Barczy Mátyás és Pap Gyula

Sztochasztikus folyamatok
Példatár és elméleti kiegészítések
II. Rész
(Diszkrét idejű Markov-láncok)

mobiDIÁK könyvtár

Barczy Mátyás és Pap Gyula

Sztochasztikus folyamatok

Példatár és elméleti kiegészítések

II. Rész

(Diszkrét idejű Markov-láncok)

mobiDIÁK könyvtár

SOROZATSZERKESZTŐ

Fazekas István

Barczy Mátyás és Pap Gyula

Debreceni Egyetem

Sztochasztikus folyamatok
Példatár és elméleti kiegészítések
II. Rész
(Diszkrét idejű Markov-láncok)

Egyetemi jegyzet

mobiDIÁK könyvtár

Debreceni Egyetem

Szerzők

Barczy Mátyás
egyetemi tanársegéd
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
4010 Debrecen, Pf. 12
barczy@inf.unideb.hu

Pap Gyula
egyetemi tanár
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
4010 Debrecen, Pf. 12
papgy@inf.unideb.hu

Lektor

Ispány Márton
egyetemi adjunktus
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
4010 Debrecen, Pf. 12

mobiDIÁK könyvtár

Debreceni Egyetem

Informatikai Kar

4010 Debrecen, Pf. 12

http://mobidiak.inf.unideb.hu

A mű „A mobiDIÁK önszervező mobil portál” (IKTA, OMFB-00373/2003)) projekt keretében készült.

Barczy Mátyás az OTKA–F046061/2004. pályázat támogatásában is részesült.

Bevezetés

Jelen munka a Debreceni Egyetem alkalmazott matematikus és matematikus szakos hallgatói részére tartott Sztochasztikus folyamatok Gyakorlat anyagát öleli fel. A gyakorlathoz kapcsolódó előadás anyagának gerincét *Dr. Pap Gyula: Sztochasztikus folyamatok* című jegyzete [6] adta, így főként az ott szereplő elméleti részekhez kapcsolódó feladatokat tárgyalunk. A gyakorló feladatokon kívül szerepelnek példatárunkban az előadás anyagához kapcsolódó elméleti részek, kiegészítések is. SHELDON M. ROSS: INTRODUCTION TO PROBABILITY MODELS című könyvének [7] negyedik fejezetéből sok, diszkrét idejű Markov-láncokra vonatkozó ott (részben) kidolgozott példát és megoldásra kitűzött feladatot szerepeltetünk.

Ezúton is szeretnénk köszönetet mondani Ispány Mártonnak figyelmes, lelkiismeretes lektori munkájáért. Észrevételeit, kiegészítéseit figyelembe véve a jegyzetet sok helyen pontosítottuk.

A példatárban $\mathbb{N}$, illetve $\mathbb{Z}_+$ a pozitív egész számok, illetve a nemnegatív egész számok halmazát jelöli.

Tartalomjegyzék

1. Alapfogalmak, állapotok osztályozása

1.1. Feladat. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók (ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezettek). Igaz-e, hogy ekkor $\{X_n : n \geqslant 1\}$ diszkrét idejű Markov-lánc?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* Mert nem biztos, hogy az értékkészletek megszámlálhatóak. □

1.2. Feladat. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók (ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezettek), mindegyikük értékkészlete $\{0, 1\}$. Igaz-e, hogy ekkor $\{X_n : n \geqslant 1\}$ diszkrét idejű homogén Markov-lánc?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* Nem biztos, hogy homogén. □

1.3. Feladat. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók (ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezettek), mindegyikük értékkészlete $\mathbb{R}^8$ természetes bázisa. Igaz-e, hogy ekkor $\{X_n : n \geqslant 1\}$ diszkrét idejű homogén Markov-lánc?

Megoldás. A válasz: **Igen.** □

Az alábbiakban Markov-láncokra nézünk példákat.

1.4. Példa. (Időjárás előrejelzés) [Ross [7], Chapter 4, Example 1a] Tegyük fel, hogy az, hogy holnap esni fog vagy nem csak attól függ, hogy ma esik vagy nem és nem függ a korábbi időjárási viszonyoktól. Feltételezzük, hogy ha ma esik, akkor holnap α, ha ma nem esik, akkor holnap β valószínűséggel fog esni. Tekintsük azt az $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ sztochasztikus folyamatot, hogy $X_n = 0$, ha az n-edik napon esik és $X_n = 1$, ha az n-edik napon nem esik. Ekkor $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ (homogén) Markov-lánc, melynek állapottere a $\{0,1\}$ halmaz és egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \end{array}.$$

□

1.5. Példa. (Jelfeldolgozó rendszer) [Ross [7], Chapter 4, Example 1b] Tekintsünk egy jelfeldolgozó rendszert, aminek inputja és outputja is a $\{0,1\}$ jelhalmaz. A jelfeldolgozó rendszer számos alegységből áll és minden alegység esetén p annak a valószínűsége, hogy az egy hozzá beérkező jelet változatlanul továbbít. Tekintsük azt az $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ sztochasztikus folyamatot, ahol X_n az n-edik alegységhez beérkező jel. Ekkor $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc, melynek állapottere a $\{0,1\}$ halmaz és egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \end{array}.$$

□

1.6. Példa. (Hangulatjelentés) [Ross [7], Chapter 4, Example 1c] Józsi kedélyállapotát vizsgáljuk. Józsit minden nap (kedélyállapota szerint) vagy jókedvűnek vagy semlegesnek (so-so) vagy mogorvának ítéljük meg. Ha Józsi ma jókedvű, akkor holnap 0.5, 0.4 ill. 0.1 valószínűséggel lesz jókedvű, semleges ill. mogorva. Ha Józsi ma semleges, akkor holnap 0.3, 0.4 ill. 0.3 valószínűséggel lesz jókedvű, semleges ill. mogorva. Ha Józsi ma mogorva, akkor holnap 0.2, 0.3 ill. 0.5 valószínűséggel lesz jókedvű, semleges ill. mogorva.

Jelöljük Józsi fenti kedélyállapotait 0, 1 ill. 2-vel és tekintsük azt az $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ sztochasztikus folyamatot, ahol X_n Józsi kedélyállapota az n-edik nap. Ekkor $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc, melynek fázistere a $\{0,1,2\}$ halmaz és egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}.$$

□

1.7. Példa. (Markov-lánccá transzformálás) [Ross [7], Chapter 4, Example 1d] Tegyük fel, hogy az, hogy holnap esni fog vagy nem csak a mai és a tegnapi nap időjárási viszonyaitól függ. Feltételezzük, hogy ha ma és tegnap esett, akkor holnap 0.7 valószínűséggel esik; ha ma esett, de tegnap nem, akkor holnap 0.5 valószínűséggel esik; ha ma nem esett, de tegnap igen, akkor holnap 0.4 valószínűséggel esik; ha ma és tegnap sem esett, akkor holnap 0.2 valószínűséggel esik. Ha az $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ sztochasztikus folyamatot úgy definiálnánk, hogy X_n aszerint lenne 0 vagy 1, hogy az n-edik napon esett vagy nem, úgy nem kapnánk Markov-láncot. Azonban lehetséges Markov-láncra épülő modellt felállítani oly módon, hogy a lánc minden egyes időpontbeli állapotát az határozza meg együttesen, hogy aznap és az azt megelőző nap esett-e az eső vagy nem. Matematikailag tekintsük azt az $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ sztochasztikus folyamatot, melyre minden $n \geqslant 1$ esetén

$$\begin{cases} X_n = 0 & \text{ha az } n\text{-edik és az } (n-1)\text{-edik napon is esett,} \\ X_n = 1 & \text{ha az } n\text{-edik napon esett, de az } (n-1)\text{-edik napon nem,} \\ X_n = 2 & \text{ha az } n\text{-edik napon nem esett, de az } (n-1)\text{-edik napon igen,} \\ X_n = 3 & \text{ha sem az } n\text{-edik, sem az } (n-1)\text{-edik napon nem esett.} \end{cases}$$

Leellenőrizzük, hogy $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc, melynek fázistere a $\{0, 1, 2, 3\}$ halmaz. Tetszőleges olyan $n \in \mathbb{N}$ és $i_1, i_2, \dots, i_n, i_{n+1} \in \{0, 1, 2, 3\}$ esetén, melyekre $P(X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1) > 0$, fennáll, hogy

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n),$$

hiszen az $\{X_{n+1} = i_{n+1}\}$ esemény az $(n+1)$. és n. napi időjárási viszonyokról szól, az $\{X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1\}$ pedig az $n., (n-1)., \dots, 1.$ napi időjárási viszonyokról, és feltételezésünk miatt ezek közül csak az n. és $(n-1)$. napiról szóló információ számít, az $(n+1)$. napi időjárás szempontjából. Az n. és $(n-1)$. napi időjárási viszonyokról szóló információ pedig nemmás, mint az $\{X_n = i_n\}$ esemény. Az egylépéses átmenetvalószínűségi mátrix:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Hiszen például, a $P = (p_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant 3}$ jelöléssel, $p_{0,0}$ annak a valószínűsége, hogy feltéve, hogy ma és tegnap esett a holnapi napra az lesz igaz, hogy aznap és tegnap is esett, ez pedig nem más, mint annak a valószínűsége, hogy feltéve, hogy ma és tegnap is esett holnap is esni fog, ami pedig 0.7. Hasonlóan $p_{0,1}$ annak a valószínűsége, hogy feltéve, hogy ma és tegnap esett a holnapi napra az lesz igaz, hogy aznap esik, de tegnap nem esett, s mivel ezek egymást kizáró események, így $p_{0,1} = 0$.

A Markov-lánccá transzformálást más jelölésrendszert használva is leírhatjuk. Minden

$n \geqslant 1$ esetén legyen

$$\begin{cases} Y_n = 0 & \text{ha az } n\text{-edik napon esett,} \\ Y_n = 1 & \text{ha az } n\text{-edik napon nem esett.} \end{cases}$$

Vezessük be minden $n \geqslant 1$ esetén a

$$Z_n := \begin{bmatrix} Y_n \\ Y_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{jelölést.}$$

Ekkor $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc, melynek fázistere a

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

halmaz és egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{c} \\ {[0,0]^\top} \\ {[0,1]^\top} \\ {[1,0]^\top} \\ {[1,1]^\top} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} [0,0]^\top & [0,1]^\top & [1,0]^\top & [1,1]^\top \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

□

1.8. Példa. (Véletlen bolyongás $\mathbb{Z}$-n) Tekintsünk egy kis egérkét, aki a számegyenes egész koordinátájú pontjain ugrál oly módon, hogy minden egyes pontból ugrania kell egységnyi hosszúnyit és jobbra p, balra $1-p$ valószínűséggel ugorhat, ahol $0 < p < 1$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje X_n az egérke helyét az n. ugrása után, továbbá $X_0 \in \mathbb{Z}$ az egérke kiindulási helyét jelöli. Ekkor $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ Markov-lánc, melynek fázistere $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Azt mondjuk, hogy $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ véletlen bolyongás $\mathbb{Z}$-n. Nyilván, minden $n = 0, 1, 2, \ldots$ esetén

$$P(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i) = p = 1 - P(X_{n+1} = i-1 \mid X_n = i), \qquad i \in \mathbb{Z}.$$

Azaz az egylépéses átmenetvalószínűségi mátrix egy olyan $(\infty \times \infty)$-es mátrix melynek főátlója feletti sorában p-k, főátlója alatti sorában $(1-p)$-k állnak, a többi helyen pedig nullák. □

1.9. Példa. (Egy szerencsejáték modell) Tekintsünk egy játékost, aki egy olyan játékot játszik, melynek minden egyes fordulójában p valószínűséggel nyer 1 Ft-ot és $1-p$ valószínűséggel veszít 1 Ft-ot. Feltételezzük, hogy játékosunk akkor hagyja abba a játékot, ha tönkremegy (azaz 0 Ft-ja lesz) vagy vagyona elér egy előre adott N összeget. Ha X_n jelöli a játékos vagyonát az n-edik játék után, akkor $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc, melynek fázistere $\{0, 1, \ldots, N\}$ és az egylépéses átmenetvalószínűségek

$$\begin{aligned} p_{i,i+1} &= p = 1 - p_{i,i-1}, \qquad i = 1, \ldots, N-1, \\ p_{0,0} &= p_{N,N} = 1. \end{aligned}$$

Azaz az egylépéses átmenetvalószínűségi mátrix

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & N-2 & N-1 & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

A 0 és N állapotok ún. **elnyelő állapotok**, mert ha egyszer beléjük lépünk nem tudjuk őket elhagyni (1 valószínűséggel). Ekkor $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$-et hívhatjuk véges állapotterű véletlen bolyongásnak 0 és N elnyelő falakkal. □

Tudjuk, hogy egy homogén Markov-lánc n-lépéses átmenetvalószínűségi mátrixa megegyezik az 1-lépéses átmenetvalószínűségi mátrixa n-edik hatványával. **A továbbiakban Markov-láncon mindig homogén Markov-láncot értünk, hacsak az ellenkezőjét nem hangsúlyozzuk.**

1.10. Feladat. [Ross [7], Chapter 4, Example 2a] Tekintsük az 1.4. Példát (időjárás előrejelzés). Legyen $\alpha = 0.7$ és $\beta = 0.4$. Feltéve, hogy ma esik mi a valószínűsége, hogy négy nap múlva is esik?

Megoldás. $P^{(4)}_{0,0}$-t kell kiszámítani, ahol $P^{(4)}$ a 4-lépéses átmenetvalószínűségi mátrix. Mivel a kérdéses Markov-lánc homogén, így $P^{(4)} = P^4$. Ekkor

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix},$$

ezért

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{pmatrix}.$$

Így $P^{(4)}_{0,0} = (P^4)_{0,0} = 0.5749.$ □

1.11. Feladat. [Ross [7], Chapter 4, Example 2b] Tekintsük az 1.7. Példát (Markov-lánccá transzformálás). Feltéve, hogy hétfőn és kedden esett mi a valószínűsége, hogy ezen a héten csütörtökön is esik?

Megoldás. Mivel annak a valószínűsége, hogy csütörtökön esik (a megfelelő feltétel mellett) megegyezik annak a valószínűségével, hogy csütörtökön a Markov-lánc a 0 vagy az 1 állapotban van feltéve, hogy kezdetben a 0 állapotban volt, kapjuk, hogy a keresett feltételes valószínűség

$$P(X_4 \in \{0,1\} \mid X_2 = 0) = P(X_4 = 0 \mid X_2 = 0) + P(X_4 = 1 \mid X_2 = 0) = P^{(2)}_{0,0} + P^{(2)}_{0,1}.$$

Meghatározzuk most a 2-lépéses átmenetvalószínűségi mátrixot. Mivel a Markov-lánc homogén, így $P^{(2)} = P^2$. Ezért

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.49 & 0.12 & 0.21 & 0.18 \\ 0.35 & 0.2 & 0.15 & 0.3 \\ 0.2 & 0.12 & 0.2 & 0.48 \\ 0.1 & 0.16 & 0.1 & 0.64 \end{pmatrix}.$$

Így

$$P(X_4 \in \{0,1\} \,|\, X_2 = 0) = (P^2)_{0,0} + (P^2)_{0,1} = 0.49 + 0.12 = 0.61.$$

□

1.12. Feladat. Tekintsük az 1.4. Példát (időjárás előrejelzés). Legyen $\alpha = 0.7$ és $\beta = 0.4$. Feltételezzük, hogy hétfőn kezdjük az időjárási megfigyeléseinket és annak a valószínűsége, hogy hétfőn esik 0.4. Mi a valószínűsége, hogy (ezen a héten) pénteken esik? Mi a valószínűsége, hogy (ezen a héten) pénteken esik, feltéve, hogy hétfőn esik?

Megoldás. Először a $P(X_5 = 0)$ valószínűséget keressük és a feltételek alapján $P(X_1 = 0) = 0.4$ és $P(X_1 = 1) = 0.6$ (Az 1. nap felel meg hétfőnek.) Így

$$\begin{aligned} P(X_5 = 0) &= P(X_5 = 0 \,|\, X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_5 = 0 \,|\, X_1 = 1)P(X_1 = 1) \\ &= P^{(4)}_{0,0} 0.4 + P^{(4)}_{1,0} 0.6 = (P^4)_{0,0} 0.4 + (P^4)_{1,0} 0.6 = 0.5749 \cdot 0.4 + 0.5668 \cdot 0.6 \\ &= 0.57004. \end{aligned}$$

Másodjára, a $P(X_5 = 0 \,|\, X_1 = 0)$ feltételes valószínűséget keressük, mely a fentiek alapján 0.5749. □

1.13. Feladat. [Ross [7], Chapter 4, Problem 7] Tekintsünk két érmét. Az elsővel dobva 0.7, a másodikkal dobva 0.6 valószínűséggel kapunk fejet. Ha egy napon fejet dobunk valamelyik érmével, akkor másnap az első érmével dobunk, ha írást, akkor a második érmével dobunk másnap. Ha az első nap feldobott érme egyenlő valószínűséggel lehet az első vagy a második érme, mi a valószínűsége, hogy a 4. nap az első érmével dobunk?

