = Y_t) = P(\mathcal{N}(0,1) = 0) = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Továbbá, minden $t \geqslant 0$ esetén X_t és Y_t eloszlása megegyezik, hiszen karakterisztikus függvényeik megegyeznek:

$$\mathbb{E}e^{iuX_t} = \mathbb{E}e^{iuY_t} = e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{u^2 t}{2}}, \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Mivel az triviálisan adódik, hogy $\{X_t : t \geqslant 0\}$ és $\{Y_t : t \geqslant 0\}$ független, stacionárius növekményű folyamatok, az egydimenziós eloszlásaik egyezéséből következik a véges dimenziós eloszlásaik azonossága is. □

2.1.7. Feladat. Legyen $\{X_t : t \in [0,1]\}$ egy sztochasztikus folyamat. Igaz-e, hogy $\{X_t : t \in [0,1]\}$ véges dimenziós eloszlásai egyértelműen meghatározzák $\sup_{t\in[0,1]} X_t$ eloszlását?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* Legyen $\Omega := [0,1]$, $\mathcal{A} := \mathcal{B}([0,1])$, P a $[0,1]$-en definiált Lebesgue-mérték. Legyen minden $t \in [0,1]$ esetén

$$X_t(\omega) := \mathbb{1}_{\{t\}}(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Ekkor $\{X_t : t \in [0,1]\}$ sztochasztikus folyamat. Valóban, tetszőleges $t \in [0,1]$ és $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén

$$X_t^{-1}(B) = \begin{cases} [0,1] & \text{ha } 0,1 \in B, \\ [0,1] \setminus \{t\} & \text{ha } 0 \in B \text{ és } 1 \notin B, \\ \{t\} & \text{ha } 1 \in B \text{ és } 0 \notin B, \\ \emptyset & \text{ha } 0,1 \notin B, \end{cases}$$

és így $X_t^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Legyen továbbá minden $t \in [0,1]$ esetén $Y_t \equiv 0$, és tekintsük az $\{Y_t : t \in [0,1]\}$ sztochasztikus folyamatot. Ekkor $\sup_{t\in[0,1]} Y_t \equiv 0$ és $\sup_{t\in[0,1]} X_t \equiv 1$. Azt kell még belátni, hogy a két sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásai megegyeznek. Legyenek $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant 1$ és $i_1, \dots, i_n \in \{0,1\}$ tetszőlegesek. Azt kell belátni, hogy $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$ együttes eloszlása megegyezik $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) = (0, \dots, 0)$ eloszlásával. Mivel minden X_{t_i} a 0 vagy az 1 értéket veheti fel, ez azzal ekvivalens, hogy ha létezik olyan $j \in \{1, \dots, n\}$, hogy $i_j = 1$, akkor $P(X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) = 0$, egyébként pedig $P(X_{t_1} = 0, \dots, X_{t_n} = 0) = 1$. Ekkor

$$P\big(X_{t_1} = 0, \dots, X_{t_n} = 0\big) = P\big([0,1] \setminus \{t_1, \dots, t_n\}\big) = 1 - 0 = 1,$$

mert véges halmaz Lebesgue-mértéke 0. A másik esetben pedig

$$P\big(X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n\big) \leqslant P\big(\{\omega \in \Omega : \omega = t_{i_j}\}\big) = 0,$$

és így $P(X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) = 0$. □

2.1.8. Feladat. Legyen $\{X_n : n \geqslant 1\}$ egy olyan sztochasztikus folyamat, melynek fázistere $\mathbb{Z}$. Igaz-e, hogy ekkor

$$\tau(\omega) := \begin{cases} \sup\{n > 0 : X_n(\omega) \geqslant 1\} & \text{ha } \exists\, n > 0 : X_n(\omega) \geqslant 1, \\ +\infty & \text{egyébként} \end{cases}$$

megállítási időpont az $\mathcal{F}_n := \sigma(X_k, 1 \leqslant k \leqslant n)$, $n \in \mathbb{N}$ filtrációra nézve?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* A $\{\tau = n\}$ esemény nem csak az $X_1, X_2, \dots, X_n$ valószínűségi változóktól függ, hanem az összes többitől is. □

2.2. Wiener-folyamat és Gauss-folyamatok

2.2.1. Feladat. Igaz-e, hogy egy standard Wiener-folyamat trajektóriáinak egy valószínűséggel megszámlálhatóan végtelen sok szakadási pontja van?

Megoldás. A válasz: **Igen.** □

2.2.2. Feladat. Legyen $(W_t)_{t\geqslant 0}$ egy standard Wiener-folyamat. Igaz-e, hogy a $\{W_t : t\geqslant 0\}$ rendszer egyenletesen integrálható?

Megoldás. A válasz: **Nem.**

1. Indoklás (Definíció alapján): Azt kell ellenőrizni, hogy

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{t\in[0,+\infty)}\mathbb{E}[|W_t|\,\mathbb{1}_{\{|W_t|\geqslant R\}}]=0.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|W_t|\,\mathbb{1}_{\{|W_t|\geqslant R\}}] &\geqslant R\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{|W_t|\geqslant R\}}]=RP(|W_t|\geqslant R)=R\,[1-P(-R<W_t<R)]\\
&=R\left[1-P\left(-\frac{R}{\sqrt{t}}<\mathcal{N}(0,1)<\frac{R}{\sqrt{t}}\right)\right]=R\left[1-\left(\Phi\left(\frac{R}{\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(-\frac{R}{\sqrt{t}}\right)\right)\right]\\
&=R\left[1-\left(2\Phi\left(\frac{R}{\sqrt{t}}\right)-1\right)\right]=2R\left(1-\Phi\left(\frac{R}{\sqrt{t}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,+\infty)}\mathbb{E}[|W_t|\mathbb{1}_{\{|W_t|\geqslant R\}}]&\geqslant 2R\sup_{t\in[0,+\infty)}\left(1-\Phi\left(\frac{R}{\sqrt{t}}\right)\right)\\
&=2R\left(1-\inf_{t\in[0,+\infty)}\Phi\left(\frac{R}{\sqrt{t}}\right)\right)=2R\left(1-\frac{1}{2}\right)=R,
\end{aligned}$$

hiszen $\Phi(+\infty)=1$ és $\Phi(0)=1/2$. Ezért

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{t\in[0,+\infty)}\mathbb{E}[|W_t|\,\mathbb{1}_{\{|W_t|\geqslant R\}}]\geqslant\liminf_{R\to\infty}R=+\infty\neq 0.$$

2. Indoklás: Tegyük fel, hogy igaz az állítás. Mivel egy standard Wiener-folyamat folytonos martingál is, a Doob-tétel miatt létezne olyan W_∞ valószínűségi változó, hogy $W_t\to W_\infty$ L^1-ben, ha $t\to\infty$. Így speciálisan $\mathbb{E}|W_t|\to\mathbb{E}|W_\infty|$, ha $t\to\infty$ és $\mathbb{E}|W_\infty|<+\infty$. Azonban $\mathbb{E}|W_t|=\mathbb{E}\sqrt{t}|\mathcal{N}(0,1)|\to\infty$, ha $t\to\infty$, így ellentmondásra jutunk. □

2.2.3. Feladat. Legyen $\{W_t : t\geqslant 0\}$ egy standard Wiener-folyamat. Igaz-e, hogy ekkor létezik olyan A valószínűségi változó, hogy $\mathbb{E}|A|<+\infty$ és $W_t\to A$ L^1-ben, ha $t\to\infty$?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* az előző feladat 2. Indoklásánál már szerepelt. □

2.2.4. Feladat. (Ross [7], Example 2a, page 457 alapján) Józsi kapott az apukájától karácsonyra 1 darab MOL-részvényt (legyen ez a $t = 0$ időpont). Jelölje Józsi részvényének értékét a $t \geqslant 0$ időpontban az X_t valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy Józsi makacsul abban hisz, hogy $\{\log X_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat (így speciálisan $X_0 = 1$). Elmúlván az ünnepek már szilveszter van (legyen ez a $t_0 > 0$ időpont) és tudjuk, hogy Józsi részvénye ekkor éri el először az $x_0 > 1$ forintot. Mi a valószínűsége, hogy Józsi részvénye hamarabb éri el szilveszter után az αx_0 értéket, mint az x_0/β értéket, ahol $\alpha > 1, \beta > 1$ előre adott valós számok?

Megoldás. Legyen $W_t := \log X_t$, $t \geqslant 0$. Ekkor $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat. Jelölje $\tau := \tau_{\log x_0}$ a $\log x_0$ szint első elérési idejét a $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamatra vonatkozóan. Ekkor $\{W_t^* = W_{\tau+t} - W_\tau : t \geqslant 0\}$ is standard Wiener-folyamat és minden $t > 0$-ra az $\mathcal{F}_t^{W^*} = \sigma(W_s^*, 0 \leqslant s \leqslant t)$ σ-algebra független az $\mathcal{F}_\tau$ σ-algebrától (speciálisan τ-tól is).

Legyen tetszőleges $a > 0, b > 0$ esetén $T_{-a,b}^* : \Omega \to [0, \infty]$,

$$T_{-a,b}^* := \begin{cases} \inf\{t \geqslant 0 \,|\, W_t^* = -a \quad \text{vagy} \quad W_t^* = b\} & \text{ha} \quad \exists\, t \geqslant 0 : \ W_t^* = -a \quad \text{vagy} \quad W_t^* = b, \\ +\infty & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen továbbá $b = \log \alpha > 0$ és $a = \log \beta > 0$. Ezen jelöléseket használva azt kell kiszámolni, hogy mennyi

$$P(W_{T_{-a,b}^*}^* = b \,|\, \tau = t_0).$$

Ugyanis,

$$\{W_{T_{-a,b}^*}^* = b\} = \{W_{\tau+T_{-a,b}^*} - W_\tau = \log \alpha\} = \{W_{\tau+T_{-a,b}^*} = \log \alpha + \log x_0\} = \{X_{\tau+T_{-a,b}^*} = \alpha x_0\},$$

és

$$\begin{aligned} \{W_{T_{-a,b}^*}^* = -a\} &= \{W_{\tau+T_{-a,b}^*} - W_\tau = -\log \beta\} = \{W_{\tau+T_{-a,b}^*} = -\log \beta + \log x_0\} \\ &= \{X_{\tau+T_{-a,b}^*} = \frac{x_0}{\beta}\}, \end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőségek $\{W_t : t \geqslant 0\}$ definíciója miatt következnek. Mivel $T_{-a,b}^*$ csak W^*-tól függ, ami független $\tau = \tau_{\log x_0}$-tól, kapjuk, hogy τ független $T_{-a,b}^*$-tól is, így független $W_{T_{-a,b}^*}^*$-tól is. Ezért

$$P(W_{T_{-a,b}^*}^* = b \,|\, \tau = t_0) = P(W_{T_{-a,b}^*}^* = b).$$

Az 1.4.55. Állítás alapján kapjuk, hogy

$$P(W_{T_{-a,b}^*}^* = b \,|\, \tau = t_0) = \frac{a}{a+b} = \frac{\log \beta}{\log \alpha + \log \beta}.$$

□

2.2.5. Feladat. (Stromberg [8], Exercise 11, page 263) Legyen $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat. Rögzítsünk egy $c > 0$ számot. Legyen $\alpha : \Omega \to [0, +\infty)$, $\beta : \Omega \to [0, +\infty]$,

$$\alpha(\omega) := \sup\{s \in [0, c] : W_s(\omega) = 0\}, \quad \omega \in \Omega,$$

$$\beta(\omega) := \begin{cases} \inf\{s \in [c, +\infty) : W_s(\omega) = 0\} & \text{ha} \quad \exists\, s \in [c, +\infty) : W_s(\omega) = 0, \\ +\infty & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy

(i) α és β valószínűségi változók.

(ii) β megállítási időpillanat $\{W_t : t \geqslant 0\}$-ra nézve, α viszont nem.

(iii) ha $t \in [0, c]$, akkor

$$P(\alpha < t) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{t}{c}} = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{u(c-u)}} \, \mathrm{d}u.$$

(Itt $\arcsin$ jelöli a $\sin$ függvény $[-\pi/2, \pi/2]$-re való leszűkítésének inverzét.)

(iv) ha $t \in [c, +\infty)$, akkor

$$P(\beta \leqslant t) = \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{t-c}{c}}.$$

(Itt $\arctan$ jelöli a $\tan$ függvény $(-\pi/2, \pi/2)$-re való leszűkítésének inverzét.)

(v) $\mathbb{E}\alpha = c/2$, $\mathbb{E}\beta = +\infty$.

(vi) tetszőleges $0 < t_1 \leqslant c$ és $t_2 \geqslant c$ esetén

$$P(\alpha < t_1, \beta > t_2) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}.$$

(vii) α és β nem függetlenek.

Megoldás.

(i) Elég azt megmutatni, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $\{\alpha < t\} \in \mathcal{A}$ és $\{\beta > t\} \in \mathcal{A}$. Az $\{\alpha < t\}$ eseményt vizsgálva elég csak a $0 < t \leqslant c$ esetet tekinteni. Felhasználva α definícióját kapjuk, hogy

$$\{\alpha < t\} = \{\nexists\, s \in [t, c] : W_s = 0\} = \Omega \setminus \{\exists\, s \in [t, c] : W_s = 0\}.$$

Azt pedig, hogy $\Omega \setminus \{\exists\, s \in [t, c] : W_s = 0\}$ esemény már beláttuk az 1.4.57. Állítás bizonyításában.

A $\{\beta > t\}$ eseményt vizsgálva elég csak a $t \geqslant c$ esetet tekinteni. Felhasználva β definícióját kapjuk, hogy

$$\{\beta > t\} = \{\nexists\, s \in [c,t] : W_s = 0\} = \Omega \setminus \{\exists\, s \in [c,t] : W_s = 0\}.$$

(ii) Ahhoz, hogy β megállítási időpillanat $\{W_t : t \geqslant 0\}$-ra nézve azt kell belátni, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $\{\beta \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : 0 \leqslant s \leqslant t)$. Ha $t < c$, úgy $\{\beta \leqslant t\} = \emptyset$, ha pedig $t \geqslant c$, úgy

$$\{\beta \leqslant t\} = \Omega \setminus \{\beta > t\} = \{\exists\, s \in [c,t] : W_s = 0\},$$

ezért kapjuk a dolgot. Ahhoz, hogy α nem megállítási időpillanat $\{W_t : t \geqslant 0\}$-ra nézve, elég azt megmutatni, hogy létezik olyan $t \in \mathbb{R}$, hogy $\{\alpha \leqslant t\} \notin \mathcal{F}_t^W$. Ha $t \in (0,c)$, akkor

$$\{\alpha \leqslant t\} = \Omega \setminus \{\exists\, s \in (t,c] : W_s = 0\}.$$

Azonban $\{\exists\, s \in (t,c] : W_s = 0\}$ nincs benne az $\mathcal{F}_t^W$ σ-algebrában.

(iii) Legyen $t \in [0,c]$. Ekkor az 1.4.57. Állítás alapján

$$P(\alpha < t) = 1 - P(\exists\, s \in [t,c] : W_s = 0) = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{t}{c}}.$$

Azt kell még belátni, hogy

$$1 - \frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{t}{c}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{t}{c}}.$$

Ez pedig azért igaz, mert minden $x \in [-1,1]$ esetén

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}. \tag{2.2.1}$$

Ennek rövid indoklása a következő. Mivel a $-\sin$ és a $\cos$ függvény egymásnak $\frac{\pi}{2}$-vel való x tengely irányú eltoltja, az inverzeik, azaz az $y = x$ egyenesre való tükörképeik egymásnak $\frac{\pi}{2}$-vel való y tengely irányú eltoltjai, azaz a $-\arcsin$ és az $\arccos$ függvény egymásnak $\frac{\pi}{2}$-vel való y tengely irányú eltoltjai.

(iv) Legyen $t \in [c,+\infty)$. Ekkor az 1.4.57. Állítás alapján

$$P(\beta \leqslant t) = 1 - P(\beta > t) = 1 - \big(1 - P(\exists\, s \in [c,t] : W_s = 0)\big) = \frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{c}{t}}.$$

Azt kell még belátni, hogy ha $t \geqslant c$, akkor

$$\arccos\sqrt{\frac{c}{t}} = \arctan\sqrt{\frac{t-c}{c}}. \tag{2.2.2}$$

Mivel $t \geqslant c > 0$, így $\arccos\sqrt{\frac{c}{t}} \in [0,\pi/2)$ és $\arctan\sqrt{\frac{t-c}{c}} \in [0,\pi/2)$, és felhasználva, hogy a $\tan$ függvény a $[0,\pi/2)$ intervallumon szigorúan monoton növekvő kapjuk, hogy (2.2.2) akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\tan\Big(\arccos\sqrt{\frac{c}{t}}\Big) = \tan\Big(\arctan\sqrt{\frac{t-c}{c}}\Big),$$

azaz

$$\frac{\sin\left(\arccos\sqrt{\frac{c}{t}}\right)}{\sqrt{\frac{c}{t}}} = \sqrt{\frac{t-c}{c}}.$$

Mivel $\sin(x) \geqslant 0$, ha $x \in [0, \pi/2)$, kapjuk, hogy (2.2.2) akkor és csak akkor igaz, ha

$$\frac{\sqrt{1-\frac{c}{t}}}{\sqrt{\frac{c}{t}}} = \sqrt{\frac{t-c}{c}},$$

ez pedig igaz egyenlőség.