Megoldás. Minden $n \geqslant 1$ esetén legyen $X_n = 1$ vagy $X_n = 2$, ha az n-edik napon az első vagy a második érmével dobunk. Ekkor $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc, melynek átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Például $p_{2,1} = 0.6$, mert ha ma a 2. érmével dobunk, akkor holnap akkor dobunk az 1. érmével, ha ma a 2. érmével fejet dobunk, ennek a valószínűsége pedig 0.6.

Mi a $P(X_4 = 1)$ valószínűséget keressük. Feltételt véve az első dobás kimenetele szerint kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}P(X_4 = 1) &= P(X_4 = 1 \,|\, X_1 = 1)P(X_1 = 1) + P(X_4 = 1 \,|\, X_1 = 2)P(X_1 = 2)\\ &= p^{(3)}_{1,1}\frac{1}{2} + p^{(3)}_{2,1}\frac{1}{2},\end{aligned}$$

ahol $P^{(3)} = (p^{(3)}_{i,j})_{i,j=1,2}$ a 3-lépéses átmenetvalószínűségi mátrix. Mivel $P^{(3)} = P^3$, így kiszámolható, hogy

$$P^{(3)} = P^3 = \begin{pmatrix} 0.667 & 0.333 \\ 0.666 & 0.334 \end{pmatrix},$$

így

$$P(X_4 = 1) = \frac{0.667 + 0.666}{2} = 0.6665.$$

□

1.14. Feladat. [Szevasztyanov–Csisztyakov–Zubkov [9], 5.1.4 Feladat] Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, független, azonos eloszlású valószínűségi változók úgy, hogy

$$P(\xi_1 = 1) = 1 - P(\xi_1 = -1) = p, \qquad (0 < p < 1).$$

Vizsgáljuk meg, hogy a következő sorozatok Markov-láncot alkotnak-e, és ha igen írjuk fel az átmenetvalószínűségi mátrixukat

(i) $X_n := \xi_n \xi_{n+1}$, $n \geqslant 1$.

(ii) $X_n := \xi_1 \cdots \xi_n$, $n \geqslant 1$.

(iii) $X_n := F(\xi_n, \xi_{n+1})$, $n \geqslant 1$, ahol $F(-1,-1) = 1$, $F(-1,1) = 2$, $F(1,-1) = 3$, $F(1,1) = 4$.

Megoldás.

(i) A megadott sztochasztikus folyamat fázistere $\{1, -1\}$ lesz. Számoljuk ki a $P(X_3 = 1 \,|\, X_2 = -1)$ és a $P(X_3 = 1 \,|\, X_1 = 1, X_2 = -1)$ feltételes valószínűségeket. Az nyilván igaz, hogy $X_1, X_2, \ldots$ azonos eloszlásúak, hiszen

$$\begin{aligned}P(X_n = 1) &= P(\xi_n\xi_{n+1} = 1) = P(\xi_n = 1, \xi_{n+1} = 1) + P(\xi_n = -1, \xi_{n+1} = -1)\\ &= p^2 + (1-p)^2,\\ P(X_n = -1) &= P(\xi_n = 1, \xi_{n+1} = -1) + P(\xi_n = -1, \xi_{n+1} = 1) = 2p(1-p).\end{aligned}$$

Azonban az már nem igaz, hogy $X_1, X_2, \ldots$ függetlenek lennének. Továbbá

$$\begin{aligned}P(X_3 = 1 \,|\, X_2 = -1) &= \frac{P(X_3 = 1, X_2 = -1)}{P(X_2 = -1)}\\ &= \frac{P(\xi_2 = 1, \xi_3 = -1, \xi_4 = -1) + P(\xi_2 = -1, \xi_3 = 1, \xi_4 = 1)}{2p(1-p)}\\ &= \frac{p(1-p)^2 + (1-p)p^2}{2p(1-p)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned}
P(X_3 = 1 \,|\, X_1 = 1, X_2 = -1) &= \frac{P(X_3 = 1, X_1 = 1, X_2 = -1)}{P(X_1 = 1, X_2 = -1)} \\
&= \frac{P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \xi_3 = -1, \xi_4 = -1) + P(\xi_1 = -1, \xi_2 = -1, \xi_3 = 1, \xi_4 = 1)}{P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \xi_3 = -1) + P(\xi_1 = -1, \xi_2 = -1, \xi_3 = 1)} \\
&= \frac{p^2(1-p)^2 + p^2(1-p)^2}{p^2(1-p) + (1-p)^2 p} = 2p(1-p).
\end{aligned}$$

Ebből látjuk, hogy **ha** $p \neq 1/2$, **akkor** $1/2 \neq 2p(1-p)$ **miatt biztosan nem kapunk Markov-láncot.**

Vizsgáljuk most a $p = 1/2$ esetet. Megmutatjuk, hogy ekkor $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc. Legyenek $n \geqslant 1$ és $i_1, i_2, \dots, i_{n+1} \in \{-1, 1\}$ tetszőlegesek, azt kell megmutatni, hogy

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n).$$

A baloldal

$$\frac{P(X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1)}{P(X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1)} = \frac{P(\xi_1\xi_2 = i_1, \xi_2\xi_3 = i_2, \dots, \xi_{n+1}\xi_{n+2} = i_{n+1})}{P(\xi_1\xi_2 = i_1, \dots, \xi_n\xi_{n+1} = i_n)}.$$

Ha ξ_1 adott, úgy $\xi_2, \dots, \xi_{n+2}$ már egyértelműen meghatározott a $\xi_1\xi_2 = i_1, \dots, \xi_{n+1}\xi_{n+2} = i_{n+1}$ feltétel által és a $p = 1/2$ feltétel miatt

$$P(\xi_j = 1) = P(\xi_j = -1) = \frac{1}{2}, \qquad j \geqslant 1.$$

Így a teljes valószínűség tétele miatt

$$\begin{aligned}
P(\xi_1\xi_2 = i_1, \xi_2\xi_3 = i_2, \dots, \xi_{n+1}\xi_{n+2} = i_{n+1}) &= P(\xi_1 = 1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + P(\xi_1 = -1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ezért

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}} = \frac{1}{2}.$$

Leellenőrizzük, hogy

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n) = \frac{P(X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n)}{P(X_n = i_n)} = \frac{1}{2},$$

ami alapján kapjuk, hogy a Markov-tulajdonság teljesül. Ha $i_n = 1$ és $i_{n+1} = 1$, akkor

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n) &= \frac{P(\xi_n = 1, \xi_{n+1} = 1, \xi_{n+2} = 1) + P(\xi_n = -1, \xi_{n+1} = -1, \xi_{n+2} = -1)}{p^2 + (1-p)^2} \\
&= \frac{p^3 + (1-p)^3}{p^2 + (1-p)^2} = \frac{\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}}{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

ha $i_n = 1$ és $i_{n+1} = -1$, akkor

$$\begin{aligned}P(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n) &= \frac{P(\xi_n = 1, \xi_{n+1} = 1, \xi_{n+2} = -1) + P(\xi_n = -1, \xi_{n+1} = -1, \xi_{n+2} = 1)}{p^2 + (1-p)^2} \\ &= \frac{p^2(1-p) + (1-p)^2 p}{p^2 + (1-p)^2} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

ha $i_n = -1$ és $i_{n+1} = 1$, akkor

$$\begin{aligned}P(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n) &= \frac{P(\xi_n = 1, \xi_{n+1} = -1, \xi_{n+2} = -1) + P(\xi_n = -1, \xi_{n+1} = 1, \xi_{n+2} = 1)}{2p(1-p)} \\ &= \frac{p(1-p)^2 + (1-p)p^2}{2p(1-p)} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

és ha $i_n = -1$ és $i_{n+1} = -1$, akkor

$$\begin{aligned}P(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n) &= \frac{P(\xi_n = -1, \xi_{n+1} = 1, \xi_{n+2} = -1) + P(\xi_n = 1, \xi_{n+1} = -1, \xi_{n+2} = 1)}{2p(1-p)} \\ &= \frac{(1-p)p(1-p) + p(1-p)p}{2p(1-p)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Továbbá, az átmenetvalószínűségi mátrix

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Mivel $X_{n+1} = \xi_1 \cdots \xi_{n+1} = X_n \xi_{n+1}$, így X_{n+1} értéke csak X_n értékétől függ ($X_1, \ldots, X_{n-1}$ értékétől nem), így Markov-láncot kapunk. A fázistér $\{-1, 1\}$ és

$$\begin{aligned}P(X_{n+1} = 1 \,|\, X_n = 1) &= \frac{P(\xi_1 \cdots \xi_n = 1, \xi_1 \cdots \xi_{n+1} = 1)}{P(\xi_1 \cdots \xi_n = 1)} = \frac{P(\xi_1 \cdots \xi_n = 1) P(\xi_{n+1} = 1)}{P(\xi_1 \cdots \xi_n = 1)} \\ &= P(\xi_{n+1} = 1) = p.\end{aligned}$$

Hasonló számolások alapján az átmenetvalószínűségi mátrix

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & -1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} & \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \end{array}.$$

(iii) Először megmutatjuk, hogy $\{X_n, n \geqslant 1\}$ Markov-lánc. A fázistér $\{1, 2, 3, 4\}$. Legyen $n \geqslant 1$ és $i_1, i_2, \ldots, i_{n+1} \in \{1, 2, 3, 4\}$ tetszőlegesek. Azt kell igazolni, hogy

(1.1) $$P(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, \ldots, X_1 = i_1) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n).$$

Tetszőleges $j \in \mathbb{N}$ és $i_j \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén, az $\{X_n = i_j\}$ esemény maga után vonja, hogy ξ_n és ξ_{n+1} értéke egyértelműen meghatározott. Így a fenti egyenlőség baloldala:

$$\begin{aligned}\frac{P(X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n, \ldots, X_1 = i_1)}{P(X_n = i_n, \ldots, X_1 = i_1)} &= \frac{P(\xi_1 = j_1, \ldots, \xi_n = j_n, \xi_{n+1} = j_{n+1}, \xi_{n+2} = j_{n+2})}{P(\xi_1 = j_1, \ldots, \xi_n = j_n, \xi_{n+1} = j_{n+1})} \\ &= \frac{P(\xi_1 = j_1) \cdots P(\xi_{n+1} = j_{n+1}) P(\xi_{n+2} = j_{n+2})}{P(\xi_1 = j_1) \cdots P(\xi_{n+1} = j_{n+1})} \\ &= P(\xi_{n+2} = j_{n+2})\end{aligned}$$

alkalmas $j_1, \ldots, j_{n+1}, j_{n+2} \in \{-1, 1\}$ esetén. Hasonlóan, a fenti egyenlőség jobboldala:

$$\frac{P(X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n)}{P(X_n = i_n)} = \frac{P(\xi_n = j_n, \xi_{n+1} = j_{n+1}, \xi_{n+2} = j_{n+2})}{P(\xi_n = j_n, \xi_{n+1} = j_{n+1})} = P(\xi_{n+2} = j_{n+2})$$

alkalmas $j_n, j_{n+1}, j_{n+2} \in \{-1, 1\}$ esetén. Így kapjuk, hogy (1.1) teljesül.

Továbbá,

$$p_{1,1} = P(X_{n+1} = 1 \,|\, X_n = 1) = \frac{P(\xi_n = -1, \xi_{n+1} = -1, \xi_{n+2} = -1)}{P(\xi_n = -1, \xi_{n+1} = -1)} = \frac{(1-p)^3}{(1-p)^2} = 1 - p$$

és

$$p_{1,2} = P(X_{n+1} = 2 \,|\, X_n = 1) = \frac{P(\xi_n = -1, \xi_{n+1} = -1, \xi_{n+2} = 1)}{P(\xi_n = -1, \xi_{n+1} = -1)} = \frac{(1-p)^2 p}{(1-p)^2} = p,$$

valamint

$$p_{1,3} = P(X_{n+1} = 3 \,|\, X_n = 1) = \frac{0}{(1-p)^2} = 0.$$

Hasonló számolások alapján

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \end{pmatrix} \end{array}.$$

□

1.15. Feladat. Legyen $\{X_n : n \geqslant 1\}$ egy olyan sztochasztikus folyamat, hogy

$$P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = -1) = p, \qquad n \in \mathbb{N},$$

ahol $0 < p < 1$. Igaz-e, hogy ekkor $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* Az 1.14. Feladat (i) része ellenpéldát szolgáltat (bizonyítást is nézni). □

1.16. Feladat. **[Szűcs Gábor feladatsorából [10]]** Három fehér és három fekete golyót osztunk szét egyenlően két urnába. Egy lépés abból fog állni, hogy véletlenszerűen kiveszünk egy golyót az első urnából, beledobjuk a másodikba, majd kiveszünk egy golyót a második urnából, és beletesszük az elsőbe. Jelölje X_n az első urnában található fehér golyók számát az n. lépés után.

(i) Mutassuk meg, hogy $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc! Adjuk meg az egylépéses átmenet-valószínűségi mátrixát!

(ii) Oldjuk meg a feladatot azzal a módosítással, hogy egy lépésben egyszerre veszünk ki egy-egy golyót a két urnából és kicseréljük őket.

Megoldás.(i): A szóban forgó $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ sztochasztikus folyamat azért Markov-lánc, mert az, hogy az n. lépés után hány fehér golyó lesz az első urnában csak attól függ, hogy milyen cserét hajtottunk végre az aktuális lépésben, és hány fehér golyó volt az első urnában a csere előtt. Tehát a múltnak nincs szerepe az (egylépéses) átmenetvalószínűségekben. Az állapottér nyilván $I = \{0, 1, 2, 3\}$. Az (egylépéses) átmenetvalószínűségek n értékétől is függetlenek, hiszen az a tény, hogy az aktuális lépés előtt már hány cserét hajtottunk végre nem befolyásolja az egyik állapotból a másikba kerülés esélyét.

Meghatározzuk most az egylépéses átmenetvalószínűségeket. Ha $X_0 = 0$, úgy (kezdetben) az első urnában 3 fekete és 0 fehér golyó, míg a második urnában 3 fehér és 0 fekete golyó van. Így az első urnából húzva csak fekete golyót tudunk húzni, amit áttéve a második urnába 3 fehér és 1 fekete golyó lesz ott. Ezért a 0 állapotból 1-lépéssel csak a 0 állapotba vagy az 1 állapotba lehetséges átmenet, továbbá

$$\begin{aligned}
p_{00} &= P(X_1 = 0 \,|\, X_0 = 0) = P(\text{3 fehér és 1 fekete golyó közül fehéret húzunk}) = \frac{1}{4},\\
p_{01} &= P(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 0) = P(\text{3 fehér és 1 fekete golyó közül feketét húzunk}) = \frac{3}{4},\\
p_{02} &= p_{03} = 0.
\end{aligned}$$

Ha $X_0 = 1$, úgy (kezdetben) az első urnában 2 fekete és 1 fehér golyó, míg a második urnában 2 fehér és 1 fekete golyó van. Így az első urnából húzva, majd azt áttéve a második urnába két eset lehetséges

	I. urna	II. urna
fehéret húzunk az I. urnából	2 fekete, 0 fehér	1 fekete, 3 fehér
feketét húzunk az I. urnából	1 fekete, 1 fehér	2 fekete, 2 fehér

.

Ezért az 1 állapotból 1-lépéssel a 0, 1 vagy 2 állapotokba lehetséges átmenet, továbbá

$$\begin{aligned}
p_{10} &= P(X_1 = 0 \,|\, X_0 = 1)\\
&= P(\text{fehéret húzunk az I. urnából})\\
&\quad \times P(\text{feketét húzunk a II. urnából} \,|\, \text{fehéret húzunk az I. urnából})\\
&= P(\text{2 fekete és 1 fehér golyó közül fehéret húzunk})\\
&\quad \times P(\text{1 fekete és 3 fehér golyó közül feketét húzunk})\\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Teljesen hasonlóan,

$$\begin{aligned}
p_{11} &= P(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 1) \\
&= P(\text{fehéret húzunk az I. urnából}) \\
&\quad \times P(\text{fehéret húzunk a II. urnából} \,|\, \text{fehéret húzunk az I. urnából}) \\
&\quad + P(\text{feketét húzunk az I. urnából}) \\
&\qquad \times P(\text{feketét húzunk a II. urnából} \,|\, \text{feketét húzunk az I. urnából}) \\
&= P(\text{2 fekete és 1 fehér golyó közül fehéret húzunk}) \\
&\quad \times P(\text{1 fekete és 3 fehér golyó közül fehéret húzunk}) \\
&\quad + P(\text{2 fekete és 1 fehér golyó közül feketét húzunk}) \\
&\qquad \times P(\text{2 fekete és 2 fehér golyó közül feketét húzunk}) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12},
\end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}
p_{12} &= P(X_1 = 2 \,|\, X_0 = 1) \\
&= P(\text{feketét húzunk az I. urnából}) \\
&\quad \times P(\text{fehéret húzunk a II. urnából} \,|\, \text{feketét húzunk az I. urnából}) \\
&= P(\text{2 fekete és 1 fehér golyó közül feketét húzunk}) \\
&\quad \times P(\text{2 fekete és 2 fehér golyó közül fehéret húzunk}) \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}.
\end{aligned}$$

Ha $X_0 = 2$, úgy (kezdetben) az első urnában 1 fekete és 2 fehér golyó, míg a második urnában 1 fehér és 2 fekete golyó van. Így az első urnából húzva, majd azt áttéve a második urnába két eset lehetséges

	I. urna	II. urna
fehéret húzunk az I. urnából	1 fekete, 1 fehér	2 fekete, 2 fehér
feketét húzunk az I. urnából	0 fekete, 2 fehér	3 fekete, 1 fehér

.

Ezért a 2 állapotból 1-lépéssel az 1, 2 vagy 3 állapotokba lehetséges átmenet, továbbá

$$\begin{aligned}
p_{21} &= P(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 2) \\
&= P(\text{fehéret húzunk az I. urnából}) \\
&\quad \times P(\text{feketét húzunk a II. urnából} \,|\, \text{fehéret húzunk az I. urnából}) \\
&= P(\text{1 fekete és 2 fehér golyó közül fehéret húzunk}) \\
&\quad \times P(\text{2 fekete és 2 fehér golyó közül feketét húzunk}) \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}.
\end{aligned}$$

Teljesen hasonlóan,

$$\begin{aligned} p_{22} &= P(X_1 = 2 \,|\, X_0 = 2) \\ &= P(\text{fehéret húzunk az I. urnából}) \\ &\quad \times P(\text{fehéret húzunk a II. urnából} \,|\, \text{fehéret húzunk az I. urnából}) \\ &\quad + P(\text{feketét húzunk az I. urnából}) \\ &\qquad \times P(\text{feketét húzunk a II. urnából} \,|\, \text{feketét húzunk az I. urnából}) \\ &= P(\text{1 fekete és 2 fehér golyó közül fehéret húzunk}) \\ &\quad \times P(\text{2 fekete és 2 fehér golyó közül fehéret húzunk}) \\ &\quad + P(\text{1 fekete és 2 fehér golyó közül feketét húzunk}) \\ &\qquad \times P(\text{3 fekete és 1 fehér golyó közül feketét húzunk}) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{12}, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} p_{23} &= P(X_1 = 3 \,|\, X_0 = 2) \\ &= P(\text{feketét húzunk az I. urnából}) \\ &\quad \times P(\text{fehéret húzunk a II. urnából} \,|\, \text{feketét húzunk az I. urnából}) \\ &= P(\text{1 fekete és 2 fehér golyó közül feketét húzunk}) \\ &\quad \times P(\text{3 fekete és 1 fehér golyó közül fehéret húzunk}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Végezetül, ha $X_0 = 3$, úgy (kezdetben) az első urnában 0 fekete és 3 fehér golyó, míg a második urnában 0 fehér és 3 fekete golyó van. Így az első urnából húzva csak fehér golyót tudunk húzni, amit áttéve a második urnába 3 fekete és 1 fehér golyó lesz ott. Ezért a 3 állapotból 1-lépéssel csak a 2 állapotba vagy a 3 állapotba lehetséges átmenet, továbbá

$$\begin{aligned} p_{32} &= P(X_1 = 2 \,|\, X_0 = 3) = P(\text{3 fekete és 1 fehér golyó közül feketét húzunk}) = \frac{3}{4}, \\ p_{33} &= P(X_1 = 3 \,|\, X_0 = 3) = P(\text{3 fekete és 1 fehér golyó közül fehéret húzunk}) = \frac{1}{4}, \\ p_{31} &= p_{30} = 0. \end{aligned}$$

Így az egylépéses átmenetvalószínűségi mátrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{7}{12} & \frac{4}{12} & 0 \\ 0 & \frac{4}{12} & \frac{7}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(ii): Ugyanúgy, ahogy az (i) részben indokoltuk, a szóban forgó $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ sztochasztikus folyamat Markov-lánc, az (egylépéses) átmenetvalószínűségek azonban megváltoznak.

Meghatározzuk most az egylépéses átmenetvalószínűségeket. Ha $X_0 = 0$, úgy (kezdetben) az első urnában 3 fekete és 0 fehér golyó, míg a második urnában 3 fehér és 0 fekete golyó van. Így az első urnából húzva csak fekete golyót tudunk húzni, a második urnából pedig csak fehéret. Megcserélve a két golyót, az első urnában 2 fekete és 1 fehér, a második urnában 2 fehér és 1 fekete golyó lesz. Ezért a 0 állapotból 1-lépéssel csak az 1 állapotba lehetséges átmenet, továbbá

$$
\begin{aligned}
p_{01} &= P(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 0) = 1, \\
p_{00} &= p_{02} = p_{03} = 0.
\end{aligned}
$$

Ha $X_0 = 1$, úgy (kezdetben) az első urnában 2 fekete és 1 fehér golyó, míg a második urnában 2 fehér és 1 fekete golyó van. Ezért az 1 állapotból 1-lépéssel a 0, 1, 2 állapotokba lehetséges átmenet. Vezessük az alábbi 4 eseeményt:

$$
\begin{aligned}
A_1 &:= \{\text{az 1. urnából fehéret, a 2.urnából fehéret húzunk}\}, \\
A_2 &:= \{\text{az 1. urnából fehéret, a 2.urnából feketét húzunk}\}, \\
A_3 &:= \{\text{az 1. urnából feketét, a 2.urnából fehéret húzunk}\}, \\
A_4 &:= \{\text{az 1. urnából feketét, a 2.urnából feketét húzunk}\}.
\end{aligned}
$$

Ekkor

$$
\begin{aligned}
p_{10} &= P(X_1 = 0 \,|\, X_0 = 1) = P(A_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, \\
p_{11} &= P(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 1) = P(A_1 \cup A_4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}, \\
p_{12} &= P(X_1 = 2 \,|\, X_0 = 1) = P(A_3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \\
p_{1,3} &= 0.
\end{aligned}
$$

Ha $X_0 = 2$, úgy (kezdetben) az első urnában 1 fekete és 2 fehér golyó, míg a második urnában 1 fehér és 2 fekete golyó van. Ezért a 2 állapotból 1-lépéssel az 1, 2, 3 állapotokba lehetséges átmenet. Továbbá,

$$
\begin{aligned}
p_{21} &= P(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 2) = P(A_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \\
p_{22} &= P(X_1 = 2 \,|\, X_0 = 2) = P(A_1 \cup A_4) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \\
p_{23} &= P(X_1 = 3 \,|\, X_0 = 2) = P(A_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, \\
p_{2,0} &= 0.
\end{aligned}
$$

Végezetül, ha $X_0 = 3$, úgy (kezdetben) az első urnában 0 fekete és 3 fehér golyó, míg a második urnában 0 fehér és 3 fekete golyó van. Így az első urnából húzva csak fehér golyót tudunk húzni, a második urnából pedig csak feketét. Megcserélve a két golyót, az első urnában 1 fekete és 2 fehér, a második urnában 1 fehér és 2 fekete golyó lesz. Ezért a 3 állapotból 1-lépéssel csak a 2 állapotba lehetséges átmenet, továbbá

$$\begin{aligned} p_{32} &= P(X_1 = 2 \,|\, X_0 = 3) = 1, \\ p_{33} &= p_{31} = p_{30} = 0. \end{aligned}$$

Így az egylépéses átmenetvalószínűségi mátrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

1.17. Feladat. Legyen $\{X_n : n \geqslant 0\}$ egy Markov-lánc, melynek fázistere I, átmenetvalószínűségi mátrixa $P = (p_{i,j})_{i,j \in I}$. Legyen $r \in I$ tetszőlegesen rögzített állapot és $m, i \in I$ olyan állapotok, hogy $r \neq m$ és $r \neq i$. Tekintsük a

$$P(X_n = m \,|\, X_0 = i, X_k \neq r, k = 1, \ldots, n-1) := q_{i,m}^{(n)}$$

feltételes valószínűségeket. Igaz-e, hogy ezek a feltételes valószínűségek egy olyan Markov-láncnak az n-lépéses átmenetvalószínűségei, melynek fázistere $I \setminus \{r\}$ és 1-lépéses átmenetvalószínűségei

$$Q = (q_{i,j})_{i,j \in I \setminus \{r\}} = \left(\frac{p_{i,j}}{1 - p_{i,r}} \right)_{i,j \in I \setminus \{r\}}.$$

($q_{i,j}$ definíciója heurisztikusan érthető, a feltételes valószínűség definíciójára gondolva.)

Megoldás. Nem igaz. Konstruálunk egy ellenpéldát. Tekintsünk egy olyan $\{X_n : n \geqslant 0\}$ Markov-láncot, melynek fázistere $\{0, 1, 2\}$. Legyen $r = 1$. Tegyük fel, hogy igaz az állítás egy $\{0, 2\}$ fázisterű, feladatbeli átmenetvalószínűségű Markov-láncra. Ekkor

$$\begin{aligned} q_{0,2}^{(2)} &= P(X_2 = 2 \,|\, X_0 = 0, X_1 \neq 1) = \frac{P(X_2 = 2, X_0 = 0, X_1 \neq 1)}{P(X_0 = 0, X_1 \neq 1)} \\ &= \frac{P(X_2 = 2, X_1 \neq 1 \,|\, X_0 = 0) P(X_0 = 0)}{P(X_1 \neq 1 \,|\, X_0 = 0) P(X_0 = 0)} = \frac{P(X_2 = 2, X_1 \neq 1 \,|\, X_0 = 0)}{P(X_1 \neq 1 \,|\, X_0 = 0)} \\ &= \frac{P(X_2 = 2, X_1 = 0 \,|\, X_0 = 0) + P(X_2 = 2, X_1 = 2 \,|\, X_0 = 0)}{P(X_1 = 0 \,|\, X_0 = 0) + P(X_1 = 2 \,|\, X_0 = 0)}. \end{aligned}$$

A Markov-lánc definíciója alapján

$$\begin{aligned} P(X_2 = i, X_1 = j \,|\, X_0 = k) &= P(X_2 = i \,|\, X_1 = j, X_0 = k) P(X_1 = j \,|\, X_0 = k) \\ &= P(X_2 = i \,|\, X_1 = j) P(X_1 = j \,|\, X_0 = k) = p_{j,i} p_{k,j}, \end{aligned}$$

és így

$$q_{0,2}^{(2)} = \frac{p_{0,2} p_{0,0} + p_{2,2} p_{0,2}}{p_{0,0} + p_{0,2}}.$$

Mivel feltételeztük, hogy igaz az állítás egy $\{0,2\}$ fázisterű, feladatbeli átmenetvalószínűségű Markov-láncra, így igaz kell, hogy legyen

$$q_{0,2}^{(2)} = (Q^2)_{0,2},$$

ahol

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} q_{0,0} & q_{0,2} \\ q_{2,0} & q_{2,2} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Mivel $(Q^2)_{0,2} = q_{0,0}q_{0,2} + q_{0,2}q_{2,2}$, kapjuk, hogy fenn kell, hogy álljon

$$q_{0,2}^{(2)} = q_{0,0}q_{0,2} + q_{0,2}q_{2,2}.$$

Így $q_{i,j}$ definíciója alapján

$$q_{0,2}^{(2)} = \frac{p_{0,0}p_{0,2}}{(1-p_{0,1})^2} + \frac{p_{0,2}p_{2,2}}{(1-p_{0,1})(1-p_{2,1})}.$$

Ezért annak kell igaznak lennie, hogy

$$\frac{p_{0,0}p_{0,2} + p_{0,2}p_{2,2}}{p_{0,0}+p_{0,2}} = \frac{p_{0,0}p_{0,2}}{(1-p_{0,1})^2} + \frac{p_{0,2}p_{2,2}}{(1-p_{0,1})(1-p_{2,1})}.$$

Ha például

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array},$$

akkor a baloldal

$$\frac{\frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{5}{12}.$$

A jobboldal pedig

$$\frac{\frac{1}{3}\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.$$

Így látjuk, hogy általában nem teljesül a kívánt egyenlőség. □

1.18. Feladat. Legyen $\{X_n : n \geqslant 0\}$ egy Markov-lánc, melynek fázistere $\mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy $X_m = i$ valamilyen $m \geqslant 0$-ra, ahol $i \in \mathbb{N}$. Legyen $Z_k := X_{m+k}$, $k \geqslant 0$. Mutassuk meg, hogy $\{Z_k : k \geqslant 0\}$ Markov-lánc, mely i-ből indul ki!

Megoldás. Legyen $k \geqslant 1$ és $i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1} \in \mathbb{N}$ tetszőlegesek. Ekkor

$$\begin{aligned} P(Z_{k+1} = i_{k+1} \,|\, Z_0 = i, Z_r = i_r, 1 \leqslant r \leqslant k) &= P(X_{m+k+1} = i_{k+1} \,|\, X_m = i, X_{m+r} = i_r, 1 \leqslant r \leqslant k) \\ &= P(X_{m+k+1} = i_{k+1} \,|\, X_{m+k} = i_k), \end{aligned}$$

mert $\{X_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc. Mivel

$$P(X_{m+k+1} = i_{k+1} \mid X_{m+k} = i_k) = P(Z_{k+1} = i_{k+1} \mid Z_k = i_k),$$

kapjuk, hogy $\{Z_k : k \geqslant 0\}$ Markov-lánc. □

1.19. Feladat. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók közös értékkészlettel, mely egy I megszámlálható halmaz. (Feltételezzük, hogy a valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn vannak definiálva.) Mutassuk meg, hogy $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc! Adjunk meg egy elégséges feltételt, mely mellett $\{X_n : n \geqslant 1\}$ homogén Markov-lánc!

Megoldás. Mivel $X_1, X_2, \ldots$ függetlenek, minden $j, i_1, \ldots, i_n \in I$ esetén

$$P(X_{n+1} = j \mid X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j),$$

így $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc. Ha $X_1, X_2, \ldots$ függetlenek és **azonos** eloszlásúak is, akkor a Markov-lánc homogén is. □

1.20. Feladat. Minden $n \geqslant 1$ esetén jelölje X_n egy szabályos dobókockával az első n dobás során a legnagyobb addig előforduló dobás eredményét. Mutassuk meg, hogy $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc és határozzuk meg a $P(X_n = j \mid X_1 = i)$, $i, j = 1, \ldots, 6$, n-lépéses átmenetvalószínűségeket!

Megoldás. Minden $n \geqslant 1$ esetén jelölje Y_n az n-edik dobás eredményét. Ekkor $X_{n+1} = \max\{X_n, Y_{n+1}\}$ és

$$p_{i,j} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \ j < i, \\ i/6 & \text{ha } \ i = j, \\ 1/6 & \text{ha } \ j > i, \end{cases}$$

ahol $1 \leqslant i, j \leqslant 6$. Ugyanis, ha $j < i$, úgy $p_{i,j} = 0$, mert az első $n+1$ dobás során a maximum nem lehet kisebb, mint az első n dobás során a maximum. Ha $i = j$, úgy $p_{i,i} = i/6$, mert az első $n+1$ dobás során akkor lesz a maximum egyenlő az első n dobás során vett maximummal (i-vel), ha az $(n+1)$-edik dobásra az $1, \ldots, i$ számok valamelyikét dobjuk, így $i/6$. Hasonlóan következik a $j > i$ eset is. Végiggondolható az is, hogy

$$p_{i,j}^{(n)} = P(X_{n+1} = j \mid X_1 = i) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \ j < i, \\ \left(\frac{i}{6}\right)^n & \text{ha } \ j = i. \end{cases}$$

Az utóbbi például abból következik, hogy egy adott dobás után akkor lesz még n lépés múlva is ugyanaz a maximum (i), ha ezen n lépés során mindig csak az $1, \ldots, i$ számjegyek valamelyikét dobjuk. Mivel a dobások függetlenek, így

$$\left(\frac{i}{6}\right)^n \quad \text{a keresett valószínűség.}$$

Ha $j > i$, úgy $p_{i,j}^{(n)} = P(Z_n = j)$, ahol $Z_n = \max\{Y_1, \dots, Y_n\}$, ugyanis egy adott dobás utáni n dobás során kell a maximumnak j-nek lennie. Így

$$\begin{aligned} P(Z_n = j) &= P(\{Z_n \leqslant j\} \setminus \{Z_n \leqslant j-1\}) = P(\{Z_n \leqslant j\}) - P(\{Z_n \leqslant j-1\}) \\ &= P(Y_i \leqslant j, i = 1, \dots, n) - P(Y_i \leqslant j-1, i = 1, \dots, n) \\ &= P(Y_1 \leqslant j)^n - P(Y_1 \leqslant j-1)^n = \left(\frac{j}{6}\right)^n - \left(\frac{j-1}{6}\right)^n. \end{aligned}$$

Tehát, ha $j > i$, úgy

$$p_{i,j}^{(n)} = \left(\frac{j}{6}\right)^n - \left(\frac{j-1}{6}\right)^n, \qquad n \geqslant 1.$$

□

1.21. Feladat. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók úgy, hogy

$$P(\xi_1 = 1) = 1 - P(\xi_1 = -1) = p, \qquad \text{ahol } 0 < p < 1.$$

Legyen $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \geqslant 1$ és $S_0 := 0$. Tanultuk, hogy $\{S_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc!