(v) Felhasználva (iii)-t kapjuk, hogy minden $t \in (0, c)$ esetén

$$f_\alpha(t) = \frac{2}{\pi}\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\,t}\left(\arcsin\sqrt{\frac{t}{c}}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{t}{c}}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{t}{c}}}\frac{1}{c} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{t(c-t)}}.$$

Így

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{t(c-t)}} & \text{ha} \quad t \in (0, c), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Tehát α (folytonos) arkusz-szinusz eloszlású. Ezért

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\alpha &= \int_0^c t\frac{1}{\pi\sqrt{t(c-t)}}\,\mathsf{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^c \sqrt{\frac{t}{c-t}}\,\mathsf{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\sqrt{c}} \frac{x}{\sqrt{c-x^2}}2x\,\mathsf{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^0 \frac{c\cos^2 u}{\sqrt{c-c\cos^2 u}}(-\sqrt{c})\sin u\,\mathsf{d}u = \frac{2c}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2u)}{2}\,\mathsf{d}u = \frac{c}{\pi}\left[u+\frac{\sin(2u)}{2}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Felhasználva (iv)-t, kapjuk, hogy minden $t \in (c, +\infty)$ esetén

$$f_\beta(t) = \frac{2}{\pi}\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(\arccos\sqrt{\frac{c}{t}}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{c}{t}}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{c}{t}}}\frac{-c}{t^2} = \frac{c}{\pi}\frac{1}{t\sqrt{c(t-c)}}.$$

Így

$$f_\beta(t) = \begin{cases} \frac{1}{t\pi}\sqrt{\frac{c}{t-c}} & \text{ha} \quad t \in (c, +\infty), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ezért

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\beta &= \int_c^{+\infty} \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{c}{t-c}}\,\mathsf{d}t = \frac{\sqrt{c}}{\pi}\int_c^{+\infty}(t-c)^{-1/2}\,\mathsf{d}t = \frac{\sqrt{c}}{\pi}\left[2(t-c)^{1/2}\right]_c^{+\infty} \\ &= \frac{2\sqrt{c}}{\pi}\lim_{t\to\infty}\sqrt{t-c} = +\infty. \end{aligned}$$

(vi) Legyen tehát $0 < t_1 \leqslant c$ és $t_2 \geqslant c$. Ekkor

$$\{\alpha < t_1, \beta > t_2\} = \{\nexists\, s \in [t_1, c] : W_s = 0\} \cap \{\nexists\, s \in [c, t_2] : W_s = 0\} = \{\nexists\, s \in [t_1, t_2] : W_s = 0\}.$$

Így az 1.4.57. Állítás és (2.2.1) alapján

$$P(\alpha < t_1, \beta > t_2) = P\big(\nexists\, s \in [t_1, t_2] : W_s = 0\big) = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{t_1}{t_2}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}.$$

(vii) Megmutatjuk először, hogy α és β együttes eloszlása abszolút folytonos és meg is határozzuk az együttes sűrűségfüggvényüket. Jelölje a továbbiakban α és β együttes sűrűségfüggvényét $f_{\alpha,\beta}$. A korábbiak alapján, ha $0 < t_1 \leqslant c \leqslant t_2$, akkor

$$P(\alpha < t_1, \beta < t_2) = P(\alpha < t_1) - P(\alpha < t_1, \beta > t_2) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{t_1}{c}} - \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}.$$

Így, ha $0 < t_1 \leqslant c \leqslant t_2$, akkor

$$\begin{aligned}
f_{\alpha,\beta}(t_1, t_2) &= \frac{\partial}{\partial t_2}\left(f_\alpha(t_1) - \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t_1}{t_2}}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}}\frac{1}{t_2}\right) = \frac{\partial}{\partial t_2}\Big(-\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{t_1(t_2 - t_1)}}\Big)\\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{t_1}}(t_2 - t_1)^{-3/2} = \frac{1}{2\pi(t_2 - t_1)\sqrt{t_1(t_2 - t_1)}}.
\end{aligned}$$

Ha $0 < t_1 \leqslant c \leqslant t_2$ nem áll fenn, úgy $f_{\alpha,\beta}(t_1, t_2) = 0$.

Tegyük fel a továbbiakban indirekt módon, hogy α és β függetlenek. Ekkor felhasználva, hogy együttes eloszlásuk abszolút folytonos, fennáll, hogy

$$f_{\alpha,\beta}(t_1, t_2) = f_\alpha(t_1) f_\beta(t_2), \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Ha $0 < t_1 < c < t_2$, úgy annak kell fennállnia, hogy

$$\frac{1}{2\pi(t_2 - t_1)\sqrt{t_1(t_2 - t_1)}} = \frac{1}{\pi\sqrt{t_1(c - t_1)}}\frac{1}{\pi t_2}\sqrt{\frac{c}{t_2 - c}}.$$

Legyen például $t_1 := c/2$, $t_2 := 2c$. Így fenn kell állnia annak, hogy

$$\frac{1}{2\pi\frac{3c}{2}\sqrt{3c^2/4}} = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2/4}}\frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{c}{c}},$$

azaz annak, hogy

$$\frac{2}{3\sqrt{3}c^2} = \frac{2}{c}\frac{1}{2\pi c} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2\pi = 3\sqrt{3},$$

ez pedig nyilván nem teljesül. Így ellentmondásra jutottunk, tehát α és β nem függetlenek.
□

2.2.6. Feladat. Józsi és Misi írtak egy számítógépes programot, mely egy standard Wiener-folyamat trajektóriáit tudja ábrázolni. Rögzítenek egy $c > 0$ számot. Azt játsszák, hogy lefutattják a programot, mely kirajzol egy trajektóriát a $[0, 2c]$ intervallumon, és megmérik, hogy a trajektóriának balról vagy jobbról van c-hez közelebb zérushelye. Ha balról, akkor Józsi ad Misinek 1 forintot, ha jobbról, akkor fordítva. Abban az esetben, ha a legközelebbi zérushelyek egyenlő távolságra vannak c-től vagy c-től se balra (a 0-t leszámítva), se jobbra nincs zérushely senki nem ad senkinek semmit. (A trajektóriának 0-ban biztosan zérushelye van, mert standard Wiener-folyamatról van szó.) Kinek előnyösebb a játék?

Megoldás. Heurisztikusan Misinek lesz előnyösebb a játék (ami, mint kiderül igaz is), ugyanis az 1.4.39. Következmény alapján bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén a $[0, \varepsilon)$ intervallumban 1-valószínűséggel végtelen sok zérushelye van egy standard Wiener-folyamatnak. A pontos indoklás a következő. Az előző feladat jelöléseivel élve Misi nyerési valószínűsége

$$P(c - \alpha < c, \beta > 2c) + P(c - \alpha < \beta - c, \beta \leqslant 2c).$$

Az előző összeg első tagja annak felel meg, hogy $[c, 2c]$-n nincs zérushely, de $(0, c]$-n van. A második tag pedig annak, hogy $[c, 2c]$-n és $(0, c]$-n is van, de baloldalról közelebb van zérushely c-hez, mint jobboldalról. Ha ez a kifejezés nagyobb, mint $1/2$, akkor Misinek előnyösebb a játék. Világos, hogy

$$P(c - \alpha < c, \beta > 2c) = P(\beta > 2c),$$

és

$$P(c - \alpha < \beta - c, \beta \leqslant 2c) = P(2c < \beta + \alpha, \beta \leqslant 2c) = \iint\limits_{\substack{2c<y+x,c\leqslant y\leqslant 2c\\ 0\leqslant x\leqslant c}} f_{\alpha,\beta}(x, y)\, \mathsf{d}x\mathsf{d}y,$$

ahol $f_{\alpha,\beta}$ az α és β együttes sűrűségfüggvényét jelöli. Felhasználva $f_{\alpha,\beta}$ alakját (lásd az 2.2.5. Feladat (vii) részének bizonyítását), kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&P(c - \alpha < \beta - c, \beta \leqslant 2c)\\
&= \int_0^c \int_{-x+2c}^{2c} \frac{1}{2\pi(y-x)\sqrt{x(y-x)}}\, \mathsf{d}x\mathsf{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_0^c \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\int_{-x+2c}^{2c} (y-x)^{-3/2}\, \mathsf{d}y\right) \mathsf{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^c \frac{1}{\sqrt{x}}\big[-2(y-x)^{-1/2}\big]_{y=-x+2c}^{y=2c}\, \mathsf{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^c -\frac{2}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{2c-x}} - \frac{1}{\sqrt{2c-2x}}\right) \mathsf{d}x\\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^c \left(\frac{1}{c\sqrt{1-\left(\frac{x-c}{c}\right)^2}} - \frac{1}{\frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{x-c/2}{c/2}\right)^2}}\right) \mathsf{d}x\\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\left[\arcsin\left(\frac{x-c}{c}\right)\right]_{x=0}^{x=c} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arcsin\left(\frac{x-c/2}{c/2}\right)\right]_{x=0}^{x=c}\right)\\
&= -\frac{1}{\pi}\big((0+\pi/2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi/2+\pi/2)\big) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx 0.2071.
\end{aligned}$$

Így Misi nyerési valószínűsége

$$\begin{aligned}
P(\beta > 2c) + P(c-\alpha < \beta - c, \beta \leqslant 2c) &= \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sqrt{\frac{c}{2c}}\right) + \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\
&= \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071,
\end{aligned}$$

tehát Misi $\sqrt{2}/2$-valószínűséggel megnyeri a játékot. Így Misinek előnyösebb a játék.

Ha azt a feladatot tekintenénk, hogy nincs a $[0, 2c]$ korlátozás, azaz a trajektóriákat a nemnegatív félegyenesen rajzoljuk ki, akkor Misi nyerési valószínűsége $P(c - \alpha < \beta - c)$ lenne. Hasonlóan eljárva, mint az előzőekben kaphatjuk, hogy

$$P(c-\alpha < \beta - c) = \iint\limits_{\substack{2c<y+x,\, c\leqslant y \\ 0\leqslant x\leqslant c}} f_{\alpha,\beta}(x,y)\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

tehát Misi nyerési valószínűsége ez esetben is $\sqrt{2}/2$. Így ez esetben is Misinek előnyösebb a játék. □

2.2.7. Feladat. (Ross [7], Exercise 7, page 470) Legyen $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat. Jelölje τ_a az $a \in \mathbb{R}$ szint első elérési idejét (az 1.4.27. Definíció nyilván értelmes tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén). Határozzuk meg a $P(\tau_1 < \tau_{-1} < \tau_2)$ valószínűséget!

Megoldás. Mivel $P(\tau_a < \tau_b) = 1$ minden $a < b$ esetén, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
P(\tau_1 < \tau_{-1} < \tau_2) &= 1 - P(\tau_{-1} < \tau_1 < \tau_2) - P(\tau_1 < \tau_2 < \tau_{-1}) \\
&= 1 - P(\tau_{-1} < \tau_1) - P(\tau_2 < \tau_{-1}).
\end{aligned}$$

Az 1.4.55. Állítás alapján ($a = 1, b = 1$, ill. $a = 1, b = 2$ választással)

$$\begin{aligned}
P(\tau_{-1} < \tau_1) &= P(T_{-1,1} = -1) = \frac{1}{1+1}, \\
P(\tau_2 < \tau_{-1}) &= P(T_{-1,2} = 2) = \frac{1}{1+2},
\end{aligned}$$

így

$$P(\tau_1 < \tau_{-1} < \tau_2) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

□

2.2.8. Feladat. Legyen $\{W_t : t \geqslant 0\}$ egy standard Wiener-folyamat és $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$ adott valós számok. Határozzuk meg $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ sűrűségfüggvényét!

1. Megoldás. Mivel egy standard Wiener-folyamat Gauss-folyamat, a véges dimenziós eloszlásai többdimenziós normálisak. Ezért $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ n-dimenziós normális eloszlású, és akkor és csak akkor van sűrűségfüggvénye, ha kovariancia-mátrixa invertálható. Ekkor $(W_{t_1},\dots,W_{t_n})$ várható érték vektora $m := 0 \in \mathbb{R}^n$, és kovariancia-mátrixa

$$D := \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \cdots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_n \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} - W_{t_1} \\ W_{t_3} - W_{t_2} \\ \vdots \\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} \\ W_{t_3} \\ \vdots \\ W_{t_n} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0, D).$$

A továbbiakban B-vel jelöljük az előző egyenlőség baloldalán szereplő $(n \times n)$-es mátrixot. Felhasználva, hogy $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ függetlenek, kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} - W_{t_1} \\ W_{t_3} - W_{t_2} \\ \vdots \\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\big(0, D' := \operatorname{diag}(t_1, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1})\big).$$

Így $D = BD'B^\top$ és ezért

$$\begin{aligned} \det D &= (\det B)(\det D')(\det B^\top) = \det D' = t_1(t_2 - t_1)\cdots(t_n - t_{n-1}) \\ &= \prod_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}), \qquad \text{ahol } t_0 := 0. \end{aligned}$$

Ezért $\det D > 0$, és így tényleg létezik $(W_{t_1},\dots,W_{t_n})$-nek sűrűségfüggvénye, s a következő alakú

$$f(x_1,\dots,x_n) =: f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det D}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2} \big\langle D^{-1}(\underline{x} - m), \underline{x} - m \big\rangle \Big\}.$$

Ekkor

$$\big\langle D^{-1}(\underline{x} - m), \underline{x} - m \big\rangle = \big\langle (B^\top)^{-1}(D')^{-1}B^{-1}\underline{x}, \underline{x} \big\rangle = \langle (D')^{-1}B^{-1}\underline{x}, B^{-1}\underline{x} \rangle = \langle (D')^{-1}\underline{y}, \underline{y} \rangle,$$

ahol $\underline{y} := B^{-1}\underline{x}$. Mivel $\underline{x} = B\underline{y}$, kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 + y_3 \\ \vdots \\ y_1 + \cdots + y_n \end{pmatrix},$$

és így
$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 - x_1, \quad y_3 = x_3 - x_2, \quad \cdots \quad y_n = x_n - x_{n-1}.$$
Felhasználva, hogy $(D')^{-1} = \operatorname{diag}(1/t_1, 1/(t_2 - t_1), \ldots, 1/(t_n - t_{n-1}))$, kapjuk, hogy
$$\begin{aligned}
f(\underline{x}) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \prod_{i=1}^n \sqrt{t_i - t_{i-1}}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}} \Big\} \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}} \Big\} \\
&= \prod_{i=1}^n f_{\mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})}(x_i - x_{i-1}),
\end{aligned}$$
ahol $x_0 := 0$.

2. Megoldás. (Vázlat) Megmutatható, hogy
$$f_{W_{t_1},\ldots,W_{t_n}(x_1,\ldots,x_n)} = f_{W_{t_1}}(x_1) f_{W_{t_2}\,|\,W_{t_1}}(x_2\,|\,x_1) \cdots f_{W_{t_n}\,|\,W_{t_{n-1}}}(x_n\,|\,x_{n-1}),$$
ahol
$$f_{W_t\,|\,W_s}(x\,|\,y) = \frac{f_{W_t,W_s}(x,y)}{f_{W_s}(y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \; 0 \leqslant s < t,$$
és belátható az is, hogy
$$f_{W_t\,|\,W_s}(x\,|\,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\Big\{ -\frac{(x-y)^2}{2(t-s)} \Big\}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \; 0 \leqslant s < t.$$
Ezeket felhasználva kijön a dolog. □

2.2.9. Feladat. Legyen $\{W_t : t \geqslant 0\}$ egy standard Wiener-folyamat és $0 < t_1 < s < t_2$. Tetszőleges $a, b, x \in \mathbb{R}$ esetén fejezzük ki Φ segítségével a
$$P(W_s < x\,|\,W_{t_1} = a,\; W_{t_2} = b)$$
feltételes valószínűséget! (Itt Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét jelöli.)