(i) Mutassuk meg, hogy $\{X_n := |S_n| : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc! Határozzuk meg az átmenetvalószínűségi mátrixát!

(ii) Legyen $M_n := \max_{0 \leqslant k \leqslant n} S_k$, $n \geqslant 0$. Mutassuk meg, hogy $\{Y_n := M_n - S_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc!

Megoldás.

(i) Legyen $i \geqslant 1$. Ha $X_n = i$, úgy $S_n = i$ vagy $S_n = -i$, ezért $S_{n+1} \in \{i-1, i+1, -i-1, -i+1\}$. Emiatt $X_{n+1} = |S_{n+1}| \in \{i-1, i+1\}$. Legyen $B = \{X_r = i_r, 0 \leqslant r < n\}$, ahol $i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2 \dots\}$. Ekkor

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = i+1 \,|\, X_n = i, B) \\ &\qquad = P(X_{n+1} = i+1, S_n = i \,|\, X_n = i, B) + P(X_{n+1} = i+1, S_n = -i \,|\, X_n = i, B) \\ &\qquad = P(X_{n+1} = i+1 \,|\, S_n = i, X_n = i, B) P(S_n = i \,|\, X_n = i, B) \\ &\qquad\quad + P(X_{n+1} = i+1 \,|\, S_n = -i, X_n = i, B) P(S_n = -i \,|\, X_n = i, B) \\ &\qquad = P(X_{n+1} = i+1 \,|\, S_n = i, B) P(S_n = i \,|\, X_n = i, B) \\ &\qquad\quad + P(X_{n+1} = i+1 \,|\, S_n = -i, B) P(S_n = -i \,|\, X_n = i, B). \end{aligned}$$

Nyilván

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = i+1 \,|\, S_n = i, B) &= p, \\ P(X_{n+1} = i+1 \,|\, S_n = -i, B) &= 1 - p. \end{aligned}$$

Legyen

$$l := \max\{r < n : i_r = 0\},$$

azaz l az n időpont előtt az $\{X_r = i_r, 0 \leqslant r < n\}$ trajektória 0-ba való utolsó visszatérésének időpontja. Ha $S_n = i$, úgy minden $l+1 \leqslant j \leqslant n$ esetén $S_j > 0$, ha pedig $S_n = -i$, úgy minden $l+1 \leqslant j \leqslant n$ esetén $S_j < 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
P(S_n = i \,|\, X_n = i, B) &= \frac{P(S_n = i, X_n = i, B)}{P(X_n = i, B)} = \frac{P(S_n = i, B)}{P(X_n = i, B)} \\
&= \frac{P(S_n = i, B)}{P(X_n = i, S_n = i, B) + P(X_n = i, S_n = -i, B)} \\
&= \frac{P(S_n = i, B)}{P(S_n = i, B) + P(S_n = -i, B)}.
\end{aligned}$$

Legyen

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \{S_n = i, S_m = i_m \neq 0, l < m \leqslant n-1, S_l = 0, X_r = i_r, 0 \leqslant r < l\}, \\
A_2 &:= \{S_n = -i, S_m = -i_m \neq 0, l < m \leqslant n-1, S_l = 0, X_r = i_r, 0 \leqslant r < l\}, \\
A_3 &:= \{S_n = i, S_m = i_m \neq 0, l < m \leqslant n-1\}, \\
A_4 &:= \{S_n = -i, S_m = -i_m \neq 0, l < m \leqslant n-1\}, \\
A_5 &:= \{S_l = 0, X_r = i_r, 0 \leqslant r < l\}.
\end{aligned}$$

Ekkor

$$P(S_n = i \,|\, X_n = i, B) = \frac{P(A_1)}{P(A_1) + P(A_2)} = \frac{P(A_3 \,|\, A_5) P(A_5)}{P(A_3 \,|\, A_5) P(A_5) + P(A_4 \,|\, A_5) P(A_5)}.$$

A Markov-tulajdonság miatt kapjuk, hogy

$$P(S_n = i \,|\, X_n = i, B) = \frac{P(A_3 \,|\, S_l = 0)}{P(A_3 \,|\, S_l = 0) + P(A_4 \,|\, S_l = 0)}.$$

Legyen

$$\begin{aligned}
D_i^{(n-l)} &:= \{\text{a véletlen bolyongás 0-ból indulva } n-l \text{ lépés alatt eljut i-be úgy,} \\
&\qquad \text{hogy az előre adott } i_{l+1}, \ldots, i_{n-1} \text{ pályát követi, mely seholsem } 0\}, \\
D_{-i}^{(n-l)} &:= \{\text{a véletlen bolyongás 0-ból indulva } n-l \text{ lépés alatt eljut } -i\text{-be úgy,} \\
&\qquad \text{hogy az előre adott } -i_{l+1}, \ldots, -i_{n-1} \text{ pályát követi, mely seholsem } 0\}.
\end{aligned}$$

Ekkor l értelmezése miatt

$$P(S_n = i \,|\, X_n = i, B) = \frac{P(D_i^{(n-l)})}{P(D_i^{(n-l)}) + P(D_{-i}^{(n-l)})}.$$

Kiszámoljuk most, hogy 0-ból $n-l$ lépés alatt i-be (ill. $-i$-be) eljutva hány lépést kell tenni felfelé és hányat lefelé. Jelölje x a felfelé lépések számát, így $n-l-x$ lépést teszünk lefelé. Mivel a 0-ból indulunk $x - (n-l-x) = i$, ezért $x = (n-l+i)/2$, (ill.

$x = (n - l - i)/2)$. Felhasználva, hogy $D_i^{(n-l)}$-ben a felfelé, ill. lefelé lépések sorrendje már rögzített, kapjuk, hogy

$$P(D_i^{(n-l)}) = p^{(n-l+i)/2}(1-p)^{(n-l-i)/2}.$$

Hasonlóan

$$P(D_{-i}^{(n-l)}) = p^{(n-l-i)/2}(1-p)^{(n-l+i)/2}.$$

Ezért

$$\begin{aligned}
P(S_n = i \mid X_n = i, B) &= \frac{p^{(n-l+i)/2}(1-p)^{(n-l-i)/2}}{p^{(n-l+i)/2}(1-p)^{(n-l-i)/2} + p^{(n-l-i)/2}(1-p)^{(n-l+i)/2}} \\
&= \frac{p^{i/2}(1-p)^{-i/2}}{p^{i/2}(1-p)^{-i/2} + p^{-i/2}(1-p)^{i/2}} = \frac{p^i}{p^i + (1-p)^i}.
\end{aligned}$$

Hasonlóan

$$P(S_n = -i \mid X_n = i, B) = \frac{(1-p)^i}{p^i + (1-p)^i}.$$

Ezért

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i, B) &= \frac{p^{i+1} + (1-p)^{i+1}}{p^i + (1-p)^i}, \\
P(X_{n+1} = i-1 \mid X_n = i, B) &= 1 - \frac{p^{i+1} + (1-p)^{i+1}}{p^i + (1-p)^i} = \frac{p^i(1-p) + (1-p)^i p}{p^i + (1-p)^i} \\
&= p(1-p)\frac{p^{i-1} + (1-p)^{i-1}}{p^i + (1-p)^i}.
\end{aligned}$$

Az $i = 0$ esetet külön kezelve,

$$P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0, B) = 1.$$

Ezek az eredmények már azt is bizonyítják, hogy $\{X_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc, mert a fenti feltételes valószínűségek értéke csak X_n értékétől függ.

Az átmenetvalószínűségek tehát

$$\begin{aligned}
p_{i,i+1} &= \frac{p^{i+1} + (1-p)^{i+1}}{p^i + (1-p)^i}, \qquad i \geqslant 1, \\
p_{i,i-1} &= p(1-p)\frac{p^{i-1} + (1-p)^{i-1}}{p^i + (1-p)^i}, \qquad i \geqslant 1, \\
p_{0,1} &= 1.
\end{aligned}$$

(ii) M_n értelmezése miatt $Y_n \geqslant 0$, $n \geqslant 0$ és

$$Y_n - Y_{n+1} = M_n - S_n - (M_{n+1} - S_{n+1}) = M_n - M_{n+1} + S_{n+1} - S_n = \xi_{n+1} + M_n - M_{n+1}.$$

Így, ha $Y_n > 0$, azaz $M_n > S_n$, úgy $P(\xi_{n+1} \in \{-1, 1\}) = 1$ miatt $M_n \geqslant S_{n+1}$. Ezért $M_n = M_{n+1}$, és emiatt $Y_n - Y_{n+1} = \xi_{n+1}$. Azaz, ha $Y_n > 0$, akkor $Y_{n+1} = Y_n - \xi_{n+1}$.

Ha pedig $Y_n = 0$, azaz $M_n = S_n$, akkor $Y_{n+1} = M_{n+1} - S_{n+1}$ miatt

$$P(Y_{n+1} = 0) = p \qquad \text{és} \qquad P(Y_{n+1} = 1) = 1 - p.$$

Mindkét esetben azt kaptuk, hogy Y_{n+1} a múlttól csak Y_n-en keresztül függ, ezért $\{Y_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc.

Az átmenetvalószínűségek pedig $p_{0,0} = p$ és $p_{0,1} = 1 - p$. Valamint, ha $i \geqslant 1$, úgy az $Y_n > 0$ esetre érvényes $Y_{n+1} = Y_n - \xi_{n+1}$ képlet alapján

$$p_{i,i-1} = p, \qquad\qquad p_{i,i+1} = 1 - p.$$

□

1.22. Feladat. Legyenek $\{X_n : n \geqslant 0\}$ és $\{Y_n : n \geqslant 0\}$ Markov-láncok, mindkettő fázistere $\mathbb{Z}$. Igaz-e, hogy ekkor $\{X_n + Y_n : n \geqslant 0\}$ mindig Markov-lánc?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* Tekintsük az 1.21. Feladatban definiált $\{S_n : n \geqslant 0\}$ és $\{Y_n : n \geqslant 0\}$ Markov-láncokat. Ezekre $S_n + Y_n = M_n$. Megmutatjuk, hogy $\{M_n : n \geqslant 0\}$ nem Markov-lánc. Elég például azt leellenőrizni, hogy

$$P(M_4 = 1 \,|\, M_3 = 1, M_2 = 0) \neq P(M_4 = 1 \,|\, M_3 = 1).$$

Ekkor

$$P(M_4 = 1 \,|\, M_3 = 1) = \frac{P(M_4 = 1, M_3 = 1)}{P(M_3 = 1)} = \frac{4/16}{3/8} = \frac{2}{3},$$

ugyanis 3 db. olyan 3-hosszúságú út van, mely a 0-ból indul, eléri az 1-szintet, viszont 1 fölé nem jut, illetve 4 db. olyan 4-hosszúságú út van, mely a 0-ból indul, eléri az 1-szintet az első 3 lépés során, viszont 1 fölé nem jut a 4 lépés során.

Hasonlóan,

$$P(M_4 = 1 \,|\, M_3 = 1, M_2 = 0) = \frac{P(M_4 = 1, M_3 = 1, M_2 = 0)}{P(M_3 = 1, M_2 = 0)} = \frac{1/16}{1/8} = \frac{1}{2}.$$

Így $P(M_4 = 1 \,|\, M_3 = 1, M_2 = 0) \neq P(M_4 = 1 \,|\, M_3 = 1)$. Ezért $\{M_n : n \geqslant 0\}$ nem Markov-lánc. □

1.23. Feladat. Legyen $\{S_n : n \geqslant 0\}$ a szimmetrikus véletlen bolyongás a számegyenesen, melyre $S_0 = 0$. Legyen $M_n := \max_{0 \leqslant k \leqslant n} S_k$, $n \geqslant 0$. Igaz-e, hogy ekkor $\{M_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* Lásd az előző feladat indoklását. □

A továbbiakban egy Markov-lánc i és j állapotai esetén $i \rightharpoonup j$ jelöli, ha az i állapotból elérhető a j állapot, illetve $\rightleftharpoons$ módon jelöljük, ha az i és j állapotok kölcsönösen elérhetőek egymásból.

1.24. Feladat. [Ross [7], Chapter 4, Example 3a] Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy homogén Markov-lánc, melynek fázistere $\{0, 1, 2\}$ és egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy irreducibilis Markov-lánc!

Megoldás. Azt kell megmutatni, hogy minden állapot kölcsönösen elérhető minden állapotból. Példaként megnézzük, hogy $0 \rightharpoonup 2$ és $2 \rightharpoonup 0$ teljesül. Azt kell ehhez belátni, hogy $\exists\ n, m \geqslant 0 : P_{0,2}^{(n)} > 0$ és $P_{2,0}^{(m)} > 0$. Az átmenetvalószínűségi mátrixból $P_{0,1}^{(1)} = 1/2$ és $P_{1,2}^{(1)} = 1/4$, ezért a Chapman–Kolmogorov egyenletek alapján

$$P_{0,2}^{(2)} = \sum_{k=0}^{2} P_{0,k}^{(1)} P_{k,2}^{(1)} \geqslant P_{0,1}^{(1)} P_{1,2}^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} > 0,$$

így n választható 2-nek.

Hasonlóan $P_{2,1}^{(1)} = 1/3$ és $P_{1,0}^{(1)} = 1/2$, ezért $P_{2,0}^{(2)} > 0$, így m is választható 2-nek.

Felhasználva $\rightharpoonup$ tranzitivitását, egyszerűbben is okoskodhatunk. Ekkor

$$\begin{aligned} P_{0,1}^{(1)} &= \frac{1}{2} > 0 \quad \text{miatt} \quad 0 \rightharpoonup 1, \\ P_{1,2}^{(1)} &= \frac{1}{4} > 0 \quad \text{miatt} \quad 1 \rightharpoonup 2, \\ P_{2,1}^{(1)} &= \frac{1}{3} > 0 \quad \text{miatt} \quad 2 \rightharpoonup 1, \\ P_{1,0}^{(1)} &= \frac{1}{2} > 0 \quad \text{miatt} \quad 1 \rightharpoonup 0. \end{aligned}$$

Így $\rightharpoonup$ tranzitivitása miatt a $\{0, 1, 2\}$ állapotok kölcsönösen elérhetőek egymásból.

Látható, hogy a fentiek alapján algoritmus adható az osztályok meghatározására tetszőleges Markov-lánc esetén:

- kiindulunk egy tetszőleges i_0 állapotból,
- vesszük az olyan $j \neq i_0$ állapotokat, melyekre $P_{i_0,j}^{(1)} > 0$,
- a kapott állapotokra az előző lépést csináljuk,
- ha ismétlődik egy állapot, akkor találtunk egy osztályt,
- választva egy olyan állapotot, mely nincs benne a már megtalált osztályban, elölről kezdjük az eljárást,
- ha nem ismétlődik egyetlen állapot sem, akkor lényegtelen állapotok végtelen osztályáról van szó.

□

1.25. Feladat. [Ross [7], Chapter 4, Example 3b] Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy homogén Markov-lánc, melynek fázistere $\{0, 1, 2, 3\}$ és egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg ezen Markov-lánc osztályait!

Megoldás. Az osztályok a következők $\{0, 1\}$, $\{2\}$ és $\{3\}$. A 2 állapotból elérhető a 0 állapot, megfordítva azonban nem igaz, így a 0 és 2 nem lehet azonos osztályban. (Hasonló igaz 1-re is.) A 3 állapot ún. elnyelő állapot, mert $p_{3,3} = 1$, azaz rajta kívül semmilyen más állapot sem érhető el belőle. □

1.26. Feladat. Legyen $\{X_n : n \geqslant 0\}$ egy véges állapotterű Markov-lánc. Mutassuk meg, hogy létezik legalább 1 darab zárt osztály a fázisterében.

Megoldás. Tegyük fel indirekt, hogy nem létezik zárt osztály. Tekintsünk egy tetszőleges $i \in I$ állapotot. Ekkor az indirekt feltevés miatt az i-t tartalmazó osztály nem zárt. Ezért létezik olyan $j \in I$ állapot, hogy $i \rightharpoonup j$ és $j \not\rightharpoonup i$. Ugyanis, ha minden olyan $j \in I$ állapotra, melyre $i \rightharpoonup j$, az teljesülne, hogy $j \rightharpoonup i$, akkor az i osztálya (definíció alapján) lényeges osztály lenne. Azonban egy előadásbeli tétel miatt, lényeges osztály az minimális zárt halmaz, tehát ellentmondást kapnánk. (Nyilván $i \neq j$, mert $i \rightleftharpoons i$.) Ezt a gondolatmenetet ismételve kapjuk, hogy létezik állapotoknak olyan $i_1, i_2, \ldots$ sorozata, hogy $i_n \rightharpoonup i_{n+1}$ és $i_{n+1} \not\rightharpoonup i_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Megmutatjuk, hogy $i_{j_1} \neq i_{j_2}$, ha $j_1 \neq j_2$. Az alábbi gondolatmenetet kell induktíve ismételni. Legyenek i_1, i_2, i_3 olyan állapotok, hogy $i_1 \rightharpoonup i_2$, $i_2 \not\rightharpoonup i_1$, $i_2 \rightharpoonup i_3$ és $i_3 \not\rightharpoonup i_2$. Ekkor $i_1 \neq i_2$ és $i_2 \neq i_3$. Ha $i_1 = i_3$ lenne, úgy $i_2 \rightharpoonup i_3$ miatt $i_2 \rightharpoonup i_1$, ami ellentmondás. Így azt kapjuk, hogy az állapottér nem lehet véges, legalább megszámlálhatóan végtelen. Ami ellentmondás. □

1.27. Feladat. Legyen $\{X_n : n \geqslant 0\}$ egy véges állapotterű Markov-lánc. Igaz-e, hogy ekkor létezik legalább 1 darab zárt osztály a fázisterében?

Megoldás. A válasz: **Igen.** *Indoklás:* Az 1.26. Feladatban leírva. □

2. Periodikusság, visszatérőség

2.1. Feladat. Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy homogén Markov-lánc, melynek fázistere $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ és egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg ezen Markov-lánc osztályait és az osztályok periódusát! Irreducibilis-e a Markov-lánc?

Megoldás. Az osztályok a következők $\{1, 3\}$, $\{4, 5\}$ és $\{2\}$. Valóban, mivel $1 \rightleftharpoons 3$, $4 \rightleftharpoons 5$ és $1 \not\rightharpoonup 4$, kapjuk, hogy 1 és 3 ugyanazon osztályban vannak, illetve 4 és 5 is ugyanabban az osztályban vannak, mely osztályok egymástól különbözőek. Továbbá, $1 \not\rightharpoonup 2$, illetve $4 \not\rightharpoonup 2$ miatt 2 nincs benne sem az $\{1, 3\}$, sem a $\{4, 5\}$ osztályában. Mivel már minden állapotot sorravettünk, kapjuk, hogy 2 önmaga alkot egy osztályt, illetve, hogy $\{1, 3\}$ és $\{4, 5\}$ egy-egy osztály. Mivel egynél több osztály van a Markov-lánc nem irreducibilis. Az 1 állapot periodikus, hiszen innen indulva pontosan páros sok lépés után térhetünk vissza, tehát $p_{11}^{(n)} > 0$ pontosan akkor teljesül, ha n páros. Így az 1 állapot periódusa

$$d_1 = \text{lnko}\{n \in \mathbb{N} : p_{11}^{(n)} > 0\} = \text{lnko}\{2, 4, 6, \ldots\} = 2.$$

Mivel a periódusság osztálytulajdonság és $\{1, 3\}$ egy osztály, kapjuk, hogy a 3 állapot periódusa is 2. Továbbá, mivel mind a 2, mind a 4, mind az 5 állapotból indulva 1 lépéssel visszatérhetünk oda ahonnan indultunk, kapjuk, hogy a 2, 4 és 5 állapotok periódusa 1, azaz

$$d_i = \text{lnko}\{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0\} = \text{lnko}\{1, 2, 3, 4, \ldots\} = 1, \qquad i \in \{2, 4, 5\}.$$

□

2.2. Feladat. Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy homogén Markov-lánc, melynek fázistere $\{1, 2, 3, 4\}$ és egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg ezen Markov-lánc osztályait és az osztályok periódusát! Irreducibilis-e a Markov-lánc?

Megoldás. Az átmenetvalószínűségi mátrix alapján

$$1 \rightharpoonup 4 \rightharpoonup 3 \rightharpoonup 1,$$

és így $1 \rightleftharpoons 3$, illetve $1 \rightleftharpoons 4$, azaz ugyanazon osztályhoz tartoznak. Ezért 1, 3, és 4 kölcsönösen elérhetőek egymásból. Továbbá,

$$2 \rightharpoonup 4 \rightharpoonup 3 \rightharpoonup 2,$$

és így $2 \rightleftharpoons 3$. Ezért az osztály definíciója miatt az egész állapottér $\{1, 2, 3, 4\}$ egyetlen lényeges osztály, azaz a Markov-lánc irreducibilis. Azt, hogy a Markov-lánc irreducibilis indokolhattuk volna úgy is, hogy $1 \rightharpoonup 4 \rightharpoonup 3 \rightharpoonup 2 \rightharpoonup 4 \rightharpoonup 3 \rightharpoonup 1$ (lásd az 1.24. Feladat megoldásának végén írottakat). Mivel a periódikusság osztálytulajdonság, elég egy állapot periódusát meghatározni, az összes többi állapot periódusa is ugyanannyi lesz. Az 1 állapot periódusát határozzuk meg. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje $\widetilde{C}_n$ az 1 állapotból n lépéssel elérhető állapotok halmazát. Az átmenetvalószínűségi mátrix alapján

$$\widetilde{C}_1 = \{4\}, \qquad \widetilde{C}_2 = \{3\}, \qquad \widetilde{C}_3 = \{1, 2\}, \qquad \widetilde{C}_4 = \{4\}, \qquad \widetilde{C}_5 = \{3\}, \qquad \widetilde{C}_6 = \{1, 2\},$$

és így tovább. Hasonlóan, ha $\widehat{C}_n$ jelöli a 4 állapotból n lépéssel elérhető állapotok halmazát, akkor

$$\widehat{C}_1 = \{3\}, \qquad \widehat{C}_2 = \{1, 2\}, \qquad \widehat{C}_3 = \{4\}, \qquad \widehat{C}_4 = \{3\},$$

és így tovább. Vegyük észre, hogy indexezéstől eltekintve ugyanazokat a halmazokat kaptuk, mint az előbb, így az alosztályok $C_0 = \{3\}$, $C_1 = \{4\}$ és $C_2 = \{1, 2\}$. Ezért

$$d_1 = \mathrm{lnko}\{n \in \mathbb{N} : p_{11}^{(n)} > 0\} = \mathrm{lnko}\{3, 6, 9, \ldots\} = 3.$$

Így a Markov-lánc irreducibilis, periódikus, 3-periódussal. □

2.3. Feladat. Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ egy homogén Markov-lánc, I fázistérrel, $i \in I$ pedig egy olyan állapot, hogy létezik olyan $n_i \in \mathbb{N}$, hogy $p_{ii}^{(n_i)} > 0$.

(i) Mutassuk meg, hogy $d_i \leqslant \min\{n \geqslant 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$, ahol d_i jelöli az i állapot periódusát.

(ii) Mutassuk példát arra, hogy $d_i < \min\{n \geqslant 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$.

Megoldás. (i): Felhasználva d_i definícióját, kapjuk, hogy d_i osztója az összes olyan $n \in \mathbb{N}$-nek, melyre $p_{ii}^{(n)} > 0$. Így d_i osztója $\min\{n \geqslant 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$-nek is. Ezért $d_i \leqslant \min\{n \geqslant 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$.

(ii): Legyen $I := \{1, 2, 3, 4\}$ és az egylépéses átmenetvalószínűségi mátrix

$$P := \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ekkor $1 \rightharpoonup 2 \rightharpoonup 3 \rightharpoonup 4 \rightharpoonup 1$ miatt $\{1,2,3,4\}$ egyetlen osztály, és így a lánc irreducibilis. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje $\widetilde{C}_n$ az 1 állapotból n lépéssel elérhető állapotok halmazát. Ekkor

$$\begin{aligned} &\widetilde{C}_1 = \{2\}, \qquad \widetilde{C}_2 = \{3\}, \qquad \widetilde{C}_3 = \{2,4\}, \qquad \widetilde{C}_4 = \{3,1\}, \\ &\widetilde{C}_5 = \{2,4\}, \qquad \widetilde{C}_6 = \{3,1\}, \qquad \widetilde{C}_7 = \{2,4\}, \qquad \widetilde{C}_8 = \{3,1\}, \end{aligned}$$

és így tovább. Ezért

$$p_{11} = 0, \quad p_{11}^{(2)} = 0, \quad p_{11}^{(3)} = 0, \quad p_{11}^{(4)} > 0, \quad p_{11}^{(5)} = 0, \quad p_{11}^{(6)} > 0, \quad p_{11}^{(7)} = 0, \quad p_{11}^{(8)} > 0,$$

és így tovább. Ezért

$$d_1 = \mathrm{lnko}\{n \in \mathbb{N} : p_{11}^{(n)} > 0\} = \mathrm{lnko}\{4,6,8,\ldots\} = 2,$$

azonban $\min\{n \geqslant 1 : p_{11}^{(n)} > 0\} = 4$. A fentiekből az is következik, hogy a két alosztály

$$\begin{aligned} C_0 &= \Big\{ j \in \{1,2,3,4\} \,|\, \exists\, n \geqslant 0,\ n \equiv 0 \mod (2) : p_{1j}^{(n)} > 0 \Big\} = \{1,3\}, \\ C_1 &= \Big\{ j \in \{1,2,3,4\} \,|\, \exists\, n \geqslant 0,\ n \equiv 0 \mod (2) : p_{1j}^{(n)} > 0 \Big\} = \{2,4\}. \end{aligned}$$

□

2.4. Feladat. Legyenek $r_1, \ldots, r_s$ pozitív egész számok, hogy a legnagyobb közös osztójuk 1. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geqslant N$ előállítható

$$n = \sum_{k=1}^{s} a_k^{(n)} r_k$$

alakban, ahol $a_k^{(n)}$, $k = 1, \ldots, s$, alkalmas pozitív egész számok. A feladat állítása átfogalmazható az alábbi pénzváltási problémára: adva s fajta pénzérmét, r_1 Ft-osokat, r_2 Ft-osokat, ..., r_s Ft-osokat, létezik olyan pénzösszeg (N), hogy minden ennél nagyobb vagy egyenlő pénzösszeg (n) előállítható a megadott fajta pénzérmék felhasználásával úgy, hogy minden fajta érmét felhasználunk $(a_k^{(n)} \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, s)$.

Megoldás. A legnagyobb közös osztóról tanultaknak megfelelően, léteznek olyan (nem szükségképpen pozitív) c_k, $k = 1, \ldots, s$, egész számok, hogy $c_1 r_1 + \cdots + c_s r_s = 1$. Legyen $R := r_1 + \cdots + r_s$. Ekkor bármilyen $n \in \mathbb{Z}$ egyértelműen állítható elő $n = x_n R + y_n$ alakban, ahol $x_n, y_n \in \mathbb{Z}$ és $0 \leqslant y_n < R$. Így

$$n = \sum_{k=1}^{s} (x_n + c_k y_n) r_k,$$

és itt az összes együttható pozitív lesz, ha

$$x_n > \left(\max_{k=1,\ldots,s} |c_k| \right) R.$$

Valóban, ekkor

$$x_n + c_k y_n > \left(\max_{k=1,\ldots,s} |c_k| \right) R + c_k y_n \geqslant |c_k| R + c_k y_n \geqslant (|c_k| + c_k) y_n \geqslant 0.$$

Így élhetünk például az $N := ((\max_{k=1,\ldots,s} |c_k|) R + 1) R$ választással. □

2.5. Feladat. Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy irreducibilis, aperiódikus homogén Markov-lánc, I fázistérrel. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $i, j \in I$ esetén létezik olyan $N(i,j) \in \mathbb{N}$, hogy $p_{ij}^{(n)} > 0$ minden $n \geqslant N(i,j)$ esetén!

Megoldás. Mivel j aperiódikus, kapjuk, hogy létezik olyan $s \in \mathbb{N}$ és léteznek olyan $n_1, \ldots, n_s$ pozitív egészek, hogy a legnagyobb közös osztójuk 1 és $p_{jj}^{(n_k)} > 0$, $k = 1, \ldots, s$. A 2.4. Feladat alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geqslant N$ előállítható

$$n = \sum_{k=1}^{s} a_k^{(n)} n_k$$

alakban, ahol $a_k^{(n)}$, $k = 1, \ldots, s$, alkalmas pozitív egész számok. A Kolmogorov-Chapman egyenletek alapján,

$$p_{jj}^{(n)} \geqslant \left(p_{jj}^{(n_1)}\right)^{a_1^{(n)}} \cdots \left(p_{jj}^{(n_s)}\right)^{a_s^{(n)}} > 0, \qquad \forall\ n \geqslant N.$$

Így $p_{jj}^{(n)} > 0$ minden $n \geqslant N$ esetén. Mivel a Markov-lánc irreducibilis, kapjuk, hogy létezik olyan n_{ij} nemnegatív egész szám, hogy $p_{ij}^{(n_{ij})} > 0$. Így, újra a Kolmogorov-Chapman egyenletek alapján,

$$p_{ij}^{(n+n_{ij})} \geqslant p_{ij}^{(n_{ij})} p_{ij}^{(n)} > 0, \qquad \forall\ n \geqslant N.$$

Ezért élhetünk az $N(i,j) := N + n_{ij}$ választással.

Megjegyezzük, hogy általánosabban is igaz a feladatban szereplő állítás. Nevezetesen, ha i és j azonos kommunikációs osztályba tartozó állapotok és a szóban forgó osztály periódusa $d \in \mathbb{N}$, akkor létezik egy olyan $N(i,j) \in \mathbb{N}$, hogy $n > N(i,j)$ esetén $p_{i,j}^{(n)} > 0$ pontosan akkor teljesül, ha $n \equiv d(i,j) \bmod(d)$, ahol $d(i,j) \in \{0, 1 \ldots, d-1\}$. □

2.6. Feladat. [Grimmett and Stirzaker [3], Problem 6.15.4] Legyenek $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ és $\{Y_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ független, homogén Markov-láncok ugyanazzal az I fázistérrel és P átmenetvalószínűségi mátrixxal.

(i) Mutassuk meg, hogy $\{Z_n := (X_n, Y_n) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ is Markov-lánc.

(ii) Mutassuk meg, hogy ha $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ és $\{Y_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ irreducibilisek és aperiódikusak is, úgy $\{Z_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ is irreducibilis és aperiódikus.

(iii) Ellenpéldát adva mutassuk meg, hogy a (ii) részben az aperiódikusság feltétele nem hagyható el, azaz léteznek olyan független, irreducibilis $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ és $\{Y_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ Markov-láncok (ugyanazon fázistérrel és átmenetvalószínűségi mátrixxal), hogy $\{Z_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ nem irreducibilis.

Megoldás. (i): Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $(i_0, j_0), \ldots, (i_n, j_n) \in I \times I$ esetén

$$
\begin{aligned}
&P(Z_n = (i_n, j_n) \,|\, Z_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1}), \ldots, Z_0 = (i_0, j_0)) \\
&\quad = P(X_n = i_n, Y_n = j_n \,|\, X_{n-1} = i_{n-1}, Y_{n-1} = j_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0, Y_0 = j_0) \\
&\quad = \frac{P(X_n = i_n, Y_n = j_n, X_{n-1} = i_{n-1}, Y_{n-1} = j_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0, Y_0 = j_0)}{P(X_{n-1} = i_{n-1}, Y_{n-1} = j_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0, Y_0 = j_0)} \\
&\quad = \frac{P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)P(Y_n = j_n, Y_{n-1} = j_{n-1}, \ldots, Y_0 = j_0)}{P(X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)P(Y_{n-1} = j_{n-1}, \ldots, Y_0 = j_0)} \\
&\quad = P(X_n = i_n \,|\, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)P(Y_n = j_n \,|\, Y_{n-1} = j_{n-1}, \ldots, Y_0 = j_0) \\
&\quad = P(X_n = i_n \,|\, X_{n-1} = i_{n-1})P(Y_n = j_n \,|\, Y_{n-1} = j_{n-1}) \\
&\quad = \frac{P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1})}{P(X_{n-1} = i_{n-1})} \cdot \frac{P(Y_n = j_n, Y_{n-1} = j_{n-1})}{P(Y_{n-1} = j_{n-1})} \\
&\quad = \frac{P(X_n = i_n, Y_n = j_n, X_{n-1} = i_{n-1}, Y_{n-1} = j_{n-1})}{P(X_{n-1} = i_{n-1}, Y_{n-1} = j_{n-1})} \\
&\quad = \frac{P(Z_n = (i_n, j_n), Z_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1}))}{P(Z_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1}))} \\
&\quad = P(Z_n = (i_n, j_n) \,|\, Z_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1})).
\end{aligned}
$$

Így $\{Z_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ homogén Markov-lánc, fázistere $I \times I$, egylépéses átmenetvalószínűségei pedig az $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ és $\{Y_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ Markov-láncok megfelelő egylépéses átmenetvalószínűségeinek szorzatai, azaz

$$
P(Z_n = (i_n, j_n) \,|\, Z_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1})) = (P)_{i_{n-1}, i_n} (P)_{j_{n-1}, j_n}.
$$

(ii): A 2.5. Feladat alapján tetszőleges $(i, r), (j, s) \in I \times I$ esetén létezik olyan $N(i, r) \in \mathbb{N}$ és $N(j, s) \in \mathbb{N}$, hogy

$$
\begin{aligned}
P(X_n = r \,|\, X_0 = i) > 0, &\qquad \forall\, n \geqslant N(i, r), \\
P(Y_n = s \,|\, Y_0 = j) > 0, &\qquad \forall\, n \geqslant N(j, s).
\end{aligned}
$$

Így, az (i) rész megoldásában írottakat is felhasználva

$$
P(Z_n = (r, s) \,|\, Z_0 = (i, j)) = P(X_n = r \,|\, X_0 = i)P(Y_n = s \,|\, Y_0 = j) > 0,
$$

tetszőleges $n \geqslant \max(N(i, r), N(j, s))$ esetén. Így $\{Z_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ irreducibilis és aperiódikus.