Megoldás. Mivel
$$P(W_s < x\,|\,W_{t_1} = a,\; W_{t_2} = b) = \int_{-\infty}^{x} f_{W_s\,|\,W_{t_1},W_{t_2}}(y\,|\,a,b)\,\mathsf{d}y,$$

először az $f_{W_s \,|\, W_{t_1}, W_{t_2}}$ feltételes sűrűségfüggvényt határozzuk meg. Az előző feladat nyomán

$$
\begin{aligned}
f_{W_s \,|\, W_{t_1}, W_{t_2}}(y \,|\, a, b) &= \frac{f_{W_s, W_{t_1}, W_{t_2}}(y, a, b)}{f_{W_{t_1}, W_{t_2}}(a, b)} = \frac{f_{W_{t_1}, W_s, W_{t_2}}(a, y, b)}{f_{W_{t_1}, W_{t_2}}(a, b)} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} \exp\{-\frac{a^2}{2t_1}\} \frac{1}{\sqrt{2\pi(s-t_1)}} \exp\{-\frac{(y-a)^2}{2(s-t_1)}\} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-s)}} \exp\{-\frac{(b-y)^2}{2(t_2-s)}\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} \exp\{-\frac{a^2}{2t_1}\} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} \exp\{-\frac{(b-a)^2}{2(t_2-t_1)}\}} \\
&= \frac{\sqrt{t_2 - t_1}}{\sqrt{2\pi(s-t_1)(t_2-s)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{(y-a)^2}{s-t_1} + \frac{(b-y)^2}{t_2-s} - \frac{(b-a)^2}{t_2-t_1}\right)\right\} \\
&=: \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{(s-t_1)(t_2-s)}{t_2-t_1}}} e^A.
\end{aligned}
$$

Elvégezve a megfelelő átalakításokat kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
A = -\frac{1}{2} \frac{1}{\frac{(s-t_1)(t_2-s)}{t_2-t_1}} \frac{(s-t_1)(t_2-s)}{t_2-t_1} \Bigg[&\left(\frac{1}{s-t_1} + \frac{1}{t_2-s}\right) y^2 - 2\left(\frac{a}{s-t_1} + \frac{b}{t_2-s}\right) y \\
&+ \frac{a^2}{s-t_1} + \frac{b^2}{t_2-s} - \frac{(b-a)^2}{t_2-t_1} \Bigg] \\
= -\frac{1}{2} \frac{1}{\frac{(s-t_1)(t_2-s)}{t_2-t_1}} &\left(y - \frac{a(t_2-s) + b(s-t_1)}{t_2-t_1}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Legyen

$$
\begin{aligned}
m &:= \frac{a(t_2-s) + b(s-t_1)}{t_2-t_1} = a + (b-a)\frac{s-t_1}{t_2-t_1}, \\
\sigma^2 &:= \frac{(s-t_1)(t_2-s)}{t_2-t_1} > 0.
\end{aligned}
$$

Ezekkel a jelölésekkel

$$
f_{W_s \,|\, W_{t_1}, W_{t_2}}(y \,|\, a, b) = f_{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}(y), \qquad y \in \mathbb{R},
$$

azaz W_s-nek (W_{t_1}, W_{t_2})-re vonatkozó feltételes eloszlása $(0 < t_1 < s < t_2)$ normális eloszlás. Ekkor

$$
\begin{aligned}
P(W_s < x \,|\, W_{t_1} = a,\ W_{t_2} = b) &= P(\mathcal{N}(m, \sigma^2) < x) \\
&= P(\sigma \mathcal{N}(0,1) + m < x) = P\Big(\mathcal{N}(0,1) < \frac{x-m}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big).
\end{aligned}
$$

□

2.2.10. Feladat. (Ross [7], Exercise 5, page 470) Legyen $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat és $0 < t_1 < t_2 < t_3$ tetszőlegesen rögzítettek. Határozzuk meg az $\mathbb{E}(W_{t_1} W_{t_2} W_{t_3})$ várható értéket.

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy $\mathbb{E}(|W_{t_1}W_{t_2}W_{t_3}|) < \infty$, melynek következményeként $\mathbb{E}(W_{t_1}W_{t_2}W_{t_3})$ létezik. A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|W_{t_1}W_{t_2}W_{t_3}|) &\leqslant \sqrt{\mathbb{E}(W_{t_1}^2)\mathbb{E}(W_{t_2}^2W_{t_3}^2)} = \sqrt{t_1}\sqrt{\mathbb{E}(W_{t_2}^2W_{t_3}^2)} \leqslant \sqrt{t_1}(\mathbb{E}(W_{t_2}^4)\mathbb{E}(W_{t_3}^4))^{1/4} \\ &= \sqrt{t_1}(3t_2^2 3t_3^2)^{1/4} = \sqrt{3t_1t_2t_3} < \infty.\end{aligned}$$

Mivel $(W_{t_1}, W_{t_2}, W_{t_3})$ háromdimenziós normális eloszlású valószínűségi változó 0 várható értekkel sűrűségfüggvényére fennáll, hogy (szórásmátrixát D-vel jelölve)

$$f_{(W_{t_1},W_{t_2},W_{t_3})}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\det D}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\langle D^{-1}x, x\rangle\right\} = f_{(W_{t_1},W_{t_2},W_{t_3})}(-x_1,-x_2,-x_3).$$

Így az $y = -x$ helyettesítésel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_{t_1}W_{t_2}W_{t_3}) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2x_3 f_{(W_{t_1},W_{t_2},W_{t_3})}(x_1,x_2,x_3)\,\mathsf{d}x_1\,\mathsf{d}x_2\,\mathsf{d}x_3 \\ &= -\mathbb{E}(W_{t_1}W_{t_2}W_{t_3}),\end{aligned}$$

ezért $\mathbb{E}(W_{t_1}W_{t_2}W_{t_3}) = 0$. A helyettesítés során a transzformáció Jacobi-mátrixa determinánsának abszolút értéke 1 lesz, ugyanis $y(x) = -x$ Jacobi-mátrixa

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

és ennek determinánsa -1. □

2.2.11. Feladat. Legyen $\{W_t : t \geqslant 0\}$ egy standard Wiener-folyamat és $a_n := d(n)/n$, $n \in \mathbb{N}$, ahol $d(n)$ jelöli az $n \in \mathbb{N}$ természetes szám pozitív osztóinak számát. Mutassuk meg, hogy

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \lim_{n\to+\infty} W_{a_n}(\omega) = 0\right\}\right) = 1.$$

Megoldás. Mivel egy standard Wiener-folyamat trajektóriái 1-valószínűséggel folytonosak és $P(W_0 = 0) = 1$, kapjuk, hogy

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \lim_{t\to 0} W_t(\omega) = 0\right\}\right) = 1.$$

Így elég azt megmutatni, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Végiggondoljuk, hogy $d(n) \leqslant 2\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Ha $n_1 \,|\, n$, úgy $n = n_1n_2$ valamilyen $n_2 \in \mathbb{N}$-re és $n_1 \leqslant \sqrt{n}$ vagy $n_2 \leqslant \sqrt{n}$ teljesül (ellenkező esetben a szorzatuk nagyobb lenne, mint n). Ezért azon (n_1, n_2) párok száma, melyekre $n_1n_2 = n$ teljesül legfeljebb $2\sqrt{n}$. Így a rendőr-szabály és

$$0 \leqslant a_n = \frac{d(n)}{n} \leqslant \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

alapján kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

2.2.12. Feladat. Legyenek X, Y, Z valós értékű valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn. Határozzuk meg a következő esetekben az $\mathbb{E}(X \mid Y)$ feltételes várható értéket:

(i) $X = f(Y) + Z$, ahol $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ L_1-integrálható függvény és Z 1 paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, mely független Y-tól,

(ii) $X = W_t$, $Y = \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)$, ahol $t > s > 0$ és $\{W_t : t \geqslant 0\}$ standard Wiener-folyamat,

(iii) $\mathbb{E}X^2 < +\infty$, $\mathbb{E}Z^2 < +\infty$ és létezik olyan $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény, melyre $Z = h(Y)$ és $\mathbb{E}[Xg(Y)] = \mathbb{E}[Zg(Y)]$ minden olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvényre, melyre $\mathbb{E}(g(Y))^2 < +\infty$.

Megoldás.

(i) Ekkor

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(f(Y) + Z \mid Y) = \mathbb{E}(f(Y) \mid Y) + \mathbb{E}(Z \mid Y) = f(Y) + \mathbb{E}Z = f(Y) + 1,$$

mivel $f(Y)$ $\sigma(Y)$-mérhető és Z független Y-tól.

(ii) 1. Megoldás. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X \mid Y) &= \mathbb{E}(W_t \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)) = \mathbb{E}(W_t - W_s + W_s \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)) \\ &= \mathbb{E}(W_t - W_s \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)) + \mathbb{E}(W_s \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)).\end{aligned}$$

Mivel a $\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)$ valószínűségi változó által generált σ-algebra benne van az $\mathcal{F}_s^W = \sigma(W_u, 0 \leqslant u \leqslant s)$ σ-algebrában és $W_t - W_s$ független az $\mathcal{F}_s^W$ σ-algebrától kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_t - W_s \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(W_t - W_s \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)) \mid \mathcal{F}_s^W\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s^W) \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)\right) = \mathbb{E}(0 \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)) = 0.\end{aligned}$$

Így

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(W_s \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)).$$

Itt

$$\mathbb{E}(W_s \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)) = \mathbb{E}\big(W_s \mid \sigma(\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s))\big) = \mathbb{E}(W_s \mid \mathcal{F}),$$

ahol

$$\mathcal{F} := \sigma(\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)) = \Big\{\emptyset, \Omega, \{W_s > 0\}, \{W_s \leqslant 0\}\Big\}.$$

Ekkor $\mathbb{E}(W_s \mid \mathcal{F})$ az a $\xi_{\mathcal{F}} : \Omega \to \mathbb{R}$ (P-m.m. egyértelműen meghatározott) valószínűségi változó, melyre

(i) $\xi_{\mathcal{F}}$ $\mathcal{F}$-mérhető, $\mathbb{E}|\xi_{\mathcal{F}}| < +\infty$,

(ii) minden $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbb{E}(\xi_{\mathcal{F}} \mathbb{I}_A) = \mathbb{E}(W_s \mathbb{I}_A)$.

Felhasználva, hogy $\xi_{\mathcal{F}}$ $\mathcal{F}$-mérhető, megmutatjuk, hogy léteznek olyan $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ valós számok, hogy

$$\xi_{\mathcal{F}} = c_1 \mathbb{I}_{(-\infty,0]}(W_s) + c_2 \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s).$$

Tegyük fel, hogy $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ olyanok, hogy $W_s(\omega_1) \leqslant 0$, $W_s(\omega_2) \leqslant 0$ és

$$a_1 := \xi_{\mathcal{F}}(\omega_1) \neq \xi_{\mathcal{F}}(\omega_2) =: a_2.$$

Az $\mathcal{F}$ σ-algebra előállítása alapján, felhasználva, hogy $a_1 \neq a_2$, kapjuk, hogy

$$\xi_{\mathcal{F}}^{-1}(\{a_1\}) = \{W_s \leqslant 0\} = \xi_{\mathcal{F}}^{-1}(\{a_2\}).$$

Ekkor azonban $a_1 = a_2$, ami ellentmondás. Így $\xi_{\mathcal{F}}$ a $\{W_s \leqslant 0\}$ halmazon konstans. Hasonlóan belátható, hogy $\xi_{\mathcal{F}}$ a $\{W_s > 0\}$ halmazon is konstans.

Az $\mathbb{E}(\xi_{\mathcal{F}} \mathbb{I}_A) = \mathbb{E}(W_s \mathbb{I}_A)$, $A \in \mathcal{F}$ feltétel részletesen kiírva azt jelenti, hogy

(1) $\mathbb{E}\xi_{\mathcal{F}} = \mathbb{E}W_s$,

(2) $\mathbb{E}(\xi_{\mathcal{F}} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)) = \mathbb{E}(W_s \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s))$,

(3) $\mathbb{E}(\xi_{\mathcal{F}} \mathbb{I}_{(-\infty,0]}(W_s)) = \mathbb{E}(W_s \mathbb{I}_{(-\infty,0]}(W_s))$.

Felhasználva $\xi_{\mathcal{F}}$ előállítását, (1) alapján kapjuk, hogy

$$0 = \mathbb{E}W_s = c_1 P(W_s \leqslant 0) + c_2 P(W_s > 0) = \frac{c_1 + c_2}{2},$$

így $c_2 = -c_1$. Hasonlóan, (2) alapján,

$$c_2 P(W_s > 0) = \mathbb{E}(W_s \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)),$$

így

$$c_2 = 2\mathbb{E}(W_s \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)).$$

Valamint (3) alapján,

$$c_1 P(W_s \leqslant 0) = \mathbb{E}(W_s \mathbb{I}_{(-\infty,0]}(W_s)),$$

és így

$$c_1 = 2\mathbb{E}(W_s \mathbb{I}_{(-\infty,0]}(W_s)).$$

Mivel W_s normális eloszlású 0 várható értékkel és s szórásnégyzettel, kapjuk, hogy

$$c_2 = 2\int_0^\infty x \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}} \, \mathsf{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \left[-s e^{-\frac{x^2}{2s}} \right]_{x=0}^{+\infty} = -\sqrt{\frac{2s}{\pi}}(0 - 1) = \sqrt{\frac{2s}{\pi}}.$$

Ezért

$$\xi_{\mathcal{F}} = \mathbb{E}(W_s \,|\, \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)) = \sqrt{\frac{2s}{\pi}} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s) - \sqrt{\frac{2s}{\pi}} \mathbb{I}_{(-\infty,0]}(W_s) = (-1)^{1-\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)} \sqrt{\frac{2s}{\pi}}.$$

2. Megoldás. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X \mid Y) &= \mathbb{E}(W_t \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)) = \mathbb{E}(W_t - W_s + W_s \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)) \\ &= \mathbb{E}(W_t - W_s \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)) + \mathbb{E}(W_s \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)).\end{aligned}$$

Mivel a $\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)$ valószínűségi változó által generált σ-algebra benne van az $\mathcal{F}_s^W = \sigma(W_u, 0 \leqslant u \leqslant s)$ σ-algebrában és $W_t - W_s$ független az $\mathcal{F}_s$ σ-algebrától kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_t - W_s \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(W_t - W_s \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)) \mid \mathcal{F}_s^W\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s^W) \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)\right) = \mathbb{E}(0 \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)) = 0.\end{aligned}$$

Így

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(W_s \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)).$$

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $s > 0$ esetén W_s eloszlása megegyezik $(-1)^{Y+1}|\xi|$ eloszlásával, ahol $Y = \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(\eta)$, továbbá ξ és η független, $\mathcal{N}(0,s)$-eloszlású valószínűségi változók. Ekkor ξ és Y is függetlenek. Kiszámoljuk $(-1)^{Y+1}|\xi|$ sűrűségfüggvényét. Először az eloszlásfüggvényét számolva

$$\begin{aligned}F_{(-1)^{Y+1}|\xi|}(z) &= P\big((-1)^{Y+1}|\xi| < z\big) = P\big((-1)^{Y+1}|\xi| < z \mid \eta > 0\big)P(\eta > 0) \\ &\quad + P\big((-1)^{Y+1}|\xi| < z \mid \eta < 0\big)P(\eta < 0).\end{aligned}$$

Mivel ξ és η függetlenek,

$$\begin{aligned}F_{(-1)^{Y+1}|\xi|}(z) &= \frac{1}{2}P\big((-1)^2|\xi| < z \mid \eta > 0\big) + \frac{1}{2}P\big((-1)|\xi| < z \mid \eta < 0\big) \\ &= \frac{1}{2}P\big(|\xi| < z\big) + \frac{1}{2}P\big(|\xi| > -z\big) \\ &= \frac{1}{2}P\left(\big|\mathcal{N}(0,1)\big| < \frac{z}{\sqrt{s}}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P\left(\big|\mathcal{N}(0,1)\big| < -\frac{z}{\sqrt{s}}\right).\end{aligned}$$

Ezért

$$F_{(-1)^{Y+1}|\xi|}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P\big(\big|\mathcal{N}(0,1)\big| < \frac{z}{\sqrt{s}}\big) & \text{ha} \quad z \geqslant 0, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P\big(\big|\mathcal{N}(0,1)\big| < -\frac{z}{\sqrt{s}}\big) & \text{ha} \quad z < 0. \end{cases}$$

Így

$$f_{(-1)^{Y+1}|\xi|}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}f_{\left|\mathcal{N}(0,1)\right|}\left(\frac{z}{\sqrt{s}}\right)\frac{1}{\sqrt{s}} & \text{ha} \quad z \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}f_{\left|\mathcal{N}(0,1)\right|}\left(-\frac{z}{\sqrt{s}}\right)\frac{1}{\sqrt{s}} & \text{ha} \quad z < 0. \end{cases}$$

Mivel, ha $z > 0$

$$F_{\left|\mathcal{N}(0,1)\right|}(z) = P(-z < \mathcal{N}(0,1) < z) = 2\Phi(z) - 1,$$

és 0, ha $z \leqslant 0$, kapjuk, hogy

$$f_{\left|\mathcal{N}(0,1)\right|}(z) = \begin{cases} 2f_{\mathcal{N}(0,1)}(z) & \text{ha} \quad z > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad z \leqslant 0. \end{cases}$$

Ezek miatt, ha $z \geqslant 0$, kapjuk, hogy

$$f_{(-1)^{Y+1}|\xi|}(z) = \frac{1}{2\sqrt{s}} 2 f_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{z}{\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{\sqrt{s}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{s}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{z^2}{2s}},$$

ha pedig $z < 0$, úgy

$$f_{(-1)^{Y+1}|\xi|}(z) = \frac{1}{2\sqrt{s}} 2 f_{\mathcal{N}(0,1)}\left(-\frac{z}{\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{\sqrt{s}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(-\frac{z}{\sqrt{s}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{z^2}{2s}}.$$

Így minden $z \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_{(-1)^{Y+1}|\xi|}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{z^2}{2s}} = f_{W_s}(z).$$

Ezért

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X \mid Y) &= \mathbb{E}(W_s \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s)) = \mathbb{E}\big((-1)^{Y+1}|\xi| \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(\eta)\big) = (-1)^{Y+1}\mathbb{E}\big(|\xi| \mid \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(\eta)\big)\\ &= (-1)^{Y+1}\mathbb{E}(|\xi|).\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$\mathbb{E}(|\xi|) = \sqrt{s}\,\mathbb{E}\big|\mathcal{N}(0,1)\big| = \sqrt{s}\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \sqrt{\frac{2s}{\pi}}(-1)^{Y+1} = (-1)^{1-Y}\sqrt{\frac{2s}{\pi}}.$$

A fentiekből speciálisan az is adódik, hogy ha $\{W_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ és $\{W_t^{(2)} : t \geqslant 0\}$ független standard Wiener-folyamatok, akkor minden $s > 0$-ra $W_s^{(1)}$ eloszlása megegyezik

$$(-1)^{\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(W_s^{(1)})}(-1)\big|W_s^{(2)}\big| \quad \text{eloszlásával.}$$

(iii) Legyen $\mathcal{F} = \sigma(Y)$. Ekkor $Z = h(Y)$ miatt Z $\mathcal{F}$-mérhető és az $\mathbb{E}Z^2 < +\infty$ feltételt is figyelembe véve $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Valamint szintén a feltételek miatt, felhasználva azt is, hogy $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ minden eleme előáll $g(Y)$ alakban, ahol $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megfelelő Borel-mérhető függvény (ugyanis $\mathcal{F} = \sigma(Y)$ miatt, az $\mathcal{F}$-mérhető függvények az Y mérhető függvényei), kapjuk, hogy $\mathbb{E}((X - Z)V) = 0$ minden $V \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ esetén. A feltételes várható érték ortogonális projekciós definíciója miatt ez pontosan azt jelenti, hogy

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = Z = h(Y).$$

□

2.2.13. Feladat. Legyen $\{X_t : t \geqslant 0\}$ egy olyan nulla várható értékű Gauss-folyamat, hogy tetszőleges $0 \leqslant s \leqslant t$ esetén $\mathbb{E}(X_t X_s)$ csak $(t-s)$-től függ. Igaz-e, hogy $\{X_t : t \geqslant 0\}$ erősen stacionárius folyamat?