(iii): Legyen $I := \{0, 1\}$ és

$$
P := \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.
$$

Ekkor az $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ és $\{Y_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ Markov-láncok irreducibilisek és periodikusak, periódusuk 2. Továbbá, az (i) rész alapján $\{Z_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ Markov-lánc, fázistere

$\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ és egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa

$$\begin{array}{c} \\ (0,0) \\ (0,1) \\ (1,0) \\ (1,1) \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0\cdot 0 & 0\cdot 1 & 1\cdot 0 & 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 & 0\cdot 0 & 1\cdot 1 & 1\cdot 0 \\ 1\cdot 0 & 1\cdot 1 & 1\cdot 0 & 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 & 1\cdot 0 & 0\cdot 1 & 0\cdot 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ (0,0) \\ (0,1) \\ (1,0) \\ (1,1) \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Így a $\{Z_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ Markov-lánc osztályai $\{(0,0),(1,1)\}$ és $\{(1,0),(0,1)\}$, azaz nem irreducibilis $\{Z_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$. A fenti átmenetmátrix nemmás, mint P-nek önmagával vett Kronecker szorzata. □

2.7. Megjegyzés. (visszatérőség) Felidézzük, hogy mit értünk visszatérő (recurrent) és átmeneti (transient) állapoton. Legyen tetszőleges i és j állapotok és $n \geqslant 1$ esetén

$$f_{i,j}^{(n)} := P(X_n = j, X_t \neq j, 1 \leqslant t \leqslant n-1 \,|\, X_0 = i),$$

azaz $f_{i,j}^{(n)}$ annak a valószínűsége, hogy n lépés alatt jutunk el először i-ből j-be. Legyen

$$f_{i,j}^* := \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}^{(n)},$$

azaz $f_{i,j}^*$ annak a valószínűsége, hogy i-ből indulva a lánc eljut j-be. Az i állapotot visszatérőnek nevezzük, ha $f_{i,i}^* = 1$, átmenetinek, ha $f_{i,i}^* < 1$. Azaz egy i állapot akkor visszatérő, ha a lánc i-ből indulva 1 valószínűséggel visszajut oda.

Az alábbiakban heurisztikus gondolatmenetek nyomán igaz összefüggésekhez jutunk. Tegyük fel, hogy egy Markov-lánc az i állapotból indul ki és i visszatérő állapot. Ekkor a lánc 1 valószínűséggel visszatér i-be. A Markov-lánc definíciója miatt minden újra indul, úgy mintha a lánc újból i-ből indulna. És ily módon a lánc újra visszatér 1 valószínűséggel i-be. Egy kicsit precízebben ezt a következőképpen indokolhatjuk meg. Vezessük be az i állapot első elérési idejét:

$$\tau_i := \begin{cases} n & \text{ha } X_n = i \text{ és } X_t \neq i, \ 1 \leqslant t \leqslant n-1, \\ +\infty & \text{ha } X_t \neq i, \forall \ t \geqslant 1. \end{cases}$$

Mivel az i állapot visszatérő, $P(\tau_i < +\infty) = 1$. Továbbá, mivel $P(X_0 = i) = 1$, kapjuk, hogy $\{X_{\tau_i+n} : n = 0,1,2,\ldots\}$ is Markov-lánc, melyre $P(X_{\tau_i} = i) = 1$, és a szóban forgó Markov-lánc egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa és kezdeti eloszlása megegyezik $\{X_n : n = 0,1,2,\ldots\}$ egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixával, illetve kezdeti eloszlásával. (Az átmenetvalószínűségi mátrixok egyezőségének hátterében az erős Markov-tulajdonság áll.) A fenti gondolatmenetet ismételve kapjuk, hogy ha egy Markov-lánc egy visszatérő állapotból indul ki, akkor 1 valószínűséggel végtelen sokszor visszatér oda.

Most azt tegyük fel, hogy a Markov-lánc az i állapotból indul ki és i átmeneti állapot. Ekkor minden egyes alkalommal, mikor a lánc belép i-be pozitív, nevezetesen $1-f_{i,i}^*$ annak a valószínűsége, hogy soha többet nem tér vissza i-be. Így feltéve, hogy egy Markov-lánc az i átmeneti állapotból indul ki annak a valószínűsége, hogy pontosan n alkalommal van az i állapotban, azaz $(n-1)$-szer tér vissza oda

$$(f_{i,i}^*)^{n-1}(1-f_{i,i}^*), \qquad n \geqslant 1.$$

Azaz, ha egy Markov-lánc az i átmeneti állapotból indul ki, akkor az i állapot meglátogatásainak száma (beleértve a kezdeti $\{X_0 = i\}$-t is) geometriai eloszlású $1-f_{i,i}^*$ paraméterrel. Így egy Markov-lánc az i átmeneti állapotból indulva várhatóan $1/(1-f_{i,i}^*)$-szer tartózkodik az i állapotban (beleértve a kiindulási időpontot is), ami véges.

Az előző két bekezdés alapján az i állapot akkor és csak akkor visszatérő, ha a Markov-lánc i-ből indulva várhatóan végtelen sokszor tartózkodik az i állapotban.

Legyen i egy rögzített állapot és minden $n \geqslant 0$ esetén

$$A_n^{(i)}(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad X_n(\omega) = i, \\ 0 & \text{ha} \quad X_n(\omega) \neq i. \end{cases}$$

Ekkor $\sum_{n=0}^\infty A_n^{(i)}$ az i állapot meglátogatásainak száma (beleértve a kiindulási időpontot is) az $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc által. Így, mivel $A_n^{(i)}$ nemnegatív valószínűségi változók,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^\infty A_n^{(i)} \,|\, X_0 = i\right) = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}(A_n^{(i)} \,|\, X_0 = i) = \sum_{n=0}^\infty P(X_n = i \,|\, X_0 = i) = \sum_{n=0}^\infty p_{i,i}^{(n)}. \tag{2.1}$$

Így megkapjuk az előadáson bizonyított visszatérőségi kritériumot:

$$\text{ha} \quad \sum_{n=0}^\infty p_{i,i}^{(n)} = +\infty, \qquad \text{akkor } i \text{ visszatérő,}$$

$$\text{ha} \quad \sum_{n=0}^\infty p_{i,i}^{(n)} < +\infty, \qquad \text{akkor } i \text{ átmeneti.}$$

Ebből a levezetésből láthatjuk, hogy minden átmeneti állapotban várhatóan csak véges sokszor tartózkodik a Markov-lánc (innen ered a neve). □

2.8. Megjegyzés. Ismertek az alábbiak. Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc I fázistérrel. Ekkor teljesülnek a következők:

(i) Ha $i \not\rightharpoonup j$, akkor $p_{i,j}^{(n)} = 0$ minden $n > 0$ esetén, és így $\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = 0$.

(ii) Ha $i \rightharpoonup j$ és j nem visszatérő, akkor $\sum_{n=0}^\infty p_{i,j}^{(n)} < +\infty$, így $\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = 0$ és

$$\sum_{n=0}^\infty p_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{1-f_{jj}^*} & \text{ha} \quad i = j, \\ \frac{f_{ij}^*}{1-f_{jj}^*} & \text{ha} \quad i \neq j. \end{cases}$$

(iii) Ha $i \rightharpoonup j$ és j visszatérő, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,j}^{(n)} = +\infty$.

Ezért, ha j nem visszatérő állapot, akkor bármely i állapotra

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = 0,$$

valamint felhasználva, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I} P(X_0 = i) p_{i,j}^{(n)} = \sum_{i\in I} P(X_0 = i) \lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}$$

kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = 0$. (A $\sum$ és a $\lim$ felcserélhetőségét előadáson indokoltuk.) Tehát, ha j nem visszatérő állapot, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = 0, \qquad \forall\ i \in I.$$

□

Az alábbiakban a visszatérőségre adunk egy jól használható elégséges feltételt. (Ennek köze van a Doeblin-tételhez (4.14. Tétel) is.)

2.9. Tétel. *Legyen $\{X_n : n \geqslant 0\}$ egy homogén Markov-lánc. Jelölje P az egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixát, és I a fázisterét. Legyen továbbá minden $n \geqslant 1$ esetén*

$$A_n := \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} P^m.$$

Tegyük fel, hogy létezik olyan $M \geqslant 1$, $j_0 \in I$ és $\varepsilon > 0$, hogy

$$\inf_{i\in I} (A_M)_{i,j_0} \geqslant \varepsilon.$$

Ekkor egy $j \in I$ állapot akkor és csak akkor visszatérő, ha $j_0 \rightharpoonup j$.

Szintén jól használható egy állapot visszatérőségének eldöntésére az alábbi tétel is.

2.10. Tétel. *Legyen C tetszőleges osztály, $j \in C$ rögzített. Ekkor az*

$$y_i = \sum_{k\in C\setminus\{j\}} p_{ik} y_k + p_{ij}, \qquad i \in C, \tag{2.2}$$

egyenletrendszernek minden nemnegatív $y_i, i \in C$, megoldására (azaz melyre $y_i \geqslant 0, i \in C$), fennáll, hogy $y_i \geqslant f_{ij}^*$, $i \in C$. Továbbá, létezik az egyenletrendszernek minimális nemnegatív megoldása, és ez $y_i = f_{ij}^*$, $i \in C$.

2.11. Feladat. Tegyük fel, hogy az $\{X_n : n \geqslant 0\}$ véges állapoterű, homogén Markov-lánc állapotterében létezik olyan s elnyelő állapot (azaz $p_{s,s} = 1$), ami minden állapotból elérhető (azaz $j \rightharpoonup s$ minden j állapotra). Mutassuk meg, hogy ekkor minden s-től különböző állapot átmeneti állapot.

1. Megoldás. Mivel minden $j \in I$ állapotra $j \rightharpoonup s$, a Chapman–Kolmogorov tétel miatt létezik olyan $K \in \mathbb{N}$, hogy $(P^K)_{j,s} > 0$ minden $j \in I$ esetén. Ekkor $M := K+1$, $j_0 := s$ és $\varepsilon := \inf_{i \in I}(A_M)_{i,j_0}$ teljesítik az 2.9. Tétel feltételeit. Valóban, mivel $A_M \geqslant P^K/(K+1)$, és az I állapottér véges, kapjuk, hogy $\varepsilon > 0$. Ezért az 2.9. Tétel alapján egy $j \in I$ állapot akkor és csak akkor visszatérő, ha $s \rightharpoonup j$. Mivel, ha $j \neq s$, úgy nem igaz, hogy $s \rightharpoonup j$, így kapjuk, hogy minden s-től különböző állapot átmeneti.

2. Megoldás. Felhasználva, hogy s elnyelő állapot, minden $j \in I$, $j \neq s$ állapotra $j \rightharpoonup s$, viszont az s állapotból nem érhető el a j állapot. Így egy $j \in I$, $j \neq s$ állapot lényegtelen, és ezért átmeneti. Ugyanis előadáson tanultuk, hogy visszatérő osztály lényeges. Ez a gondolatmenet azt is mutatja, hogy a feladat feltételei közül elhagyható, hogy az állapottér véges. □

2.12. Feladat. Igaz-e, hogy ha egy véges állapotterű, homogén Markov-lánc állapotterében van olyan s állapot, hogy $p_{s,s} = 1$ és $j \rightharpoonup s$ minden j állapotra, akkor minden s-től különböző állapot nem visszatérő állapot?

Megoldás. A válasz: **Igen.** Indoklás: Az 2.11. Feladatban leírva. □

2.13. Feladat. Létezik-e olyan véges állapotterű Markov-lánc és fázisterében olyan i és j visszatérő állapotok, hogy $i \rightharpoonup j$, de $j \not\rightharpoonup i$?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* Mert ha létezne, akkor $i \rightharpoonup j$ és $j \not\rightharpoonup i$ miatt i és j két különböző visszatérő osztályban lenne. Azonban tétel miatt visszatérő osztály lényeges, így mivel $i \rightharpoonup j$, annak kéne fennállnia, hogy j-ból is elérhető i, de ez nem igaz, így ellentmondás van. □

2.14. Feladat. Létezik-e olyan véges állapotterű Markov-lánc és fázisterében olyan i és j állapotok, hogy $i \rightleftharpoons j$ és i és j közül legalább az egyik nem visszatérő?

Megoldás. A válasz: **Igen.** *Indoklás:* A későbbi 5.8. Feladat példát szolgáltat erre. □

2.15. Feladat. Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ egy véges állapotterű homogén Markov-lánc, jelölje $\{0, 1, \ldots, M\}$ a fázisterét. Mutassuk meg, hogy nem lehet minden állapot átmeneti. Mutassuk meg, hogy egy véges állapotterű, irreducibilis homogén Markov-lánc esetén minden állapot visszatérő.

Megoldás. Tegyük fel indirekt módon, hogy minden állapot átmeneti. Felelevenítve a

$$A_n^{(i)}(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad X_n(\omega) = i, \\ 0 & \text{ha} \quad X_n(\omega) \neq i. \end{cases}$$

jelölést kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{M}\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(j)}\,|\,X_0=i\right)=\sum_{j=0}^{M}\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(j)}\,|\,X_0=i\right)=\sum_{j=0}^{M}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(A_n^{(j)}\,|\,X_0=i\right)$$
$$=\sum_{j=0}^{M}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X_n=j\,|\,X_0=i)=\sum_{j=0}^{M}\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}.$$

A 2.8. Megjegyzés (i) és (ii) része alapján, mivel minden állapot átmeneti, kapjuk, hogy tetszőleges $i,j\in\{0,1,\dots,M\}$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}<\infty$ és így $\sum_{j=0}^{M}\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}<\infty$. Ezért a $\sum_{j=0}^{M}\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(j)}$ valószínűségi változó 1-valószínűséggel véges. Ez azonban ellentmondás, mert $\sum_{j=0}^{M}\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(j)}$ nem más, mint a $\{0,1,\dots,M\}$ állapotok meglátogatásainak száma az $\{X_n:n\in\mathbb{Z}_+\}$ Markov-lánc által, ami nyilván $+\infty$. Ezért $\mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{M}\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(j)}\,|\,X_0=i\right)=\infty$. Így ellentmondásra jutottunk.

Kicsit heurisztikusabban, az alábbi bizonyítást is adhatjuk. Indirekt feltevésünk alapján léteznek olyan $T_i>0$, $i=0,\dots,M$ számok, hogy minden $i=0,1,\dots,M$ esetén várhatóan T_i idő elteltével a lánc már soha nem tér vissza az i állapotba. Így várhatóan $T:=\max\{T_0,T_1,\dots,T_M\}$ idő elteltével a lánc nem látogatna meg semmilyen állapotot sem, ez azonban ellentmondás, mert T idő után is lennie kell valahol, így legalább 1 állapot visszatérő.

Mivel előadáson beláttuk, hogy a visszatérőség osztálytulajdonság, a feladat első része alapján kapjuk, hogy egy véges állapotterű, irreducibilis homogén Markov-lánc esetén minden állapot visszatérő. □

2.16. Feladat. [Ross [7], Chapter 4, Example 3c] Legyen $\{X_n:n\in\mathbb{N}\}$ egy homogén Markov-lánc, melynek fázistere $\{0,1,2,3\}$ és egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P=\begin{array}{c}\\ 0\\1\\2\\3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}0&1&2&3\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&0&1/2&1/2\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}.$$

Határozzuk meg, hogy mely állapotok visszatérőek és mely állapotok átmenetiek!