Megoldás. A válasz: **Igen.** *Indoklás:* Egy Gauss-folyamat véges dimenziós eloszlásai normálisak, így ezeket a karakterisztikus függvényükre gondolva egyértelműen meghatározza a várható érték vektoruk és a kovariancia mátrixuk. Jelen esetben a várható érték 0, és a feladatbeli feltétel pont azt adja, hogy a kovariancia mátrix is jól viselkedik eltolással szemben. □

2.3. Martingálok

2.3.1. Feladat. Legyen $\{\xi_t, \mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ egy martingál, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig olyan konvex függvény, melyre $\mathbb{E}|g(\xi_t)| < +\infty$ minden $t \geqslant 0$-ra. Mutassuk meg, hogy $\{g(\xi_t), \mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ szubmartingál. Speciálisan, $\{|\xi_t|, \mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ szubmartingál.

Megoldás. Az 1.6.5. Definíció feltételeit kell leellenőrizni.

(i): $g(\xi_t)$ $\mathcal{F}_t$-mérhető, mert ξ_t $\mathcal{F}_t$-mérhető és 1-dimenzióban minden konvex függvény folytonos (és így mérhető is). Részletesebben kiírva, minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel-halmazra fennáll, hogy

$$\{\omega \in \Omega : g(\xi_t(\omega)) \in B\} = \{\omega \in \Omega : \xi_t(\omega) \in g^{-1}(B)\} = \{\omega \in \Omega : \omega \in (\xi_t^{-1} \circ g^{-1})(B)\}.$$

Így, mivel g folytonos, $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, és ezért $\xi_t^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{F}_t$.

(ii): $\mathbb{E}|g(\xi_t)| < +\infty$, $t \geqslant 0$ a feladat feltételei miatt teljesül.

(iii): Mivel $\mathbb{E}|\xi_t| < +\infty$ minden $t \geqslant 0$-ra, a feltételes Jensen-egyenlőtlenség szerint minden $0 \leqslant s < t < +\infty$ esetén

$$g(\mathbb{E}(\xi_t \,|\, \mathcal{F}_s)) \leqslant \mathbb{E}(g(\xi_t) \,|\, \mathcal{F}_s) \quad \text{P-m.m.}$$

Megjegyezzük, hogy ez nem más, mint az alábbi Jensen-egyenlőtlenség feltételes alakja

$$g(\mathbb{E}\xi_t) \leqslant \mathbb{E}g(\xi_t), \quad t \geqslant 0.$$

Mivel $\{\xi_t, \mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ martingál, $\mathbb{E}(\xi_t \,|\, \mathcal{F}_s) = \xi_s$ P-m.m., és így

$$g(\xi_s) \leqslant \mathbb{E}(g(\xi_t) \,|\, \mathcal{F}_s) \quad \text{P-m.m.}$$

Felhasználva, hogy $g(x) := |x|$, $x \in \mathbb{R}$ konvex, $\{|\xi_t|, \mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ szubmartingálsága már következik. □

2.3.2. Feladat. Legyen $\{W_t : t \geqslant 0\}$ egy standard Wiener-folyamat. Mutassuk meg, hogy

(i) $\{W_t : t \geqslant 0\}$ martingál,

(ii) $\{W_t^2 - t : t \geqslant 0\}$ martingál,

(iii) $\{e^{\theta W_t - t\theta^2/2} : t \geqslant 0\}$ martingál, ahol $\theta \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám,

(iv) $\left\{ \int_0^t W_u \,\mathrm{d}u - \frac{1}{3}W_t^3 : t \geqslant 0\right\}$ martingál,

az $\{\mathcal{F}_t^W : t \geqslant 0\}$ filtrációra nézve.

Megoldás. Az 1.6.5. Definíció feltételeit kell leellenőrizni mind a négy esetben.

(i): Nyilván W_t $\mathcal{F}_t^W$-mérhető és $\mathbb{E}|W_t| < +\infty$, mert $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$. Legyen a továbbiakban $0 \leqslant s < t < +\infty$. Ekkor

$$\mathbb{E}(W_t \,|\, \mathcal{F}_s^W) = \mathbb{E}(W_t - W_s + W_s \,|\, \mathcal{F}_s^W) = \mathbb{E}(W_t - W_s \,|\, \mathcal{F}_s^W) + \mathbb{E}(W_s \,|\, \mathcal{F}_s^W).$$

Megmutatjuk, hogy $W_t - W_s$ független $\mathcal{F}_s^W$-től minden $0 \leqslant s < t$ esetén. Valóban, (1.5.4) és (1.5.6) alapján minden $s > 0$-ra

$$\mathcal{F}_s^W = \sigma(W_u : 0 \leqslant u \leqslant s) = \sigma\Big(\bigcup_{0 \leqslant t_1 < \cdots < t_k \leqslant s, k \in \mathbb{N}} \sigma(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k}) \Big)$$

és

$$\sigma(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_k}) = \sigma(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}).$$

Mivel $\{W_t : t \geqslant 0\}$ független növekményű, $W_t - W_s$ független a $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ növekményektől, így a fenti előállítás miatt a $\sigma(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_k})$ σ-algebrától is. Tehát $W_t - W_s$ független az

$$\bigcup_{0 \leqslant t_1 < \cdots < t_k \leqslant s, k \in \mathbb{N}} \sigma(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k}) \quad \text{uniótól is.}$$

A jó halmazok módszerével pedig könnyen belátható, hogy független a fenti unió által generált σ-algebrától, azaz $\mathcal{F}_s^W$-től is.

Így

$$\mathbb{E}(W_t \,|\, \mathcal{F}_s^W) = \mathbb{E}(W_t - W_s) + W_s = W_s \qquad \text{P-m.m.}$$

Megjegyezzük, hogy a 1.6.9. Állítás alapján az (i) rész állítása közvetlenül is adódik, hiszen egy standard Wiener-folyamat független növekményű és azonosan 0 a várható érték függvénye.

(ii): Nyilván $W_t^2 - t$ $\mathcal{F}_t^W$-mérhető és

$$\mathbb{E}|W_t^2 - t| \leqslant \mathbb{E}W_t^2 + t = t + t < +\infty.$$

Továbbá minden $0 \leqslant s < t$ esetén, $W_t - W_s$ és $\mathcal{F}_s^W$ függetlensége alapján

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_t^2 - t \,|\, \mathcal{F}_s^W) &= \mathbb{E}(W_t^2 \,|\, \mathcal{F}_s^W) - t = \mathbb{E}((W_t - W_s + W_s)^2 \,|\, \mathcal{F}_s^W) - t \\
&= \mathbb{E}((W_t - W_s)^2 + 2(W_t - W_s)W_s + W_s^2 \,|\, \mathcal{F}_s^W) - t \\
&= \mathbb{E}((W_t - W_s)^2 \,|\, \mathcal{F}_s^W) + 2W_s\mathbb{E}(W_t - W_s \,|\, \mathcal{F}_s^W) + W_s^2 - t \\
&= \mathbb{E}(W_t - W_s)^2 + 2W_s\mathbb{E}(W_t - W_s) + W_s^2 - t = \mathbb{E}(\mathcal{N}(0, t-s))^2 + W_s^2 - t \\
&= t - s + W_s^2 - t = W_s^2 - s \qquad \text{P-m.m.}
\end{aligned}$$

(iii): Nyilván $e^{\theta W_t - t\theta^2/2}$ $\mathcal{F}_t^W$-mérhető és

$$\mathbb{E}\Big|e^{\theta W_t - t\theta^2/2}\Big| = \mathbb{E}e^{\theta W_t - t\theta^2/2} = e^{-t\theta^2/2}\mathbb{E}e^{\theta W_t} = e^{-t\theta^2/2}\mathbb{E}e^{\mathcal{N}(0,\theta^2 t)} = e^{-t\theta^2/2}e^{t\theta^2/2} = 1 < +\infty.$$

Ugyanis, az alábbi számolásokból (is) következik, hogy $\mathbb{E}e^{\mathcal{N}(0,\theta^2 t)} = e^{t\theta^2/2}$. Továbbá minden $0 \leqslant s < t$ esetén, $W_t - W_s$ és $\mathcal{F}_s^W$ függetlensége alapján

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{\theta W_t - t\theta^2/2} \mid \mathcal{F}_s^W) &= e^{-t\theta^2/2}\mathbb{E}(e^{\theta W_t} \mid \mathcal{F}_s^W) = e^{-t\theta^2/2}\mathbb{E}(e^{\theta(W_t - W_s)}e^{\theta W_s} \mid \mathcal{F}_s^W)\\ &= e^{-t\theta^2/2}e^{\theta W_s}\mathbb{E}(e^{\theta(W_t-W_s)} \mid \mathcal{F}_s^W) = e^{-t\theta^2/2}e^{\theta W_s}\mathbb{E}(e^{\theta(W_t-W_s)}).\end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{\theta(W_t-W_s)}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta x}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}\,\mathsf{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{-\frac{1}{2(t-s)}(x^2 - 2(t-s)\theta x)\Big\}\,\mathsf{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{-\frac{1}{2(t-s)}\big[(x-(t-s)\theta)^2 - (t-s)^2\theta^2\big]\Big\}\,\mathsf{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\Big\{\frac{(t-s)\theta^2}{2}\Big\}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{-\frac{(x-(t-s)\theta)^2}{2(t-s)}\Big\}\,\mathsf{d}x\\ &= \exp\Big\{\frac{(t-s)\theta^2}{2}\Big\}.\end{aligned}$$

Így

$$\mathbb{E}(e^{\theta W_t - t\theta^2/2} \mid \mathcal{F}_s^W) = e^{-t\theta^2/2}e^{\theta W_s}e^{(t-s)\theta^2/2} = e^{\theta W_s - s\theta^2/2} \qquad \text{P-m.m.}$$

(iv): Nyilván $\int_0^t W_u\,\mathsf{d}u - \frac{1}{3}W_t^3$ $\mathcal{F}_t^W$-mérhető és

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t W_u\,\mathsf{d}u - \frac{1}{3}W_t^3\right|\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\int_0^t |W_u|\,\mathsf{d}u + \frac{1}{3}|W_t|^3\right) = \int_0^t \mathbb{E}|W_u|\,\mathsf{d}u + \frac{1}{3}\mathbb{E}|W_t|^3 < +\infty.$$

Továbbá minden $0 \leqslant s < t$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_0^t W_u\,\mathsf{d}u - \frac{1}{3}W_t^3 \,\Big|\, \mathcal{F}_s^W\right) &= \mathbb{E}\left(\int_0^s W_u\,\mathsf{d}u + \int_s^t W_u\,\mathsf{d}u - \frac{1}{3}(W_t - W_s + W_s)^3 \,\Big|\, \mathcal{F}_s^W\right)\\ &= \int_0^s W_u\,\mathsf{d}u + \mathbb{E}\left(\int_s^t W_u\,\mathsf{d}u \,\Big|\, \mathcal{F}_s^W\right)\\ &\quad - \frac{1}{3}\mathbb{E}\big((W_t-W_s)^3 + 3(W_t-W_s)^2W_s + 3(W_t-W_s)W_s^2 + W_s^3 \,\big|\, \mathcal{F}_s^W\big).\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $0 \leqslant s < t$ esetén $W_t - W_s$ és $\mathcal{F}_s^W$ független, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_s^t W_u\,\mathsf{d}u \,\Big|\, \mathcal{F}_s^W\right) &= \mathbb{E}\left(\int_s^t (W_u - W_s)\,\mathsf{d}u + \int_s^t W_s\,\mathsf{d}u \,\Big|\, \mathcal{F}_s^W\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\int_s^t (W_u - W_s)\,\mathsf{d}u\right) + \mathbb{E}\left((t-s)W_s \,\Big|\, \mathcal{F}_s^W\right)\\ &= \int_s^t \mathbb{E}(W_u - W_s)\,\mathsf{d}u + (t-s)W_s = (t-s)W_s.\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\int_0^t W_u \,\mathrm{d}u - \frac{1}{3}W_t^3 \,\Big|\, \mathcal{F}_s^W\right)\\
&= \int_0^s W_u \,\mathrm{d}u + (t-s)W_s - \frac{1}{3}\Big(\mathbb{E}(W_t - W_s)^3 + 3W_s\mathbb{E}(W_t - W_s)^2 + 3W_s^2\mathbb{E}(W_t - W_s) + W_s^3\Big)\\
&= \int_0^s W_u \,\mathrm{d}u + (t-s)W_s - \frac{1}{3}\big(3(t-s)W_s + W_s^3\big) = \int_0^s W_u \,\mathrm{d}u - \frac{1}{3}W_s^3.
\end{aligned}$$

□

2.3.3. Feladat. Legyen $\{W_t : t \geqslant 0\}$ egy standard Wiener-folyamat. Mutassuk meg, hogy $\{e^{W_t - t/2} : t \geqslant 0\}$ olyan L_1-ben korlátos martingál, mely egy valószínűséggel konvergens, ha $t \to +\infty$!

Megoldás. Az 2.3.2. Feladat (iii) része alapján kapjuk, hogy tetszőleges $\theta \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left\{e^{\theta W_t - \theta^2 t/2}, t \geqslant 0\right\}$$

martingál. Speciálisan, $\theta = 1$-el kapjuk, hogy $\{e^{W_t - t/2}, t \geqslant 0\}$ martingál.

Ahhoz, hogy L_1-ben korlátos azt kell megmutatni, hogy

$$\sup_{t\geqslant 0} \mathbb{E}\left|e^{W_t - t/2}\right| < +\infty.$$

Mivel az exponenciális függvény nemnegatív és a martingálság miatt minden $t \geqslant 0$-ra

$$\mathbb{E}e^{W_t - t/2} = \mathbb{E}e^{W_0 - 0/2} = \mathbb{E}e^0 = 1,$$

kapjuk, hogy

$$\sup_{t\geqslant 0} \mathbb{E}\left|e^{W_t - t/2}\right| = 1 < +\infty.$$

A Wiener-folyamatra vonatkozó nagy számok erős törvénye alapján (lásd az 1.4.16. Állítást)

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \,\Big|\, \lim_{t\to+\infty} \frac{W_t(\omega)}{t} = 0\right\}\right) = 1.$$

Mivel

$$e^{W_t - t/2} = e^{t\left(\frac{W_t}{t} - \frac{1}{2}\right)},$$

kapjuk, hogy a fenti kifejezés kitevője 1-valószínűséggel $-\infty$-hez tart, ha $t \to +\infty$. Így kapjuk, hogy a megadott martingál 1-valószínűséggel 0-hoz konvergál. □

2.4. Poisson-folyamat

2.4.1. Feladat. Legyen $\{N_t : t \geqslant 0\}$ egy λ-paraméterű Poisson-folyamat. Igaz-e, hogy ekkor azon t-k halmazának Lebesgue-mértéke, melyekre $\mathbb{E}N_t = \lambda t$ teljesül 1-el egyenlő?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* a helyes válasz $+\infty$. □

2.4.2. Feladat. (Ross [7], 216. old) Jelölje ξ_t a t időpontig egy adott területre bevándorló emberek számát (az időt mérjük napban). Tegyük fel, hogy $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ 1 paraméterű Poisson-folyamat.

(1) Várhatóan mennyi idő telik el a 10. bevándorló érkezéséig?

(2) Mi a valószínűsége, hogy a 10. és 11. bevándorló érkezése között eltelt idő legalább 2 nap?

Megoldás.

(1) Az $\mathbb{E}(T_{10})$ várható értéket kell kiszámolni. Mivel egy p-edrendű, λ paraméterű gamma eloszlás várható értéke p/λ és $T_{10} \sim \Gamma(10, 1)$, kapjuk, hogy $\mathbb{E}(T_{10}) = 10$. Tehát 10 nap a válasz.

(2) $P(\eta_{11} \geqslant 2) = e^{-2} \approx 0.13533$.

□

2.4.3. Feladat. (Ross [7], 220. old) Jelölje ξ_t a t időpontig egy A országba bevándorló emberek számát (az időt mérjük hetekben). Tegyük fel, hogy $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ 10 paraméterű Poisson-folyamat. Feltételezve, hogy minden bevándorló $1/12$ valószínűséggel orosz, mi a valószínűsége, hogy február folyamán egyetlen orosz származású bevándorlót sem regisztrálnak az A országban?

Megoldás. Az 1.7.12. Állítás alapján az A országba februárban bevándorló orosz származásúak száma Poisson eloszlású $4 \cdot 10 \cdot 1/12 = 10/3$ paraméterrel, mert február 4 hétből áll. Így a keresett valószínűség

$$\frac{(10/3)^0}{0!} e^{-10/3} = e^{-10/3}.$$

Egy másik megoldás: jelölje η_{11}^0 az első orosz bevándorló érkezési idejét, mely az 1.7.12. Állítás alapján exponenciális eloszlású $\frac{10}{12}$ paraméterrel. A keresett valószínűség:

$$P(\eta_{11}^0 > 4) = e^{-\frac{10}{12}4} = e^{-10/3} \approx 0.0356739.$$

□

2.4.4. Feladat. Péter készített egy gépet, mely két egymástól függetlenül működő egységből áll, nevezzük ezeket A és B egységnek. Az A egység élettartama exponenciális eloszlású 1000 óra várható értékkel, a B egység élettartama exponenciális eloszlású 500 óra várható értékkel. Peti beindítja a gépét. Mi a valószínűsége, hogy amikor az meghibásodik, akkor az az A egység hibája miatt történik?

Megoldás. Felhasználva a (1.7.12) képletet $\lambda_1 = 1/1000$ és $\lambda_2 = 1/500$ választással, kapjuk, hogy a keresett valószínűség

$$\frac{1/1000}{1/1000 + 1/500} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}.$$

□

2.4.5. Feladat. (**$M/G/\infty$ tömegkiszolgálási modell**) Tekintsünk egy olyan benzinkutat, ahol végtelen sok helyen lehet tankolni. Jelölje ξ_t a t időpontig a kúthoz érkező tankolók számát, feltételezzük, hogy $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ λ paraméterű Poisson-folyamat. Egy tankoló megérkezésekor azonnal megkezdődik a kiszolgálása valamelyik rendelkezésre álló kútnál. Feltételezzük, hogy a kiszolgálási idők egymástól független, azonos eloszlású valószínűségi változók, G eloszlásfüggvénnyel. Jelölje X_t a t időpontig teljesen kiszolgált tankolók számát, Y_t pedig a t időpontban kiszolgálás alatt levő tankolók számát. Határozzuk meg X_t és Y_t eloszlását!

Megoldás. (Ross [7], 225. old. alapján) Legyen $t > 0$ rögzített. Nevezzünk egy tankolót I-típusúnak, ha kiszolgálása befejeződik a t időpontig, és nevezzük II-típusúnak, ha kiszolgálása nem fejeződik be a t időpontig. Ha egy tankoló az s $(0 \leqslant s \leqslant t)$ időpontban tér be a benzinkúthoz, akkor akkor lesz I-típusú, ha kiszolgálási ideje kisebb, mint $t - s$. Mivel a kiszolgálási idő G eloszlásfüggvényű, ennek a valószínűsége $G(t - s)$. Hasonlóan, ha egy tankoló az s $(0 \leqslant s \leqslant t)$ időpontban tér be a benzinkúthoz, akkor $1 - G(t - s)$ valószínűséggel lesz II-típusú. Legyen az 1.7.19. Állításban $k = 2$, $p_1(s) = G(t - s)$, $p_2(s) = 1 - G(t - s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, így kapjuk, hogy X_t Poisson eloszlású, melynek paramétere

$$\mathbb{E}(X_t) = \lambda \int_0^t p_1(s)\,\mathrm{d}s = \lambda \int_0^t G(t - s)\,\mathrm{d}s = \lambda \int_t^0 G(y)(-1)\,\mathrm{d}y = \lambda \int_0^t G(y)\,\mathrm{d}y.$$

Hasonlóan Y_t is Poisson eloszlású, melynek paramétere

$$\mathbb{E}Y_t = \lambda \int_0^t (1 - G(t - s))\,\mathrm{d}s = \lambda \int_0^t (1 - G(y))\,\mathrm{d}y.$$

□

2.4.6. Feladat. Ebben a feladatban az autóbalesetek számát vizsgáljuk. Tegyük fel, ha valakinek még nem volt autóbalesete, akkor az általa elszenvedett autóbalesetek számát az idő függvényében β paraméterű Poisson-folyamat írja le. Abban az esetben, ha már volt autóbalesete, akkor azt feltételezzük, hogy az általa elszenvedett autóbalesetek számát az idő függvényében α paraméterű Poisson-folyamat írja le. (Úgy gondoljuk, hogy $\beta < \alpha$.) Várhatóan hány balesete lesz az egyénnek az elkövetkező t időintervallumban?

Megoldás. Jelölje ξ_t az egyén által a t időpontig elszenvedett autóbalesetek számát, X pedig az egyén első autóbalesetének időpontját. Mivel az első baleset bekövetkezéséig eltelt idő nem más, mint a β paraméterű Poisson-folyamat esetén a T_1 várakozási idő, ami pedig β paraméterű exponenciális eloszlású, így a teljes várható érték tétele alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\xi_t = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(\xi_t \,|\, X = s) f_X(s)\,\mathsf{d}s = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(\xi_t \,|\, X = s)\beta e^{-\beta s}\,\mathsf{d}s.$$

Ha $s > t$, akkor $\mathbb{E}(\xi_t \,|\, X = s) = 0$, így

$$\mathbb{E}\xi_t = \int_0^t \mathbb{E}(\xi_t \,|\, X = s)\beta e^{-\beta s}\,\mathsf{d}s.$$

Felhasználva azt, hogy az első baleset bekövetkezése után a balesetek már α paraméterű Poisson-folyamat szerint következnek be, megmutatjuk, hogy az $\mathbb{E}(\xi_t \,|\, X = s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$ feltételes várható érték megegyezik az α paraméterű Poisson-folyamatban $t - s$ idő alatt bekövetkező balesetek átlagos számának eggyel növelt értékével. (Heurisztiusan azért kell eggyel növelni, mert a feltétel azt mondja, hogy 1 baleset már volt.) A pontos indoklás a következő. Legyen $\{\xi_t^{(\alpha)} : t \geqslant 0\}$ egy α paraméterű Poisson-folyamat, mely független X-től. Ha $0 \leqslant s \leqslant t$, úgy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi_t \,|\, X = s) &= \mathbb{E}(\xi_s \,|\, X = s) + \mathbb{E}(\xi_t - \xi_s \,|\, X = s) = \mathbb{E}(1 \,|\, X = s) + \mathbb{E}(\xi_{t-s}^{(\alpha)} \,|\, X = s)\\ &= 1 + \mathbb{E}\xi_{t-s}^{(\alpha)} = 1 + \alpha(t - s).\end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi_t &= \int_0^t (1 + \alpha(t - s))\beta e^{-\beta s}\,\mathsf{d}s = \beta(1 + \alpha t)\left[\frac{e^{-\beta s}}{-\beta}\right]_0^t + \beta\alpha \int_0^t -s e^{-\beta s}\,\mathsf{d}s\\ &= -(1 + \alpha t)(e^{-\beta t} - 1) + \alpha t e^{-\beta t} - \alpha \int_0^t e^{-\beta s}\,\mathsf{d}s.\end{aligned}$$

Innen egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\mathbb{E}\xi_t = 1 + \alpha t - \frac{\alpha}{\beta} + e^{-\beta t}\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right).$$

$\square$

2.4.7. Feladat. A Lázbérci víztározóban a víz mennyisége naponta átlagosan 1000 egységgel csökken. A véletlenszerűen előforduló esőzések folyamatosan újratöltik a víztározót. Jelölje ξ_t a t időpontig az esőzések számát (az időt napban mérjük), feltételezzük, hogy $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ $0,2$ paraméterű Poisson-folyamat. Egy esőzés alkalmával a víztározóban levő víz mennyisége vagy 5000, vagy 8000 egységgel növekszik, ezek valószínűsége legyen rendre $0,8$ ill. $0,2$. Tudjuk, hogy a jelenlegi vízmennyiség 5000 egység.

(1) Mi a valószínűsége, hogy a víztározó 5 napon belül kiürül?

(2) Mi a valószínűsége, hogy a víztározó az elkövetkezendő 10 napban valamikor üres lesz?

Megoldás.

(i) Az adatok figyelembevételével kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a víztározó 5 napon belül kiürül egyenlő annak a valószínűségével, hogy 5 napig nincs eső, amit úgy is fogalmazhatunk, hogy a $0,2$ paraméterű Poisson-folyamatban az első várakozási idő, T_1 nagyobb, mint 5 nap. Mivel T_1 exponenciális eloszlású $0,2$ paraméterrel

$$P(T_1 > 5) = e^{-0,2\cdot 5} = e^{-1}.$$

(ii) Az 1.7.12. Állítás alapján dolgozunk. Egy esőzést minősítsünk I-típusúnak, ha az 5000 egységgel növeli a víztározó vízkészletét (ennek valószínűsége $0,8$), és II-típusúnak, ha 8000 egységgel (ennek valószínűsége $0,2$). Jelölje $\xi_t^{(1)}$ a t időpontig az I-típusú esőzések számát, $\xi_t^{(2)}$ pedig a t időpontig a II-típusú esőzések számát. Az 1.7.12. Állítás szerint $\{\xi_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ $0,2\cdot 0,8 = 0,16$ paraméterű Poisson-folyamat, $\{\xi_t^{(2)} : t \geqslant 0\}$ $0,2\cdot 0,2 = 0,04$ paraméterű Poisson-folyamat és egymástól függetlenek. Az adatok figyelembevételével kapjuk, hogy 10 napon belül úgy lehet valamikor üres a víztározó, ha nincs eső az első 5 napban; vagy 1 darab I-típusú, 0 darab II-típusú eső van összesen, és ez az 1 darab I-típusú eső az első 5 nap valamelyikén következik be. Valóban, például, ha a harmadik napon van 5000 egység eső, akkor

1. nap vége	2. nap vége	3. nap vége	4. nap vége	5. nap vége	6. nap vége	7. nap vége	8. nap vége	9. nap vége	10. nap vége
4000	3000	7000	6000	5000	4000	3000	2000	1000	0

,

vagy ha az ötödik napon van 5000 egység eső, akkor

1. nap vége	2. nap vége	3. nap vége	4. nap vége	5. nap vége	6. nap vége	7. nap vége	8. nap vége	9. nap vége	10. nap vége
4000	3000	2000	1000	5000	4000	3000	2000	1000	0

.

Kihasználva a két Poisson-folyamat függetlenségét és (i)-t, kapjuk, hogy a keresett valószínűség

$$\begin{aligned} e^{-1} + P\Big(&\{1 \text{ db I-típusú eső és } 0 \text{ db II-típusú eső az első } 5 \text{ napban}\} \\ &\cap \{\text{nincs eső az utolsó } 5 \text{ napban}\}\Big) = e^{-1} + P(T_1^{(1)} \leqslant 5, T_2^{(1)} > 10, T_1^{(2)} > 10) \\ &= e^{-1} + P(T_1^{(1)} \leqslant 5, T_2^{(1)} > 10) P(T_1^{(2)} > 10). \end{aligned}$$

Itt felhívjuk a figyelmet, hogy abból, hogy az időt napban mérjük, a $\{T_1^{(1)} \leqslant 5\}$ esemény nem egyezik meg a $\{T_1^{(1)} < 6\}$ eseménnyel, mert a $\{T_1^{(1)} \leqslant 5\}$ esemény azt jelenti, hogy az első I-típusú eső bekövetkezésének ideje a $[0,5]$ intervallumban van (azaz az első 5 nappal bezárólag), míg a $\{T_1^{(1)} < 6\}$ esemény azt, hogy az első I-típusú eső bekövetkezésének ideje a $[0,6)$ intervallumban van (azaz a 6. nap vége előtt). Így $\{T_1^{(1)} \leqslant 5\} \subseteq \{T_1^{(1)} < 6\}$ és a két esemény nem egyezik meg (valóban, ha pl. $T_1^{(1)} = 5.5$, az azt jelenti, hogy már a 6. napon esik az első I-típusú eső, és nem az első 5 nappal bezárólag). Mivel $T_1^{(2)} \sim \operatorname{Exp}(0,04)$, $T_1^{(1)} \sim \operatorname{Exp}(0,16)$ és $T_2^{(1)} \sim \Gamma(2; 0,16)$ kapjuk, hogy a keresett valószínűség

$$e^{-1} + P(\eta_1 < 5, \eta_1 + \eta_2 > 10) e^{-0,04\cdot 10},$$

ahol η_1, η_2 független $0,16$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor

$$\begin{aligned}P(\eta_1 < 5, \eta_1 + \eta_2 > 10) &= \iint\limits_{\substack{\{x<5, x+y>10\} \\ x,y\geqslant 0,}} 0,16^2 e^{-0,16(x+y)}\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_0^5 \left(\int_{10-x}^{+\infty} 0,16^2 e^{-0,16(x+y)}\,\mathsf{d}y\right)\mathsf{d}x \\ &= 0,16^2 \int_0^5 \left(\int_{10-x}^{+\infty} e^{-0,16y}\,\mathsf{d}y\right) e^{-0,16x}\mathsf{d}x = 0,16 \int_0^5 e^{-0,16(10-x)} e^{-0,16x}\,\mathsf{d}x \\ &= 5\cdot 0,16 e^{-1,6}.\end{aligned}$$

Így a keresett valószínűség $e^{-1} + 0,8e^{-0,2}$.

Megjegyezzük, hogy a (ii) rész esetén gyorsabban is célhoz érhetünk. A Poisson-folyamat memoryless tulajdonsága folytán (az egymást követő esőzések közti idők függetlenek)

$$\begin{aligned}e^{-1} + &P(T_1^{(1)} \leqslant 5, T_2^{(1)} > 10, T_1^{(2)} > 10) \\ &= e^{-1} + P(T_1^{(1)} \leqslant 5, T_1 \leqslant 5, T_2 > 10) \\ &= e^{-1} + P(\xi_5^{(1)} = 1)P(\xi_5^{(2)} = 0)P(\xi_5 = 0) \\ &= e^{-1} + \frac{(0,16\cdot 5)^1}{1!}e^{-0,16\cdot 5}\frac{(0,04\cdot 5)^0}{0!}e^{-0,04\cdot 5}\frac{(0,2\cdot 5)^0}{0!}e^{-0,2\cdot 5} = e^{-1} + 0,8e^{-0,2}.\end{aligned}$$

□

2.4.8. Feladat. Tegyük fel, hogy minden nap egymástól függetlenül elvégzünk egy kísérletet, melyben megfigyelünk egy p $(0 < p < 1)$ valószínűségű A eseményt. Jelölje ξ_n az első n nap folyamán A bekövetkezéseinek számát, T_r pedig azt a napot, mikor az A esemény r-edszerre következik be, $r \in \mathbb{N}$.

(1) Mi lesz ξ_n eloszlása?

(2) Mi lesz T_1 eloszlása?

(3) Mi lesz T_r eloszlása?

Megoldás.

(1) n-edrendű, p paraméterű binomiális eloszlás,

(2) p paraméterű geometriai eloszlás,

(3) r-edrendű, p paraméterű negatív binomiális eloszlás. □

2.4.9. Feladat. Gyula és Józsi készítettek egy jegyzetet, melyben a hibák száma λ paraméterű Poisson eloszlást követ. Mindketten, egymástól függetlenül ellenőrizték jegyzetüket. Gyula minden hibát egymástól függetlenül p_1, míg Józsi minden hibát egymástól függetlenül p_2 valószínűséggel talál meg $(0 < p_1, p_2 < 1)$. Jelölje

(1) X_1 a Gyula által igen, de Józsi által meg nem talált hibák számát,

(2) X_2 a Józsi által igen, de Gyula által meg nem talált hibák számát,

(3) X_3 azon hibák számát, melyet mindketten megtaláltak,

(4) X_4 azon hibák számát, melyet egyikük sem talált meg.