Megoldás. Megmutatjuk, hogy minden állapot kölcsönösen elérhető minden állapotból, azaz a Markov-lánc irreducibilis. Az átmenetvalószínűségi mátrix alapján

$$\begin{aligned}&\underline{0\rightharpoonup 0}:\quad 0\rightharpoonup 2\rightharpoonup 1\rightharpoonup 0, && \underline{1\rightharpoonup 0}:\quad 1\rightharpoonup 0,\\ &\underline{0\rightharpoonup 1}:\quad 0\rightharpoonup 2\rightharpoonup 1, && \underline{1\rightharpoonup 1}:\quad 1\rightharpoonup 0\rightharpoonup 2\rightharpoonup 1,\\ &\underline{0\rightharpoonup 2}:\quad 0\rightharpoonup 2, && \underline{1\rightharpoonup 2}:\quad 1\rightharpoonup 0\rightharpoonup 2,\\ &\underline{0\rightharpoonup 3}:\quad 0\rightharpoonup 3, && \underline{1\rightharpoonup 3}:\quad 1\rightharpoonup 0\rightharpoonup 3.\end{aligned}$$

Felhasználva az eddigieket

$$
\begin{aligned}
&\underline{2 \rightharpoonup 0}: \quad 2 \rightharpoonup 1 \rightharpoonup 0, && \underline{3 \rightharpoonup 0}: \quad 3 \rightharpoonup 1 \rightharpoonup 0,\\
&\underline{2 \rightharpoonup 1}: \quad 2 \rightharpoonup 1, && \underline{3 \rightharpoonup 1}: \quad 3 \rightharpoonup 1,\\
&\underline{2 \rightharpoonup 2}: \quad 2 \rightharpoonup 1 \rightharpoonup 2, && \underline{3 \rightharpoonup 2}: \quad 3 \rightharpoonup 1 \rightharpoonup 2,\\
&\underline{2 \rightharpoonup 3}: \quad 2 \rightharpoonup 1 \rightharpoonup 3, && \underline{3 \rightharpoonup 3}: \quad 3 \rightharpoonup 1 \rightharpoonup 3.
\end{aligned}
$$

Így a Markov-lánc irreducibilis. Mivel a kérdéses Markov-lánc irreducibilis és az állapottér véges, a 2.15. Feladat alapján kapjuk, hogy minden állapot visszatérő.

Egyszerűbben is okoskodhatunk. Az átmenetvalószínűségi mátrix alapján $0 \rightharpoonup 2 \rightharpoonup 1 \rightharpoonup 0$ és $0 \rightharpoonup 3 \rightharpoonup 1 \rightharpoonup 0$. Így $\rightharpoonup$ tranzitivitása miatt minden állapot elérhető minden állapotból, azaz a Markov-lánc irreducibilis. □

2.17. Feladat. Egy játékos olyan játékot játszik, melynek minden egyes fordulójában 0.7 valószínűséggel 1 Forintot veszít, 0.1 valószínűséggel 1 Forintot nyer és 0.2 valószínűséggel 3 Forintot nyer. Feltételezzük, hogy a játék egymást követő fordulói egymástól függetlenek. Játékosunknak 0 Forintja van és addig játszhat, amíg vagyona vagy -6 Forint nem lesz vagy nagyobb vagy egyenlő nem lesz, mint 6 Forint. Legyen $\{X_n : n \geqslant 1\}$ a játékosunk vagyona az n. játék után.

(i) Mutassuk meg, hogy $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc!

(ii) Határozzuk meg az átmenetvalószínűségi mátrixát és az osztályokat!

(iii) Mely osztályok visszatérőek, melyek nem?

(iv) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a játékos a végtelenségig játszik, azaz

$$P(-5 \leqslant X_n \leqslant 5, \ \forall\, n \in \mathbb{N}) =?$$

Megoldás.

(i) A játékos vagyona az n. játék után csak attól függ, hogy mennyi a vagyona az $(n-1)$. játék után és hogy az n. játék során mennyit nyer vagy veszít, így tényleg Markov-láncot kapunk.

(ii) és (iii) Ezen Markov-lánc fázistere $\{-6,-5,-4,\ldots,-1,0,1,\ldots,5,6,7,8\}$. A 7 és 8 is állapotok, mert a játékos addig játszhat, amíg vagyona el nem éri a -6-ot vagy nagyobb vagy egyenlő nem lesz, mint 6, így ha a vagyona 5, akkor a következő játékban 3-at nyerve lehet 8 a vagyona, ha pedig a vagyona 4 és a következő játékban 3-at nyer, úgy vagyona 7 lesz. Az átmenetvalószínűségek

$$
\begin{aligned}
p_{i,i-1} &= 0.7, && i = -5,\ldots,5,\\
p_{i,i+1} &= 0.1, && i = -5,\ldots,5,\\
p_{i,i+3} &= 0.2, && i = -5,\ldots,5,\\
p_{i,i} &= 1, && i = -6,6,7,8,
\end{aligned}
$$

(ugyanis, ha a vagyona $-6, 6, 7, 8$ akkor már nem játszik tovább). Abban az esetben, ha a 6 Forint feletti vagyon elkobzásra kerülne, akkor az állapottér $\{-6, -5, \dots, -1, 0, 1, \dots, 5, 6\}$ lenne és az átmenetvalószínűségek úgy módosulnának, hogy

$$\begin{aligned}
&p_{i,i-1} = 0.7, && i = -5, \dots, 5,\\
&p_{i,i} = 1, && i = -6, 6,\\
&p_{i,i+1} = 0.1, && i = -5, \dots, 3,\\
&p_{i,i+3} = 0.2, && i = -5, \dots, 3,\\
&p_{4,3} = 0.7, \ p_{4,5} = 0.1, \ p_{4,6} = 0.2, &&\\
&p_{5,4} = 0.7, \ p_{5,6} = 0.3. &&
\end{aligned}$$

Az osztályok a következők: $\{-6\}$ visszatérő, $\{-5, \dots, 5\}$ nem visszatérő, $\{6\}$, $\{7\}$, $\{8\}$ visszatérő.

(iv) Mivel

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\{-5 \leqslant X_n \leqslant 5\} = \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{m}\{-5 \leqslant X_n \leqslant 5\}$$

és

$$\bigcap_{n=1}^{m+1}\{-5 \leqslant X_n \leqslant 5\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{m}\{-5 \leqslant X_n \leqslant 5\}, \qquad m \in \mathbb{N},$$

a valószínűség folytonossága és monotonitása miatt

$$P(-5 \leqslant X_n \leqslant 5, \ \forall\, n \in \mathbb{N}) = \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{m}\{-5 \leqslant X_n \leqslant 5\}\right) \leqslant \limsup_{m\to\infty} P(-5 \leqslant X_m \leqslant 5).$$

A 2.8. Megjegyzés szerint, mivel a $-5, \dots, 5$ állapotok nem visszatérőek,

$$\lim_{m\to\infty} P(-5 \leqslant X_m \leqslant 5) = \sum_{i=-5}^{5} \lim_{m\to\infty} P(X_m = i) = 0,$$

és így $P(-5 \leqslant X_n \leqslant 5, \ \forall\, n \in \mathbb{N}) = 0.$ □

2.18. Feladat. Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy homogén Markov-lánc, melynek fázistere $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ és átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(i) A visszatérőségi kritériumot felhasználva határozzuk meg, hogy mely állapotok visszatérőek és mely állapotok átmenetiek!

(ii) A 2.10. Tételt felhasználva határozzuk meg, hogy mely állapotok visszatérőek és mely állapotok átmenetiek!

Megoldás. (i): Három osztály van $\{0,1\}$, $\{2,3\}$ és $\{4\}$. A visszatérőségi kritérium felhasználásával megmutatjuk, hogy az első két osztály visszatérő, a harmadik pedig átmeneti. Mivel a visszatérőség osztálytulajdonság, elég azt megmutatni, hogy 1 és 2 visszatérő állapot, míg 4 átmeneti állapot. Vizsgáljuk először az $\sum_{n=1}^{\infty} p_{1,1}^{(n)}$ összeget, azt kellene belátni, hogy ez $+\infty$. Látható, hogy

$$
\begin{aligned}
p_{1,1}^{(n)} &= P(X_n = 1 \,|\, X_0 = 1) \\
&= \sum_{i_1,\dots,i_{n-1}\in\{0,1,2,3,4\}} P(X_n = 1, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1 \,|\, X_0 = 1) \\
&= \sum_{i_1,\dots,i_{n-1}\in\{0,1,2,3,4\}} P(X_n = 1 \,|\, X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_{n-1} = i_{n-1} \,|\, X_{n-2} = i_{n-2}) \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots P(X_2 = i_2 \,|\, X_1 = i_1) P(X_1 = i_1 \,|\, X_0 = 1),
\end{aligned}
$$

ugyanis a Markov-tulajdonság miatt

$$
\begin{aligned}
&P(X_1 = i_1 \,|\, X_0 = 1) P(X_2 = i_2 \,|\, X_1 = i_1) \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots P(X_{n-1} = i_{n-1} \,|\, X_{n-2} = i_{n-2}) P(X_n = 1 \,|\, X_{n-1} = i_{n-1}) \\
&= \frac{P(X_1 = i_1, X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)} \frac{P(X_2 = i_2, X_1 = i_1, X_0 = 1)}{P(X_1 = i_1, X_0 = 1)} \cdots \\
&\quad \cdot \frac{P(X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = 1)}{P(X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = 1)} \frac{P(X_n = 1, X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = 1)}{P(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = 1)} \\
&= P(X_n = 1, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1 \,|\, X_0 = 1).
\end{aligned}
$$

Az átmenetvalószínűségi mátrix alapján csak akkor kapunk 0-tól különböző tagokat a fenti szummában, ha $i_1, \dots, i_{n-1} \in \{0,1\}$, és ilyenkor

$$
P(X_{j+1} = i_{j+1} \,|\, X_j = i_j) = \frac{1}{2},
$$

így

$$
p_{1,1}^{(n)} = 2^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}.
$$

(Ezt rögtön is megkaphatjuk, hiszen $\{0,1\}$ zárt osztály, és átmenetvalószínűségi mátrixa

$$
\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},
$$

így 1-ből 1-be $1/2$ valószínűséggel juthatunk el akármennyi rögzített számú lépés alatt.) Ezért

$$
\sum_{n=1}^{\infty} p_{1,1}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = +\infty,
$$

így 1 visszatérő a visszatérőségi kritérium alapján.

Az 2.15. Feladat alapján sokkal egyszerűbben is indokolható, hogy $\{0,1\}$ visszatérő osztály. Ugyanis mivel a $\{0,1\}$ fázistérhez és

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

átmenetvalószínűségi mátrixhoz tartozó Markov-lánc véges állapotterű és irreducibilis, így minden állapota visszatérő. Hasonlóan indokolható a $\{2,3\}$ osztály visszatérősége.

Megmutatjuk most, hogy a 4 állapot átmeneti. A visszatérőségi kritérium alapján elég azt megmutatni, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} p_{4,4}^{(n)} < +\infty$. Hasonlóan a korábbiakhoz adódik, hogy

$$\begin{aligned} p_{4,4}^{(n)} &= P(X_n = 4 \,|\, X_0 = 4) \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_{n-1}\in\{0,1,2,3,4\}} P(X_n = 4 \,|\, X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_{n-1} = i_{n-1} \,|\, X_{n-2} = i_{n-2}) \cdots \\ &\qquad\qquad \cdots P(X_2 = i_2 \,|\, X_1 = i_1) P(X_1 = i_1 \,|\, X_0 = 4). \end{aligned}$$

Az átmenetvalószínűségi mátrix alapján csak akkor kapunk 0-tól különböző tagokat a fenti szummában, ha $i_1 = \cdots = i_{n-1} = 4$ és ilyenkor

$$P(X_{j+1} = i_{j+1} \,|\, X_j = i_j) = \frac{1}{2},$$

így

$$p_{4,4}^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{4,4}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{1-1/2} = 1 < +\infty,$$

tehát a visszatérőségi kritérium alapján a 4 állapot átmeneti. Az, hogy a 4 állapot átmeneti a 2.11. Feladat második megoldásához hasonlóan is következik. Valóban, a 4 állapotból elérhető az 1 állapot, az 1 állapotból azonban nem érhető el a 4 állapot, ezért 4 lényegtelen állapot, és ezért átmeneti.

(ii): A 2.10. Tétel jelöléseit használva, legyen először $C := \{0,1\}$ és $j := 1$. Felhasználva, hogy $C \setminus \{j\} = \{0\}$, a (2.2) egyenletrendszer az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} y_0 &= \sum_{k\in C\setminus\{j\}} p_{0,k} y_k + p_{0,1} = p_{0,0} y_0 + p_{0,1}, \\ y_1 &= p_{1,0} y_0 + p_{1,1}. \end{aligned}$$

Felhasználva az átmenetvalószínűségi mátrixot, a fenti egyenletrendszer az

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{2}, \\ y_1 &= \frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

alakot ölti. Ennek egyetlen megoldása van: $y_0 = 1$ és $y_1 = 1$. Így $f^*_{0,1} = 1$ és $f^*_{1,1} = 1$, azaz a $\{0,1\}$ osztály visszatérő.

A $\{2,3\}$ osztály visszatérősége hasonlóan igazolható.

Legyen most $C := \{4\}$ és $j := 4$. Ekkor $C \setminus \{j\} = \emptyset$, és így a (2.2) egyenletrendszer az alábbi alakot ölti:

$$y_4 = p_{4,4} = \frac{1}{2}.$$

Így $f^*_{4,4} = \frac{1}{2} < 1$, azaz a $\{4\}$ osztály nem visszatérő. Jelen esetben azt, hogy $f^*_{44} = \frac{1}{2}$ egyszerűbben is megkaphatjuk, ugyanis az átmenetvalószínűségi mátrix alapján $f^{(1)}_{44} = p_{44} = \frac{1}{2}$ és $f^{(n)}_{44} = 0$, ha $n \geqslant 2$, így $f^*_{44} = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}_{44} = f^{(1)}_{44} = \frac{1}{2}$. □

2.19. Feladat. Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy homogén Markov-lánc, melynek fázistere $\{0,1,2,3,4\}$ és átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 1-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

ahol $0 < a < 1$, $0 < b < 1$.

(i) A visszatérőségi kritériumot felhasználva határozzuk meg, hogy mely állapotok visszatérőek és mely állapotok átmenetiek!

(ii) A 2.10. Tételt felhasználva határozzuk meg, hogy mely állapotok visszatérőek és mely állapotok átmenetiek!

Megoldás. **(i)** Három osztály van $\{0,1\}$, $\{2,3\}$ és $\{4\}$. A visszatérőségi kritérium felhasználásával megmutatjuk, hogy az első két osztály visszatérő, a harmadik pedig átmeneti. Először megmutatjuk, hogy a 0 állapot visszatérő. Ehhez azt kell igazolni, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}_{0,0} = +\infty$. Mivel $P^{(n)} = P^n$, kapjuk, hogy $p^{(n)}_{0,0} = (P^n)_{0,0}$. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a

$$Q = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

jelöléssel

$$Q^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}.$$

Az $n = 1$-re vonatkozó állítás triviális, hiszen

$$Q^1 = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{1-a-b}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy igaz az összefüggés $1, 2, \ldots, n$-re, és mutassuk meg, hogy ekkor igaz $n+1$-re is. Az indukciós feltevés alapján

$$\begin{aligned}
Q^{n+1} = Q^n Q &= \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a-a^2-ab & a^2-a+ab \\ -b+ab+b^2 & -ab+b-b^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^{n+1}}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Így

$$p_{0,0}^{(n)} = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}(1-a-b)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Mivel $|1-a-b| < 1$, kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a+b}(1-a-b)^n = \frac{a}{a+b}\frac{1-a-b}{1-1+a+b} < +\infty.$$

Ezért $\sum_{n=1}^{\infty} p_{0,0}^{(n)} = +\infty$, a $p_{0,0}^{(n)}$ képletében szereplő $b/(a+b)$ konstans tag miatt. Így 0 visszatérő állapot.