Feladataink a következők:

(1) Határozzuk meg X_1, X_2, X_3, X_4 együttes eloszlását!

(2) Természetes azt feltételezni, hogy λ, p_1 és p_2 nem ismertek. Határozzuk meg a λ, p_1 és p_2 paraméterek azon $\widehat{\lambda}$, $\widehat{p}_1$ és $\widehat{p}_2$ becsléseit, melyekre

$$X_1 = \widehat{\lambda}\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_2), \qquad X_2 = \widehat{\lambda}\widehat{p}_2(1-\widehat{p}_1), \qquad X_3 = \widehat{\lambda}\widehat{p}_1\widehat{p}_2.$$

(3) Adjunk becslést $\mathbb{E}X_4$-re!

(4) Meg tudjuk-e mondani, hogy p_1 vagy p_2 a nagyobb?

Megoldás.

(i) Minden egyes hibát minősítsünk I.-,II.-,III.-, ill. IV.-típusúnak, aszerint, hogy azt X_1, X_2, X_3-hoz, ill. X_4-hez számoljuk. Így egy hiba $p_1(1-p_2)$, $p_2(1-p_1)$, p_1p_2, ill. $(1-p_1)(1-p_2)$ valószínűséggel lesz I.-,II.-,III.-, ill. IV.-típusú. Az 1.7.12. Állítás alapján X_1, X_2, X_3 és X_4 független Poisson eloszlású valószínűségi változók a következő paraméterekkel:

$$\mathbb{E}X_1 = \lambda p_1(1-p_2), \quad \mathbb{E}X_2 = \lambda p_2(1-p_1), \quad \mathbb{E}X_3 = \lambda p_1p_2, \quad \mathbb{E}X_4 = \lambda(1-p_1)(1-p_2).$$

(ii) Mivel

$$\frac{X_2}{X_3} = \frac{1-\widehat{p}_1}{\widehat{p}_1}, \qquad \frac{X_1}{X_3} = \frac{1-\widehat{p}_2}{\widehat{p}_2},$$

kapjuk, hogy

$$\widehat{p}_1 = \frac{X_3}{X_2+X_3}, \qquad \widehat{p}_2 = \frac{X_3}{X_1+X_3},$$

amiből $X_3 = \widehat{\lambda}\widehat{p}_1\widehat{p}_2$ felhasználásával

$$\widehat{\lambda} = \frac{X_3}{\widehat{p}_1\widehat{p}_2} = \frac{(X_1+X_3)(X_2+X_3)}{X_3}.$$

(iii) Mivel $\mathbb{E}X_4 = \lambda(1-p_1)(1-p_2)$, $\mathbb{E}X_4$-et becsülhetjük a következő módon

$$\widehat{\mathbb{E}X_4} = \widehat{\lambda}(1-\widehat{p}_1)(1-\widehat{p}_2) = \frac{(X_2+X_3)(X_1+X_3)}{X_3}\left(1-\frac{X_3}{X_2+X_3}\right)\left(1-\frac{X_3}{X_1+X_3}\right) = \frac{X_1X_2}{X_3}.$$

(iv) Még akkor sem, ha Pap Gyuláról és Gáll József Mihályról van szó. □

2.4.10. Feladat. Tekintsünk egy n-tagú társaságot, akik mikrobuszt bérelve mentek egy lagziba. Hazafele jövet a mikrobusz mindenkit majdnem hazáig visz. Feltételezzük, hogy a mikrobusz egymást követő megállásai között eltelt idők független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Minden egyes megállásnál pontosan egy ember száll le és hazasétál, (a leszállástól számított) hazaérkezésekig eltelt idők μ paraméterű egymástól független exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

(1) Jelölje S az utolsó utas leszállásának időpontját. Mi S eloszlása?

(2) Tegyük fel, hogy az utolsó utas a $t = 1$ időpontban száll le a mikrobuszról. Mi a valószínűsége, hogy ekkor a többiek már mind otthon vannak?

Megoldás.

(i) Mivel S egy λ paraméterű Poisson-folyamatban az n-edik várakozási idő, így S n-edrendű, λ paraméterű gamma-eloszlású.

(ii) Az 1.7.16. Következmény alapján, azon feltétel mellett, hogy $S = 1$, az első $n-1$ leszálló utas leszállási időpontjainak együttes eloszlása megegyezik a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett $n - 1$ elemű rendezett minta együttes eloszlásával. Ezért a kiszámolandó feltételes valószínűség megegyezik a következő („feltétel nélküli") valószínűséggel. Legyenek $X_1, \ldots, X_{n-1}$ független, a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók, illetve tekintsünk $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ független, μ paraméreű exponenciális eloszlású valószínűségi változókat, melyek függetlenek az $X_1, \ldots, X_{n-1}$ valószínűségi változóktól is. A kérdéses feltételes valószínűség megegyezik a

$$P(X_i^{(n-1)} + \xi_i < 1,\ i = 1, \ldots, n-1) = P(X_i + \xi_i < 1,\ i = 1, \ldots, n-1) \quad \text{valószínűséggel.}$$

Ekkor

$$P(X_i + \xi_i < 1,\ i = 1, \ldots, n-1) = \prod_{i=1}^{n-1} P(X_i + \xi_i < 1) = P(X_1 + \xi_1 < 1)^{n-1},$$

és

$$P(X_1 + \xi_1 < 1) = \iint\limits_{\substack{x+y<1,\\ 0<x<1, y>0}} 1 \cdot \mu e^{-\mu y}\, \mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \mu e^{-\mu y}\, \mathsf{d}y \right) \mathsf{d}x = \int_0^1 [-e^{-\mu y}]_{y=0}^{y=1-x}\, \mathsf{d}x$$

$$= \int_0^1 (1 - e^{-\mu(1-x)})\, \mathsf{d}x = 1 - \left[\frac{e^{-\mu(1-x)}}{\mu} \right]_0^1 = \frac{1}{\mu}(e^{-\mu} - 1 + \mu).$$

Így a kérdésre a válasz:

$$\frac{1}{\lambda^{n-1}}(e^{-\lambda} - 1 + \lambda)^{n-1}.$$

$\square$

2.4.11. Feladat. Tekintsünk egy biztosító társaságot és tegyük fel, hogy a biztosítóhoz bejelentett balesetek (káresetek) száma λ paraméterű Poisson-folyamatot követ. A baleset bekövetkezésétől a kártérítési igény bejelentéséig eltelt (nemnegatív) időt leíró valószínűségi változó eloszlásfüggvénye legyen G.

(1) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan n darab már bekövetkezett, de még be nem jelentett kártérítési igény van a t időpontig? (Ez az ún. IBNR=Incurred But Not Reported eset.)

(2) Tegyük fel, hogy minden egyes kártérítési igény esetén a követelt pénzmennyiséget leíró valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F, és a kért (nemnegatív) pénzösszeg független a kár bekövetkezésétől eltelt időtől. Határozzuk meg az összes már bekövetkezett, de még be nem jelentett (IBNR) kárigény által követelt pénzmennyiség várható értékét!

Megoldás.

(i) Gondoljunk vissza az 2.4.5. Példában szereplő $M/G/\infty$ tömegkiszolgálási modellre. Egy baleset bekövetkezése fog megfelelni egy tankoló érkezésének. A kiszolgálási időnek pedig a bejelentésig eltelt idő felel meg, aminek eloszlásfüggvénye G. Így, ha X_t jelöli a t időpontban már bekövetkezett, de még be nem jelentett IBNR esetek számát, akkor X_t nem más, mint a t időpontban a rendszerben levő, még ki nem szolgált tankolók száma. Erről pedig az ottani levezetésből tudjuk, hogy Poisson eloszlású $\mathbb{E}X_t = \lambda \int_0^t (1 - G(t-s))\,\mathrm{d}s = \lambda \int_0^t (1 - G(y))\,\mathrm{d}y$ várható értékkel.

Így a keresett valószínűség

$$P(X_t = n) = \frac{\left(\lambda \int_0^t (1 - G(y))\,\mathrm{d}y\right)^n}{n!} e^{-\lambda \int_0^t (1-G(y))\,\mathrm{d}y}.$$

(ii) Jelölje Y_t az összes, a t időpontig már bekövetkezett, de még be nem jelentett kárigény által követelt pénzmennyiség összegét. Ekkor

$$Y_t = \sum_{i=1}^{X_t} Z_i,$$

ahol Z_i jelöli az i-edik IBNR kárigény által kért pénzösszeget. Mivel X_t Poisson eloszlású és $Z_1, Z_2, \dots$ egymástól és X_t-től is függetlenek, kapjuk, hogy Y_t összetett Poisson eloszlású valószínűségű változó és az (1.8.3) képlet alapján

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y_t = \mathbb{E}X_t\mathbb{E}Z_1 &= \lambda \int_0^t (1 - G(y))\,\mathrm{d}y \cdot \mathbb{E}Z_1 \\ &= \lambda \int_0^t (1 - G(y))\,\mathrm{d}y \int_0^{+\infty} (1 - F(y))\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

(Itt azt használtuk fel, hogy ha $\xi \geqslant 0$ valószínűségű változó, akkor

$$\mathbb{E}\xi = \int_0^{+\infty} (1 - F_\xi(x))\,\mathrm{d}x,$$

ahol F_ξ jelöli ξ eloszlásfüggvényét.) □

2.4.12. Feladat. Műholdakat λ paraméterű Poisson-folyamat szerint állítanak földkörüli pályára. A különböző műholdak által világűrben eltöltött idők egymástól független, G eloszlásfüggvényű valószínűségű változók. Mi annak a valószínűsége, hogy egy t $(t > 0)$ időpontban a világűrben levő műholdak egyikét sem az s, $(s < t)$ időpont előtt állították pályára?

Megoldás. Nevezzünk egy műholdat I-típusúnak, ha az s időpont előtt állították pályára, de a t időpontban már nem működik (azaz már nincs a világűrben), és II-típusúnak, ha az s időpont előtt állították pályára, és a t időpontban még működik (azaz még a világűrben van). Jelölje ξ az s időpont előtt pályára állított műholdak számát, $\xi^{(1)}$ az s időpont előtt pályára állított I-típusú műholdak számát és $\xi^{(2)}$ az s időpont előtt pályára állított II-típusú műholdak számát. Ekkor $\xi = \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$ és ξ Poisson eloszlású λs paraméterrel. Ha egy műholdat az y, $y \leqslant s$ időpontban állítunk pályára, akkor ezt abban az esetben minősítjük I-típusúnak, ha működési ideje kisebb, mint $t - y$, ennek a valószínűsége $G(t - y)$. Akkor minősítjük II-típusúnak, ha működési ideje nagyobb vagy egyenlő, mint $t - y$, aminek valószínűsége $1 - G(t - y)$.

Így az 1.7.19. Állítás alapján $\xi^{(2)}$ Poisson eloszlású, melynek paramétere

$$\mathbb{E}\xi^{(2)} = \lambda \int_0^s (1 - G(t - y))\,\mathsf{d}y.$$

Ezért a keresett valószínűség

$$P(\xi^{(2)} = 0) = e^{-\lambda \int_0^s (1-G(t-y))\,\mathsf{d}y}.$$

□

2.4.13. Feladat. Vegyük alapul az 2.4.5. Példában bevezetett $M/G/\infty$ tömegkiszolgálási modellt. A kiszolgálási idők közös eloszlásfüggvénye G.

(1) Mi a valószínűsége, hogy az elsőnek érkező ,,látogató" hagyja el elsőnek a rendszert?

(2) Jelölje K_t a t időpontban a rendszerben levő (teljesen még ki nem szolgált) látogatók fennmaradó kiszolgálási idejének összegét. Határozzuk meg K_t várható értékét!

Megoldás.

(i) Legyen A az az esemény, hogy az elsőnek érkező látogató elsőnek hagyja el a rendszert. Jelölje Y az első látogató kiszolgálási idejét és X_t a t időpontig a rendszert elhagyó többi látogató számát. Az 1.7.19. Állítás alapján $X_t + \mathbb{1}_{\{Y<t\}}$ Poisson eloszlású $\lambda \int_0^t G(t-y)\,\mathsf{d}y$ paraméterrel. A teljes várható érték tétele alapján

$$P(A) = \int_0^{+\infty} P(A \,|\, Y = t)\,\mathsf{d}G(t).$$

Az $\{Y = t\}$ feltétellel leszűkített valószínűségi mezőn az az esemény, hogy az első látogató távozik elsőnek megegyezik azzal az eseménnyel, hogy a t ideig nem távozik senki, azaz $X_t = 0$. Így felhasználva, hogy X_t és Y függetlenek, kapjuk, hogy

$$P(A \,|\, Y = t) = P(X_t = 0 \,|\, Y = t) = P(X_t = 0).$$

Ezért $P(A) = \int_0^{+\infty} P(X_t = 0)\,\mathsf{d}G(t)$. A továbbiakban a $P(X_t = 0)$ valószínűség kiszámításával foglalkozunk. Mivel X_t és $\mathbb{1}_{\{Y<t\}}$ függetlenek és $X_t + \mathbb{1}_{\{Y<t\}}$ Poisson eloszlású $\lambda\int_0^t G(t-y)\,\mathsf{d}y$ paraméterrel, kapjuk, hogy (φ_ξ-vel jelölve egy ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét):

$$\varphi_{X_t}(u)\varphi_{\mathbb{1}_{\{Y<t\}}}(u) = \exp\Big\{\lambda\int_0^t G(t-y)\,\mathsf{d}y\cdot(e^{iu}-1)\Big\}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Mivel

$$\varphi_{\mathbb{1}_{\{Y<t\}}}(u) = G(t)e^{iu} + (1 - G(t)) = G(t)(e^{iu}-1) + 1, \quad u \in \mathbb{R},$$

kapjuk, hogy

$$\varphi_{X_t}(u) = \frac{\exp\Big\{\lambda\int_0^t G(t-y)\,\mathsf{d}y\cdot(e^{iu}-1)\Big\}}{G(t)(e^{iu}-1)+1}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Felhasználva, hogy X_t nemnegatív egész értékű, a karakterisztikus függvényre nyert képlet alapján kapjuk, hogy X_t generátorfüggvénye

$$G_{X_t}(z) =: \mathbb{E}z^{X_t} = \frac{\exp\Big\{\lambda\int_0^t G(t-y)\,\mathsf{d}y\cdot(z-1)\Big\}}{G(t)(z-1)+1}, \quad z \in [-1, 1].$$

Felhasználva, hogy $P(X_t = 0) = G_{X_t}(0)$, kapjuk, hogy

$$P(X_t = 0) = \frac{\exp\Big\{-\lambda\int_0^t G(t-y)\,\mathsf{d}y\Big\}}{1 - G(t)}.$$

Így

$$P(A) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp\Big\{-\lambda\int_0^t G(t-y)\,\mathsf{d}y\Big\}}{1-G(t)}\,\mathsf{d}G(t).$$

(ii) Legyen $t > 0$ rögzített. Jelölje ξ_t a t időpontig érkező látogatók számát. Számozzuk meg a t időpont előtt érkező látogatókat 1-től n-ig. (Az i-edik sorszámú látogató nem biztos, hogy az i-ediknek érkezett.) Jelölje továbbá A_i, ill. S_i (a t időpont előtt érkező) i-edik sorszámú látogató érkezési időpontját, ill. kiszolgálási idejét. Ekkor

$$K_t = \sum_{i=1}^{\xi_t}(A_i + S_i - t)^+,$$

ugyanis egy A_i $(A_i \leqslant t)$ időpontban érkező, S_i kiszolgálási idejű látogató az $A_i + S_i$ időpontban hagyná el a rendszert. Így, ha $A_i + S_i > t$, akkor $A_i + S_i - t$ kiszolgálási ideje maradt hátra, ha pedig $A_i + S_i \leqslant t$, akkor már nincs hátra kiszolgálási ideje, de ekkor $(A_i + S_i - t)^+ = 0$, így ez nem növeli az összeget.

Az 1.7.15. Tétel alapján, ha ξ_t adott, akkor a t időpont előtti érkezések időpontjai, A_i-k független, a $(0,t)$ intervallumon egyenletes eloszlásúak. Ezért, ha ξ_t adott, akkor az egyes, t előtti érkezések járulékai a teljes, fennmaradó várakozási időhöz egymástól függetlenek. Azaz $(A_i+S_i-t)^+$, $i = 1, 2, \ldots, n$ függetlenek a $\xi_t = n$ feltételre vonatkozóan. Az 1.7.15. Tétel alapján azt is kapjuk, hogy minden $a \in (0,t)$, $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$P(A_i \leqslant a \,|\, \xi_t = n) = \frac{a}{t}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Így minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(K_t \,|\, \xi_t = n) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{\xi_t}(A_i + S_i - t)^+ \,|\, \xi_t = n\Big) = \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n}(A_i + S_i - t)^+ \,|\, \xi_t = n\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\big((A_i + S_i - t)^+ \,|\, \xi_t = n\big) = n\mathbb{E}\big((A_1 + S_1 - t)^+ \,|\, \xi_t = n\big).
\end{aligned}$$

Ekkor

$$\mathbb{E}\big((A_1 + S_1 - t)^+ \,|\, \xi_t = n\big) = \int_{\mathbb{R}^2} (x + y - t)^+ F_{A_1,S_1\,|\,\xi_t}(\mathsf{d}x, \mathsf{d}y \,|\, n),$$

és

$$\begin{aligned}
F_{A_1,S_1\,|\,\xi_t}(x, y \,|\, n) &= F_{A_1\,|\,\xi_t}(x \,|\, n) F_{S_1\,|\,\xi_t}(y \,|\, n) = F_{A_1\,|\,\xi_t}(x \,|\, n) F_{S_1}(y) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0 \ \text{ vagy } \ y \leqslant 0, \\ \frac{x}{t} G(y) & \text{ha} \quad 0 < x \leqslant t,\ y > 0, \\ G(y) & \text{ha} \quad x > t,\ y > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big((A_1 + S_1 - t)^+ \,|\, \xi_t = n\big) &= \int_0^t \int_0^{+\infty} (x + y - t)^+ \frac{1}{t} \,\mathsf{d}x \,\mathsf{d}G(y) \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t \Big(\int_{t-x}^{+\infty} (x + y - t) \,\mathsf{d}G(y) \Big) \,\mathsf{d}x.
\end{aligned}$$

Így

$$\mathbb{E}(K_t \,|\, \xi_t) = \frac{1}{t} \int_0^t \Big(\int_{t-x}^{+\infty} (x + y - t) \,\mathsf{d}G(y) \Big) \,\mathsf{d}x \cdot \xi_t \quad P\text{-m.m.},$$

ebből pedig már következik, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}K_t = \mathbb{E}(\mathbb{E}(K_t \,|\, \xi_t)) &= (\mathbb{E}\xi_t) \frac{1}{t} \int_0^t \Big(\int_{t-x}^{+\infty} (x + y - t) \,\mathsf{d}G(y) \Big) \,\mathsf{d}x \\
&= \lambda \int_0^t \Big(\int_{t-x}^{+\infty} (x + y - t) \,\mathsf{d}G(y) \Big) \,\mathsf{d}x.
\end{aligned}$$

□

2.4.14. Feladat. Egy üzemben λ paraméterű Poisson-folyamat szerint fordulnak elő üzemzavarok és minden egyes üzemzavar, egymástól függetlenül p $(0 < p < 1)$ valószínűséggel okozza az üzem leállását. Jelölje T az üzem leállásának időpontját és N az ehhez szükséges üzemzavarok számát.

(1) Határozzuk meg T-nek az $N = n$ feltételre vonatkozó feltételes eloszlását!

(2) Határozzuk meg N eloszlását!

(3) Határozzuk meg N-nek T-re vonatkozó feltételes eloszlását!

Megoldás.

(i) Feltéve, hogy $N = n$, T n darab független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összege, így n-edrendű, λ paraméterű gamma eloszlású, azaz T eloszlása az $N = n$ feltételre nézve $\Gamma(n, \lambda)$.

(ii) Mivel az $\{N = n\}$ esemény azt jelenti, hogy az első $n - 1$ darab üzemzavar nem okoz leállást és csak az utolsó üzemzavar okoz leállást, kapjuk, hogy

$$P(N = n) = (1 - p)^{n-1}p,$$

azaz N geometriai eloszlású p paraméterrel.

(iii) Minden üzemzavart minősítsünk I-típusúnak, ill. II-típusúnak aszerint, hogy az az üzem leállását okozza vagy nem. Annak a valószínűsége, hogy egy üzemzavart I-típusúnak minősítünk p, annak a valószínűsége, hogy egy üzemzavart II-típusúnak minősítünk $1 - p$. Jelölje $\xi_t^{(1)}$, ill. $\xi_t^{(2)}$ a t időpontig bekövetkező I-típusú, ill. II-típusú üzemzavarok számát. Ekkor az 1.7.12. Állítás alapján $\{\xi_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ λp paraméterű, $\{\xi_t^{(2)} : t \geqslant 0\}$ $\lambda(1 - p)$ paraméterű, egymástól független Poisson-folyamatok.

Nekünk a $P(N = n \,|\, T = t)$, $n \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 0$ valószínűségekre van szükségünk. Mivel T nem más, mint a $\{\xi_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ Poisson-folyamatra vonatkozó első várakozási idő, így T exponenciális eloszlású valószínűségi változó λp paraméterrel. Mivel a $\{T = t\}$ esemény megegyezik a $\{\xi_t^{(1)} = 1\}$ eseménnyel

$$\begin{aligned}
P(N = n \,|\, T = t) &= P(N = n \,|\, \xi_t^{(1)} = 1) = P(\xi_t^{(2)} = n - 1, \xi_t^{(1)} = 1 \,|\, \xi_t^{(1)} = 1) \\
&= P(\xi_t^{(2)} = n - 1 \,|\, \xi_t^{(1)} = 1) = \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{\xi_t^{(2)} = n-1\}} \,|\, \xi_t^{(1)} = 1\right).
\end{aligned}$$

Mivel $\{\xi_t^{(1)} : t \geqslant 0\}$ és $\{\xi_t^{(2)} : t \geqslant 0\}$ független folyamatok

$$P(N = n \,|\, T = t) = \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{\xi_t^{(2)} = n-1\}}\right) = P(\xi_t^{(2)} = n - 1) = \frac{(\lambda(1 - p)t)^{n-1}}{(n - 1)!} e^{-\lambda(1-p)t}.$$

□

2.4.15. Feladat. Tekintsünk egy rendszert, mely két egységből áll, A és B egység. Rendszerünket támadások érik, három különböző típusú támadást különböztetünk meg, melyek egymástól függetlenül érik rendszerünket. Az első típusú támadások λ_1 paraméterű

Poisson-folyamat szerint jönnek, és csak az A egység leállását okozzák. A második típusú támadások λ_2 paraméterű Poisson-folyamat szerint jönnek, és csak a B egység leállását okozzák. A harmadik típusú támadások λ_3 paraméterű Poisson-folyamat szerint jönnek, és mindkét egység leállását okozzák. Jelölje X_1 az A egység, X_2 a B egység élettartamát. Határozzuk meg X_1 és X_2 együttes „túlélési" függvényét, azaz a $P(X_1 > s, X_2 > t)$ $s, t \geqslant 0$ függvényt.

Megoldás. Jelölje T_i, $i = 1, 2, 3$, az i-edik típusú támadás érkezési időpontját. Megmutatjuk, hogy

$$\{X_1 > s, X_2 > t\} = \{X_1 > s, T_3 > s, T_2 > t, T_3 > t\}.$$

Ugyanis, ha $X_1 > s$ és $X_2 > t$ (azaz az A egység s-nél, a B egység t-nél tovább él), akkor a harmadik típusú támadás $\max(s,t)$-nél nem jöhet hamarabb, azaz $T_3 > s$ és $T_3 > t$. Valamint mivel $X_2 > t$, a második típusú támadás nem jöhet t-nél hamarabb, azaz $T_2 > t$.

Ha pedig $X_1 > s, T_3 > s, T_3 > t$ és $T_2 > t$, akkor mivel mind a második, mind a harmadik típusú támadás t után jön, a B egység biztos, hogy t-nél tovább él, így $X_2 > t$. Így minden $s > 0, t > 0$ esetén

$$P(X_1 > s, X_2 > t) = P(X_1 > s, T_3 > s, T_2 > t, T_3 > t).$$

Hasonlóan végiggondolható, hogy

$$\{X_1 > s, T_3 > s, T_2 > t, T_3 > t\} = \{T_1 > s, T_3 > s, T_2 > t, T_3 > t\}.$$

Felhasználva, hogy T_1, T_2 és T_3 függetlenek minden $s > 0, t > 0$ esetén

$$\begin{aligned} P(X_1 > s, X_2 > t) &= P(T_1 > s, T_2 > t, T_3 > s, T_3 > t) = P(T_1 > s, T_2 > t, T_3 > \max(s,t)) \\ &= P(T_1 > s)P(T_2 > t)P(T_3 > \max(s,t)). \end{aligned}$$

Mivel T_i exponenciális eloszlású λ_i paraméterrel $i = 1, 2, 3$, adódik, hogy

$$P(X_1 > s, X_2 > t) = e^{-\lambda_1 s} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 \max(s,t)}.$$

$\square$

2.4.16. Feladat. Tegyük fel, hogy az $\mathbb{R}^2$ Euklideszi síkot befüvesítettük és tetszőleges, véges Lebesgue-mértékű $A \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz esetén a rajta található fűszálak száma Poisson eloszlású $\lambda m(A)$ paraméterrel, ahol $m(A)$ jelöli A Lebesgue-mértékét. Feltételezzük azt is, ha $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ olyan halmazok, hogy $A \cap B = \emptyset$, akkor az A-n és B-n található fűszálak száma egymástól független. Rögzítsünk egy tetszőleges $P \in \mathbb{R}^2$ pontot. Jelölje X P-nek a hozzá legközelebb eső fűszáltól való távolságát.

(1) Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét!

(2) Határozzuk meg X várható értékét!

(3) Kijelöljük a sík egy másik Q pontját is, melynek P-től való távolsága legyen $d > 0$. Jelölje Q-nak a hozzá legközelebb eső fűszáltól való távolságát Y. Mi a valószínűsége, hogy a P ponthoz közelebb találunk fűszálat, mint a Q ponthoz? Adjunk módszert a $P(X > t_1, Y > t_2)$ valószínűségek meghatározására, ahol $t_1, t_2 \geqslant 0$.

Megoldás.

(i) Minden $t > 0$-ra kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(X > t) &= P(\{\text{nincs fűszál a } P \text{ pont körüli } t \text{ sugarú körben}\}) \\ &= P(\mathrm{Poiss}(\lambda t^2 \pi) = 0) = e^{-\lambda t^2 \pi}. \end{aligned}$$

Mivel minden $y \in \mathbb{R}$ esetén $P(X = y) = 0$, mert a P középpontú y sugarú körvonal 2-dimenziós Lebesgue-mértéke 0, kapjuk, hogy

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t^2 \pi} & \text{ha} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{ha} \quad t < 0. \end{cases}$$

Így

$$f_X(t) = \begin{cases} 2\lambda\pi t e^{-\lambda t^2 \pi} & \text{ha} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{ha} \quad t < 0. \end{cases}$$

(ii) Mivel X nemnegatív valószínűségi változó

$$\mathbb{E}X = \int_0^{+\infty} P(X > t)\,\mathsf{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t^2 \pi}\,\mathsf{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\lambda\pi}} e^{-x^2/2}\,\mathsf{d}x = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}.$$

(iii) A $P(X < Y)$ valószínűséget kell kiszámítani. Megmutatjuk, hogy X és Y együttes eloszlása megegyezik Y és X együttes eloszlásával, aztán pedig azt, hogy $P(X = Y) = 0$. Ebből már következik, hogy $P(X < Y) = 1/2$, ugyanis

$$1 = P(X < Y) + P(Y < X) + P(X = Y) = P(X < Y) + P(X < Y) + 0 = 2P(X < Y).$$

Az X és Y együttes eloszlása azért egyezik meg Y és X együttes eloszlásával, mert az együttes eloszlásfüggvényeik meghatározásánál a P és Q pont körüli körök szerepe felcserélhető, hiszen a metszetük területe változatlan marad. Továbbá a teljes várható érték tétele miatt

$$P(X = Y) = \int_0^{+\infty} P(X = Y \,|\, Y = t) f_Y(t)\,\mathsf{d}t.$$

Felhasználva, hogy minden $s \geqslant 0$ esetén bármilyen $A \in \sigma(Y)$ eseményre

$$\int_A \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X=s\}} \,|\, Y)\,\mathsf{d}P = \int_A \mathbb{1}_{\{X=s\}}\,\mathsf{d}P = P(A \cap \{X = s\}) \leqslant P(X = s) = 0,$$

kapjuk, hogy minden $s \geqslant 0$ esetén $P(X = s \,|\, Y) = 0$. Így

$$P(X = Y \,|\, Y = t) = P(X = t \,|\, Y = t) = 0, \quad P_Y\text{-m.m. } t \in \mathbb{R},$$

és ezért $P(X = Y) = 0$.

A továbbiakban a $P(X > t_1, Y > t_2)$ valószínűségek meghatározásával foglalkozunk. Feltehető, hogy $t_1 \leqslant t_2$. Ha $t_1 + t_2 < d$, akkor a P középpontú, t_1 sugarú és a Q középpontú, t_2 sugarú körök (legyenek ezek C_{t_1} és C_{t_2}) nem fedik át egymást. Így az $\{X > t_1\}$ és $\{Y > t_2\}$ események függetlenek. Ezért

$$P(X > t_1, Y > t_2) = P(X > t_1)P(Y > t_2) = e^{-\lambda\pi(t_1^2+t_2^2)}.$$

Ha $t_1 + t_2 \geqslant d$ és $t_2 \leqslant d$, akkor

$$\begin{aligned}P(X > t_1, Y > t_2) &= P(\{\text{nincs fűszál a } C_{t_1} \text{ körben}\} \cap \{\text{nincs fűszál a } C_{t_2} \text{ körben}\})\\ &= P(\{\text{nincs fűszál } C_{t_1} \cup C_{t_2}\text{-ben}\}) = e^{-\lambda m(C_{t_1} \cup C_{t_2})},\end{aligned}$$

ahol $m(C_{t_1} \cup C_{t_2})$ jelöli a C_{t_1} és C_{t_2} körök uniójának Lebesgue-mértékét (területét). Ekkor

$$m(C_{t_1} \cup C_{t_2}) = m(C_{t_1}) + m(C_{t_2}) - m(C_{t_1} \cap C_{t_2}) = t_1^2\pi + t_2^2\pi - m(C_{t_1} \cap C_{t_2}).$$

Jelölje a C_{t_1} és C_{t_2} körök metszéspontjait M_1 és M_2. Tekintsük az PQM_1 háromszöget. Legyen $M_1PQ\sphericalangle := \alpha_1$ és $M_1QP\sphericalangle := \alpha_2$. Kiszámoljuk a PQM_1 háromszög területét kétféleképpen is. Egyrészt a Heron-képlet alapján

$$T_{PQM_1\triangle} = \sqrt{s(s-t_1)(s-t_2)(s-d)},$$

ahol $s = (t_1 + t_2 + d)/2$. Másrészt, a PQ alaphoz tartozó magasságot k-val jelölve, $T_{PQM_1\triangle} = (dk)/2$, így

$$k = \frac{2\sqrt{s(s-t_1)(s-t_2)(s-d)}}{d},$$

ahol $s = (t_1 + t_2 + d)/2$. Tudjuk azt is, hogy $\sin\alpha_1 = k/t_1$ és $\sin\alpha_2 = k/t_2$, ezért

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \arcsin\left(\frac{2\sqrt{s(s-t_1)(s-t_2)(s-d)}}{t_1 d}\right),\\ \alpha_2 &= \arcsin\left(\frac{2\sqrt{s(s-t_1)(s-t_2)(s-d)}}{t_2 d}\right).\end{aligned}$$

Ezeket felhasználva már explicite felírhatjuk (t_1, t_2 és d függvényében) az $m(C_{t_1} \cup C_{t_2})$ területet (függvénytáblás képlet). A többi eset is hasonlóan kezelhető. □

2.4.17. Feladat. Tekintsük események egy sorozatát. Jelölje X_t a $t \geqslant 0$ időpontig bekövetkező események számát, és feltételezzük, hogy $\{X_t : t \geqslant 0\}$ λ paraméterű Poisson-folyamat. Legyen $d > 0$ egy rögzített szám. Egy eseményt d-eseménynek nevezünk, ha az őt megelőző esemény és közte kevesebb, mint d idő telik el. Például, ha $d = 1$ és egymást követően a $2, 2.8, 4, 6, 6.6, \ldots$ időpontokban következnek be események, akkor a 2.8 és a 6.6 időpontokban bekövetkező események 1-események.

(1) Várhatóan milyen időközönként következnek be d-események?

(2) Az események hanyad része d-esemény?

Megoldás.

(i) Jelölje T egy d-esemény és a következő d-esemény bekövetkezése között eltelt időt, Y pedig a szóbanforgó d-eseményt követően a következő esemény bekövetkezéséig eltelt időt. Végiggondoljuk, hogy T, ill. Y jól definiált, abban az értelemben, hogy T és Y együttes eloszlása nem függ attól, hogy hanyadik d-eseményről van szó. Nyilván T megállítási időpillanat $\{X_t : t \geqslant 0\}$-ra nézve (lásd az 1.4.26. Definíciót). Így felhasználva, hogy az $\{X_t : t \geqslant 0\}$ Poisson-folyamat erős Markov-folyamat (lásd például Karatzas–Shreve [3], Problem 2.6.21.) kapjuk, hogy T, ill. Y jól definiált. Továbbá a Poisson-folyamat definíciója miatt Y exponenciális eloszlású λ paraméterrel. A teljes várható érték tétele alapján

$$\mathbb{E}T = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(T \,|\, Y = s) f_Y(s) \, \mathsf{d}s = \int_0^d s f_Y(s) \, \mathsf{d}s + \int_d^{+\infty} (s + \mathbb{E}T) f_Y(s) \, \mathsf{d}s,$$

ugyanis, ha $Y = s$, $0 \leqslant s < d$, úgy egy d-eseményt követően a következő esemény bekövetkezéséig eltelt idő s, és mivel $s < d$, így ez az esemény d-esemény, így $T = s$. Ha pedig $s \geqslant d$, úgy a d-esemény után s idő múlva bekövetkező esemény nem d-esemény, így a következő d-eseményig átlagosan $(s + \mathbb{E}T)$-t kell várni, heurisztikusan olyan mintha minden újra indulna. A pontos indoklás a következő. Mivel T megállítási időpillanat az $\{X_t : t \geqslant 0\}$ erős Markov-folyamatra nézve, egy tetszőleges esemény és a következő d-esemény közötti idő ugyanolyan eloszlású, mint T. Így

$$\mathbb{E}T = \int_0^{+\infty} s f_Y(s) \, \mathsf{d}s + (\mathbb{E}T) \int_d^{+\infty} f_Y(s) \, \mathsf{d}s = \mathbb{E}Y + (\mathbb{E}T) P(Y > d) = \frac{1}{\lambda} + e^{-\lambda d} \mathbb{E}T,$$

ezért

$$\mathbb{E}T = \frac{1}{\lambda(1 - e^{-\lambda d})}.$$

(ii) A $P(Y < d)$ valószínűséget kell kiszámolni, ezért a válasz $P(Y < d) = 1 - e^{-\lambda d}$. □

2.5. Nemstacionárius Poisson-folyamat, összetett Poisson-folyamat

2.5.1. Feladat. (Ross [7], 235. old) Évi már évek óta hot-dog-ot árul a város egy forgalmas pontján reggel 8-tól délután 5-ig. Úgy tapasztalja, hogy a vásárlók átlagos száma nyitástól 11-ig lineárisan növekszik, a kezdeti 5 vásárló/óra intenzitásról elérve a 20 vásárló/óra intenzitást. Délelőtt 11-től délután 1-ig a vásárlók átlagos száma nem változik, marad a 20 vásárló/óra intenzitás. Délután 1-től zárásig viszont lineárisan csökken a vásárlók átlagos száma, elérve a 12 vásárló/óra intenzitást. Feltételezve, hogy a diszjunkt időintervallumokban érkező vásárlók száma egymástól független adjunk valamilyen modellt a fenti jelenségre. Mi a valószínűsége, hogy egy hűvös hétfői reggelen 8 : 30-tól 9 : 30-ig nem lesz vásárlója Évinek? Várhatóan hányan vásárolnak majd ebben az időintervallumban?

Megoldás. Jelölje ξ_t Évi vásárlóinak számát az első t nyitvatartási óra alatt. Ésszerű feltételezni, hogy $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ nemstacionárius Poisson-folyamat, melynek intenzitásfüggvénye $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5 + 5t & \text{ha} \quad 0 \leqslant t \leqslant 3, \\ 20 & \text{ha} \quad 3 \leqslant t \leqslant 5, \\ 20 - 2(t-5) & \text{ha} \quad 5 \leqslant t \leqslant 9, \end{cases}$$

és $\lambda(t) = \lambda(t-9)$, ha $t > 9$.

Vegyük észre, hogy a délután 5 óra és reggel 8 óra között eltelt időt nem számoljuk. Az (1.8.1) képlet szerint a reggel $8:30$ és $9:30$ között érkező vásárlók száma Poisson eloszlású $m(3/2) - m(1/2)$ paraméterrel, ahol $m(t) = \int_0^t \lambda(s)\,\mathsf{d}s$, $t \geqslant 0$. Így annak a valószínűsége, hogy nem érkezik vásárló $8:30$ és $9:30$ között

$$\begin{aligned}\frac{(m(3/2) - m(1/2))^0}{0!} e^{-(m(3/2)-m(1/2))} &= e^{-(m(3/2)-m(1/2))} = e^{-\int_{1/2}^{3/2}(5+5s)\,\mathsf{d}s} \\ &= e^{-(5\cdot 1 + 5(9/4-1/4)/2)} = e^{-10}.\end{aligned}$$

Mivel a Poisson eloszlás várható értéke megegyezik a paraméterével, várhatóan $m(3/2) - m(1/2) = 10$-en fognak érkezni $8:30$ és $9:30$ között. □

2.5.2. Feladat. (Ross [7], 239. old) Tegyük fel, hogy egy adott területre bevándorló családokat vizsgálunk. Feltételezzük, hogy erre a területre bevándorló családok számát (az időt hetekben mérjük) egy $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ 2 paraméterű Poisson-folyamat írja le. Feltételezzük továbbá azt is, hogy a különböző családok létszámát leíró valószínűségi változók függetlenek és azonos aloszlásúak, és ez a közös eloszlás az $1, 2, 3, 4$ pontokra koncentrálódik rendre $1/6, 1/3, 1/3, 1/6$ valószínűségekkel. Mennyi lesz egy rögzített 5 hetes időintervallum alatt erre a területre bevándorló emberek számának várható értéke és szórásnégyzete?

Megoldás. Jelölje X_t a t időpontig az adott területre bevándorlt **emberek** számát. (Az időt a rögzített 5 hetes időszak kezdetétől mérjük.) Ekkor $\{X_t : t \geqslant 0\}$ 2 paraméterű összetett Poisson-folyamat, melyre

$$X_t = \sum_{i=1}^{\xi_t} Y_i, \qquad t \geqslant 0,$$

ahol Y_i jelöli az i-edik bevándorolt család létszámát $(i \in \mathbb{N})$. Az $\mathbb{E}X_5$ és $\operatorname{Var}X_5$ mennyiségeket keressük. Ekkor $Y_1, Y_2, \ldots$ független és azonos eloszlásúak. Mivel

$$\mathbb{E}Y_1 = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{2},$$
$$\mathbb{E}Y_1^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{43}{6}$$

kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}X_5 = 2 \cdot 5 \cdot \mathbb{E}Y_1 = 25,$$
$$\mathrm{Var}X_5 = 2 \cdot 5 \cdot \mathbb{E}Y_1^2 = \frac{215}{3}.$$

□

2.5.3. Feladat. Legyen $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ nemstacionárius Poisson-folyamat $\lambda(t)$, $t \geqslant 0$, intenzitásfüggvénnyel. Jelölje T_i, $i \geqslant 1$, a várakozási időket. Legyen $\eta_i = T_i - T_{i-1}$, $i \geqslant 1$, $(T_0 := 0)$ (interarrival times).

(1) Függetlenek-e az η_i-k?

(2) Azonos eloszlásúak-e az η_i-k?

Megoldás.

(i) Általában nem. Ugyanis, tetszőleges $s, t \geqslant 0$ esetén

$$P(\eta_2 > t \,|\, \eta_1 = s) = P(\xi_{t+s} - \xi_s = 0) = e^{-(m(t+s)-m(s))} = e^{-\int_s^{t+s} \lambda(y)\,\mathsf{d}y},$$

ami általában függ s-től. Csak akkor nem függ s-től, ha a λ függvény konstans, azaz a nemstacionárius Poisson-folyamat Poisson-folyamat.

(ii) Minden $t > 0$-ra

$$P(\eta_1 > t) = P(\xi_t = 0) = e^{-m(t)} = e^{-\int_0^t \lambda(y)\,\mathsf{d}y}.$$

Így $F_{\eta_1}(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(y)\,\mathsf{d}y}$, ha $t > 0$ és $F_{\eta_1}(t) = 0$, ha $t \leqslant 0$. Ezért $f_{\eta_1}(t) = \lambda(t) e^{-\int_0^t \lambda(y)\,\mathsf{d}y}$, ha $t > 0$, egyébként 0. Minden $t > 0$-ra

$$P(\eta_2 > t) = \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{\eta_2 > t\}}\right) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big(\mathbb{I}_{\{\eta_2 > t\}} \,|\, \eta_1\big)\Big) = \mathbb{E}f(\eta_1),$$

ahol $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $f(\eta_1) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{I}_{\{\eta_2 > t\}} \,|\, \eta_1\Big) = P(\eta_2 > t \,|\, \eta_1)$, $(f(s) = P(\eta_2 > t \,|\, \eta_1 = s)$, P_{η_1}-m.m. $s \in \mathbb{R})$. Így az (i)-ben levő számolás alapján

$$\begin{aligned}
P(\eta_2 > t) &= \mathbb{E}f(\eta_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) f_{\eta_1}(s)\,\mathsf{d}s = \int_0^{+\infty} f(s)\lambda(s) e^{-\int_0^s \lambda(y)\,\mathsf{d}y}\,\mathsf{d}s \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\int_s^{t+s} \lambda(y)\,\mathsf{d}y} \lambda(s) e^{-\int_0^s \lambda(y)\,\mathsf{d}y}\,\mathsf{d}s = \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^{t+s} \lambda(y)\,\mathsf{d}y} \lambda(s)\,\mathsf{d}s \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda(s) e^{-m(t+s)}\,\mathsf{d}s.
\end{aligned}$$

Ha például $\lambda(s) = s$, $s \geqslant 0$, akkor

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)\,\mathsf{d}s = \frac{t^2}{2}, \quad t \geqslant 0.$$

Így $P(\eta_1 > t) = e^{-t^2/2}$, $t > 0$, és

$$\begin{aligned} P(\eta_2 > t) &= \int_0^{+\infty} s e^{-\frac{(t+s)^2}{2}} \, \mathsf{d}s = \int_t^{+\infty} (u-t) e^{-\frac{u^2}{2}} \, \mathsf{d}u \\ &= \int_t^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} \, \mathsf{d}u - t\sqrt{2\pi}(1-\Phi(t)) = e^{-\frac{t^2}{2}} - \sqrt{2\pi} t (1-\Phi(t)). \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy η_1 és η_2 azonos eloszlásúak. Ekkor $P(\eta_1 > t) = P(\eta_2 > t)$, $t > 0$ miatt $t(1-\Phi(t)) = 0$, $t > 0$ lenne, ami nyilván elletmondás. Így általában nem azonos eloszlásúak az η_i-k. $\square$

2.5.4. Feladat. Legyen $\{N_t : t \geqslant 0\}$ $\lambda = 1$ paraméterű Poisson-folyamat. Legyen továbbá $\lambda : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ egy nemnegatív, lokálisan integrálható függvény, és

$$m(t) =: \int_0^t \lambda(s) \, \mathsf{d}s, \qquad t \geqslant 0.$$

Vezessük be minden $t \geqslant 0$ esetén a

$$\xi_t := N_{m(t)}$$

valószínűségi változót. Mutassuk meg, hogy $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ nemstacionárius Poisson-folyamat λ intenzitás függvénnyel.

Megoldás. Az 1.8.1. Definíció (i),(ii),(iii) és (iv) feltételeit kell leellenőrizni, hogy teljesülnek a $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ folyamatra. Mivel $\xi_0 = N_{m(0)} = N_0 = 0$, ezért (i) teljesül. Legyenek $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3$ tetszőlegesek. Mivel λ nemnegatív függvény, így m monoton növekvő, ezért $0 = m(0) \leqslant m(t_1) \leqslant m(t_2) \leqslant m(t_3)$. Kihasználva az $\{N_t : t \geqslant 0\}$ folyamat független növekményűségét kapjuk, hogy az $N_{m(t_2)} - N_{m(t_1)}$ és $N_{m(t_3)} - N_{m(t_2)}$ növekmények függetlenek, azaz a $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}$ és $\xi_{t_3} - \xi_{t_2}$ növekmények függetlenek, így (ii) is teljesül.

Ahhoz, hogy $P(\xi_{t+h} - \xi_t \geqslant 2) = o(h)$, amint $h \to 0$ azt kell bizonyítani, hogy

$$\lim_{h \to 0} \frac{P(\xi_{t+h} - \xi_t \geqslant 2)}{h} = 0.$$

Az $\{N_t : t \geqslant 0\}$ folyamat tulajdonságai alapján

$$\begin{aligned} P(\xi_{t+h} - \xi_t \geqslant 2) &= P(N_{m(t+h)} - N_{m(t)} \geqslant 2) = P(N_{m(t+h)-m(t)} \geqslant 2) \\ &= 1 - e^{-(m(t+h)-m(t))} - \frac{m(t+h)-m(t)}{1!} e^{-(m(t+h)-m(t))}. \end{aligned}$$

Mivel

$$\lim_{h \to 0} \frac{m(t+h)-m(t)}{h} e^{-(m(t+h)-m(t))} = \lambda(t) e^{-0} = \lambda(t),$$

és

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{1 - e^{-(m(t+h)-m(t))}}{h} &= -\lim_{h \to 0} \frac{e^{-\int_t^{t+h} \lambda(s) \, \mathsf{d}s} - 1}{h} = -\lim_{h \to 0} \frac{e^{-\int_0^{t+h} \lambda(s) \, \mathsf{d}s} e^{\int_0^t \lambda(y) \, \mathsf{d}y} - 1}{h} \\ &= -\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}h} \left(e^{-\int_0^h \lambda(s) \, \mathsf{d}s} e^{\int_0^t \lambda(y) \, \mathsf{d}y} \right) \Big|_{h=t} = -e^{\int_0^t \lambda(y) \, \mathsf{d}y} e^{-\int_0^t \lambda(y) \, \mathsf{d}y} (-\lambda(t)) \\ &= \lambda(t), \end{aligned}$$

kapjuk, hogy

$$\lim_{h\to 0} \frac{P(\xi_{t+h} - \xi_t \geqslant 2)}{h} = \lambda(t) - \lambda(t) = 0.$$

Azt kell még bizonyítani, hogy $P(\xi_{t+h} - \xi_t = 1) = \lambda(t)h + o(h)$, amint $h \to 0$, azaz

$$\lim_{h\to 0} \frac{P(\xi_{t+h} - \xi_t = 1)}{h} = \lambda(t).$$

Az $\{N_t : t \geqslant 0\}$ folyamat tulajdonságai alapján minden $t > 0$-ra

$$\begin{aligned} \frac{P(\xi_{t+h} - \xi_t = 1)}{h} &= \frac{P(N_{m(t+h)} - N_{m(t)} = 1)}{h} = \frac{P(N_{m(t+h)-m(t)} = 1)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \frac{m(t+h) - m(t)}{1!} e^{-(m(t+h)-m(t))}. \end{aligned}$$

Így

$$\lim_{h\to 0} \frac{P(\xi_{t+h} - \xi_t = 1)}{h} = \lambda(t)e^{-0} = \lambda(t).$$

A (iv) feltétel automatikusan teljesül. □

2.5.5. Feladat. Egy biztosító társaság a hozzá beérkező kárigényeket 5 paraméterű Poisson-folyamat szerint fizeti ki. (Az időt mérjük hetekben.) Feltételezzük, hogy minden egyes kárigény esetén a biztosító által kifizetett pénz 2000 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mi a biztosító által egy 4 hetes időszakban kifizetett pénzmennyiség várható értéke és szórásnégyzete?

Megoldás. Jelölje ξ_t a biztosító kifizetéseinek **számát** a t időpontig, X_t pedig a t időpontig kifizetett összpénzt. Ekkor

$$X_t = \sum_{i=1}^{\xi_t} Z_i,$$

ahol Z_i a t időpontot megelőző, i-edik kifizetéskor kifizetett pénz. A feltételezés miatt $Z_1, Z_2, \ldots$ független exponenciális eloszlásúak $1/2000$ paraméterrel. Így $\{X_t : t \geqslant 0\}$ összetett Poisson-folyamat. Mi az $\mathbb{E}X_4$ és $\mathrm{Var}X_4$ mennyiségeket keressük. Az (1.8.3) és (1.8.4) képletek alapján

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_4 &= 5 \cdot 4 \cdot 2000 = 40000, \\ \mathrm{Var}X_4 &= 5 \cdot 4 \cdot 2(2000)^2 = 1,6 \cdot 10^8. \end{aligned}$$

□

Hivatkozások

[1] D. J. Daley and D. Vere-Jones, An Introduction to the theory of point processes, Springer, 1988.

[2] O. Kallenberg, Foundations of Modern Probability. Springer, 1997.

[3] I. Karatzas and S. E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Second Edition. Springer, 1991.

[4] P. Medvegyev, Valószínűségszámítás. Aula, 2002.

[5] Gy. Pap, Sztochasztikus folyamatok, 2005.

[6] K. R. Parthasarathy, Probability measures on metric spaces. Academic Press, New York and London, 1967.

[7] S. M. Ross, Introduction to Probability Models, Fourth Edition. Academic Press, 1989.

[8] K. R. Stromberg, Probability for analysts. Chapman and Hall, New York London, 1994.

[9] B. Szőkefalvi-Nagy, Valós függvények és függvénysorok. Tankönyvkiadó, 1981.