Az alábbiakban egy másik módszert is mutatunk Q^n meghatározására. Kiszámoljuk először Q sajátértékeit

$$\begin{aligned}
\det(Q - \lambda I_{2\times 2}) &= \det\begin{pmatrix} 1-a-\lambda & a \\ b & 1-b-\lambda \end{pmatrix} = (1-a-\lambda)(1-b-\lambda) - ab \\
&= 1-b-\lambda-a+ab+a\lambda-\lambda+\lambda b+\lambda^2-ab = \lambda^2+(a+b-2)\lambda-a-b+1.
\end{aligned}$$

Ezen másodfokú egyenlet két gyöke

$$\lambda_{1,2} = \frac{2-a-b \pm \sqrt{(a+b-2)^2 - 4(1-a-b)}}{2} = \frac{2-a-b \pm \sqrt{(a+b)^2}}{2},$$

így

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 1-a-b.$$

A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó balsajátvektort keresünk $(x_1 \; x_2)$ alakban. Annak kell fennállnia, hogy

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Ezen egyenletrendszer

$$\begin{aligned} x_1 &= (1-a)x_1 + bx_2 \\ x_2 &= ax_1 + (1-b)x_2, \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} -ax_1 + bx_2 &= 0 \\ ax_1 - bx_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ennek egy megoldása $x_1 = 1$, $x_2 = a/b$. Így (b, a) egy, az 1 sajátértékhez tartozó balsajátvektor. Hasonlóan, a $\lambda_2 = 1-a-b$ sajátértékhez tartozó balsajátvektort keresünk $(x_1\ x_2)$ alakban. Annak kell fennállnia, hogy

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} = (1-a-b) \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Ezen egyenletrendszer

$$\begin{aligned} (1-a-b)x_1 &= (1-a)x_1 + bx_2 \\ (1-a-b)x_2 &= ax_1 + (1-b)x_2, \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} bx_1 + bx_2 &= 0 \\ ax_1 + ax_2 &= 0. \end{aligned}$$

Így $(1, -1)$ egy, az $(1-a-b)$ sajátértékhez tartozó balsajátvektor. Tehát a Q mátrix sajátérték-felbontása:

$$Q = \begin{pmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Felhívjuk a figyelmet, hogy a fentiekben a

$$\begin{pmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrix nem ortogonális. Ezért

$$\begin{aligned} Q^n &= \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-a-b)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-a-b} \begin{pmatrix} -1 & -a \\ -1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ (1-a-b)^n & -(1-a-b)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b + a(1-a-b)^n & a - a(1-a-b)^n \\ b - b(1-a-b)^n & a + b(1-a-b)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Így

$$p_{0,0}^{(n)} = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}(1-a-b)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Az alábbiakban egy harmadik módszert is mutatunk Q^n meghatározására. Jelölje a Q mátrix sajátértékeit λ_1 és λ_2. A második módszer alapján $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 1-a-b$, tehát $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Ismert, hogy léteznek olyan (2×2)-es A_1 és A_2 mátrixok, hogy tetszőleges olyan

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad z \in \mathbb{C},$$

komplex együtthatós hatványsor esetén, melynek konvergenciasugara nagyobb, mint a Q mátrix $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = 1$ spektrálsugara, fennáll, hogy $f(Q) = f(\lambda_1)A_1 + f(\lambda_2)A_2$. Az

A_1 és A_2 mátrixokat meg lehet határozni ún. ,,próbafüggvények" választásával: legyen $f_1(z) = z - \lambda_1$, $z \in \mathbb{C}$, és $f_2(z) = z - \lambda_2$, $z \in \mathbb{C}$. Ekkor

$$Q - \lambda_1 I_{2\times 2} = (\lambda_2 - \lambda_1) A_2,$$
$$Q - \lambda_2 I_{2\times 2} = (\lambda_1 - \lambda_2) A_1,$$

ahol $I_{2\times 2}$ a (2×2)-es egységmátrixot jelöli. Így

$$A_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(Q - \lambda_2 I_{2\times 2}), \qquad A_2 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 I_{2\times 2} - Q).$$

Az $f(z) = z^n$, $z \in \mathbb{C}$, választással kapjuk hogy

$$Q^n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2}(Q - \lambda_2 I_{2\times 2}) + \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 I_{2\times 2} - Q) = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}.$$

Látjuk, hogy a fenti módszerekkel megkapjuk az $p_{0,1}^{(n)}$, $p_{1,0}^{(n)}$ és $p_{1,1}^{(n)}$ n-lépéses átmenet-valószínűségeket is.

Azt, hogy a $\{2, 3\}$ osztály visszatérő és, hogy a $\{4\}$ osztály átmeneti ugyanúgy indokolhatjuk, mint a 2.18. Feladat (i) részének megoldásában.

(ii) A 2.10. Tétel jelöléseit használva, legyen először $C := \{0, 1\}$ és $j := 1$. Felhasználva, hogy $C \setminus \{j\} = \{0\}$, a (2.2) egyenletrendszer az alábbi alakot ölti:

$$y_0 = \sum_{k \in C\setminus\{j\}} p_{0,k} y_k + p_{0,1} = p_{0,0} y_0 + p_{0,1},$$
$$y_1 = p_{1,0} y_0 + p_{1,1}.$$

Felhasználva az átmenetvalószínűségi mátrixot, a fenti egyenletrendszer az

$$y_0 = (1-a) y_0 + a,$$
$$y_1 = b y_0 + 1 - b$$

alakot ölti. Ennek egyetlen megoldása van: $y_0 = 1$ és $y_1 = 1$. Így $f_{0,1}^* = 1$ és $f_{1,1}^* = 1$, azaz a $\{0, 1\}$ osztály visszatérő.

A $\{2, 3\}$ osztály visszatérősége hasonlóan igazolható.

Legyen most $C := \{4\}$ és $j := 4$. Ekkor $C \setminus \{j\} = \emptyset$, és így a (2.2) egyenletrendszer az alábbi alakot ölti:

$$y_4 = p_{4,4} = \frac{1}{2}.$$

Így $f_{4,4}^* = \frac{1}{2} < 1$, azaz a $\{4\}$ osztály nem visszatérő. □

2.20. Feladat. Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy homogén Markov-lánc, melynek fázistere $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ és átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg ezen Markov-lánc osztályait, mely állapotok visszatérőek és mely állapotok átmenetiek! Van-e a láncnak elnyelő állapota?

Megoldás. A 2.19. Feladat megoldása alapján az $\{1,4\}$ és $\{3,5\}$ osztályok visszatérőek, a $\{2\}$ osztály átmeneti. A Markov-láncnak nincs elnyelő állapota. Valóban, az átmenetvalószínűségi mátrix írható a következő alakban is:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

mely a 2.19. Feladatban megadott alakú $a = 0.6$ és $b = 0.5$ választásokkal. □

2.21. Megjegyzés. A számegyenesen a véletlen bolyongás visszatérőségének vizsgálatánál fontos szerepet játszik az a tény, hogy

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

ahol $a_n \sim b_n$ $(a_n > 0, b_n > 0, n \in \mathbb{N})$ azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$. Ez az ún. **Stirling-formula.** Egészen pontosan a következő igaz

$$n! = n^n \sqrt{2\pi n} \exp\left\{-n + \frac{\theta_n}{12n}\right\},$$

ahol $0 < \theta_n < 1$. Ha $a_n \sim b_n$ és $c_n \sim d_n$, $(a_n > 0, b_n > 0, c_n > 0, d_n > 0, n \in \mathbb{N})$, akkor $a_n c_n \sim b_n d_n$ és $a_n/c_n \sim b_n/d_n$. Ugyanis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n c_n}{b_n d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} = 1,$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n/c_n}{b_n/d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{c_n} = 1.$$

Megmutatjuk, hogy ha $a_n \sim b_n$, akkor

$$(2.3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \qquad \text{akkor és csak akkor, ha} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty.$$

Tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$. Elég azt megmutatni, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$-hoz $\exists$ $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall$ $n > m \geqslant N(\varepsilon)$-ra

$$\sum_{k=m+1}^{n} b_k < \varepsilon.$$

Mivel $b_n/a_n \to 1$, ezért $\delta := 1 > 0$-hoz $\exists$ $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geqslant N_1$ esetén $|b_n/a_n - 1| < \delta$. Ekkor $n > m \geqslant N_1$ esetén

$$\sum_{k=m+1}^{n} b_k = \sum_{k=m+1}^{n} a_k \frac{b_k}{a_k} \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} 2a_k.$$

Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, kapjuk, hogy $\varepsilon/2 > 0$-hoz létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > m \geqslant N_2$ esetén $\sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon/2$. Ekkor $N(\varepsilon) := \max\{N_1, N_2\}$ megfelelő választás. Mivel $a_n \sim b_n$ szimmetrikus, adódik a visszafele irány is.

Egyszerűbben is indokolhatunk. Valóban,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{N_1} b_n + \sum_{n=N_1+1}^{\infty} a_n \frac{b_n}{a_n} \leqslant \sum_{n=1}^{N_1} b_n + (1+\delta) \sum_{n=N_1+1}^{\infty} a_n \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N_1} b_n + (1+\delta) \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.\end{aligned}$$

□

2.22. Megjegyzés. Az alábbiakban arra adunk egy heurisztikus, valószínűségszámítást használó bizonyítást, hogy

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, $\lambda = 1$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változók. Legyen továbbá $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $S_0 = 0$. Ekkor $\mathbb{E}S_n = n\mathbb{E}X_1 = n$ és $D^2 S_n = nD^2 X_1 = n$. Mivel S_n egész értékű

$$P(S_n = n) = P(n - 1 < S_n \leqslant n) = P(-\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0).$$

A központi határeloszlás tétel szerint elég nagy n-re

$$P(S_n = n) \sim P(-\frac{1}{\sqrt{n}} < \mathcal{N}(0,1) \leqslant 0) = \int_{-1/\sqrt{n}}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x.$$

Elég nagy n-re az $[-\frac{1}{\sqrt{n}}, 0)$ intervallumon az integrandust $1/\sqrt{2\pi}$-vel közelítve kapjuk, hogy

$$P(S_n = n) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Felhasználva, hogy S_n Poisson eloszlású n paraméterrel kapjuk, hogy

$$P(S_n = n) = \frac{n^n}{n!} e^{-n}.$$

Így elég nagy n-re

$$\frac{n^n}{n!} e^{-n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

amiből
$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$
□

2.23. Feladat. **(Véletlen bolyongás a számegyenesen)** Tekintsük azt az $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ homogén Markov-láncot, melynek fázistere $\mathbb{Z}$ és az egylépéses átmenetvalószínűségek
$$p_{i,i+1} = p, \qquad p_{i,i-1} = 1 - p, \qquad \forall\, i \in \mathbb{Z},$$
ahol $p \in (0,1)$. Mutassuk meg, hogy $p \neq \frac{1}{2}$ esetén a véletlen bolyongás a számegyenesen nem visszatérő, míg $p = \frac{1}{2}$ esetén visszatérő.

Megoldás. Ez a Markov-lánc irreducibilis, hiszen minden állapot elérhető minden állapotból. Így, mivel a visszatérőség osztálytulajdonság, vagy minden állapot visszatérő vagy minden állapot átmeneti. Az alábbiakban azt vizsgáljuk meg, hogy a 0 állapot visszatérő-e vagy sem. A visszatérőségi kritérium alapján

$$\begin{aligned} &0 \text{ visszatérő} \iff \sum_{n=0}^{\infty} p_{0,0}^{(n)} = +\infty, \\ &0 \text{ nem visszatérő} \iff \sum_{n=0}^{\infty} p_{0,0}^{(n)} < +\infty. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ha n páratlan, akkor $p_{0,0}^{(n)} = 0$, mert 0-ból kiindulva csak páros számú lépésben érhetünk vissza 0-ba. Így
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{0,0}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{0,0}^{(2n)}.$$
Ha a lánc 0-ból indulva $2n$ lépés alatt tér vissza 0-ba, akkor n lépést kell tennie jobbra, illetve n lépést balra. Összesen $\binom{2n}{n}$ darab fenti tulajdonságú $2n$-hosszúságú út létezik. Mivel tetszőleges, egy a fenti tulajdonságú út valószínűsége $p^n(1-p)^n$, kapjuk, hogy
$$p_{0,0}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Mivel $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$, a Stirling-formula alapján,
$$\binom{2n}{n} \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n2\pi}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n2\pi}\, \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n2\pi}} = \frac{(2n)^{2n+1/2}}{n^{2n+1}\sqrt{2\pi}} = \frac{2^{2n+1/2}}{\sqrt{2n\pi}} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}},$$
és így
$$p_{0,0}^{(2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4p(1-p))^n.$$
Az (2.3) összefüggés és (2.4) alapján,
$$\begin{aligned} &0 \text{ visszatérő} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4p(1-p))^n = +\infty, \\ &0 \text{ nem visszatérő} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4p(1-p))^n < +\infty. \end{aligned}$$

Ha $p = \frac{1}{2}$, akkor
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4p(1-p))^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty,$$
így ez esetben 0 visszatérő állapot.

Ha $p \neq \frac{1}{2}$, akkor
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}}(4p(1-p))^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4p(1-p))^n} = 4p(1-p) \limsup_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 4p(1-p) < 1,$$
hiszen $4p(1-p) \leqslant 1$ és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $p = \frac{1}{2}$. Így a D'-Alembert-féle hányados kritérium alapján
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4p(1-p))^n < \infty,$$
és ezért 0 nem visszatérő. □

2.24. Feladat. [Ross [7], Chapter 4, Problem 11] Legyen $\{X_n : n \geqslant 0\}$ a következő véletlen bolyongás $\mathbb{Z}$-n: $X_0 = 0$ és minden $n = 0, 1, 2, \ldots$ és $i \in \mathbb{Z}$ esetén
$$P(X_{n+1} = i+1 \,|\, X_n = i) = p = 1 - P(X_{n+1} = i-1 \,|\, X_n = i).$$
A nagy számok erős törvényének felhasználásával mutassuk meg, hogy $p \neq 1/2$ esetén a fenti véletlen bolyongás nem visszatérő.

Megoldás. Legyen $n \geqslant 1$ esetén $Y_n := X_n - X_{n-1}$. A véletlen bolyongás definíciója miatt $Y_1, Y_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók és $P(Y_1 = 1) = p$ és $P(Y_1 = -1) = 1 - p$. Így a nagy számok erős törvénye szerint
$$P\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} = \mathbb{E}Y_1\Big) = 1,$$
ahol
$$\mathbb{E}Y_1 = 1 \cdot p + (-1)(1-p) = 2p - 1.$$
Ha $p > 1/2$, akkor $\mathbb{E}Y_1 > 0$. Megmutatjuk, hogy
$$P\Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n Y_i = +\infty\Big) = 1. \tag{2.5}$$
Legyen $M > 0$ rögzített. Mivel $\sum_{i=1}^n Y_i/n \to \mathbb{E}Y_1 > 0$ 1-valószínűséggel, ezért P-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén létezik $n_1(\omega) \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geqslant n_1(\omega)$ esetén
$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i(\omega)}{n} > \frac{\mathbb{E}Y_1}{2},$$

azaz
$$\sum_{i=1}^{n} Y_i(\omega) > n\frac{\mathbb{E}Y_1}{2}.$$
Legyen $n_2 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n \geqslant n_2$-re $n\mathbb{E}Y_1/2 > M$. Így, ha $n \geqslant \max\{n_1(\omega), n_2\}$, akkor $\sum_{i=1}^{n} Y_i(\omega) > M$, azaz fennáll (2.5). A
$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$$
átalakítást elvégezve közvetlenül is megkaphatjuk (2.5)-et.

Megmutatjuk most, hogy 0 nem visszatérő állapot. Az (2.5) összefüggés alapján $P(\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty) = 1$. Ezért P-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén létezik olyan $n(\omega) \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geqslant n(\omega)$ esetén $X_n(\omega) \geqslant 1$. Ezért a 0 állapot 1 valószínűséggel csak véges sokszor tér vissza. Abban az esetben, ha a 0 állapot visszatérő volna, úgy a Markov-lánc 1 valószínűséggel végtelen sokszor térne vissza 0-ba, azaz ellentmondásra jutnánk. Ezért 0 nem visszatérő állapot. Mivel a visszatérőség osztálytulajdonság kapjuk, hogy a Markov-lánc nem visszatérő.

Ha $p < 1/2$, akkor $\mathbb{E}Y_1 < 0$, így
$$P\Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Y_i = -\infty\Big) = 1,$$
és hasonló a befejezés. □

2.25. Feladat. Legyen $\{X_n : n \geqslant 0\}$ a szimmetrikus véletlen bolyongás $\mathbb{Z}$-n: $X_0 = 0$ és minden $n = 0, 1, 2, \ldots$ és $i \in \mathbb{Z}$ esetén
$$P(X_{n+1} = i + 1 \,|\, X_n = i) = P(X_{n+1} = i - 1 \,|\, X_n = i) = \frac{1}{2}.$$
A 2.10. Tételt felhasználva mutassuk meg, hogy minden állapot visszatérő!

Megoldás. Mivel az egész állapottér egyetlen osztályt alkot elég a 0 állapot visszatérőségét megmutatni. A 2.10. Tétel jelöléseit használva, legyen $C := \mathbb{Z}$ és $j := 0$. Az (2.2) egyenletrendszer az alábbi alakot ölti:
$$y_i = p_{i,i-1}y_{i-1} + p_{i,i+1}y_{i+1} + p_{i,0} = \frac{1}{2}y_{i-1} + \frac{1}{2}y_{i+1}, \quad i \notin \{1, -1\},$$
$$y_1 = \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}, \tag{2.6}$$
$$y_{-1} = \frac{1}{2}y_{-2} + \frac{1}{2}. \tag{2.7}$$
Tudjuk, hogy a 2.10. Tétel alapján ezen egyenletrendszer minimális nemnegatív megoldása $f^*_{i,0}$, $i \in \mathbb{Z}$. Ha $i \geqslant 2$ vagy $i \leqslant -2$, akkor
$$\frac{1}{2}y_i + \frac{1}{2}y_i = y_i = \frac{1}{2}y_{i-1} + \frac{1}{2}y_{i+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y_{i+1} - y_i = y_i - y_{i-1}.$$

Ezért

$$\begin{aligned} y_i &= (y_i - y_{i-1}) + (y_{i-1} - y_{i-2}) + (y_{i-2} - y_{i-3}) + \cdots + (y_2 - y_1) + y_1 \\ &= (i-1)(y_2 - y_1) + y_1, \qquad i \geqslant 2, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} y_i &= (y_i - y_{i+1}) + (y_{i+1} - y_{i+2}) + (y_{i+2} - y_{i+3}) + \cdots + (y_{-2} - y_{-1}) + y_{-1} \\ &= (-i-1)(y_{-2} - y_{-1}) + y_{-1}, \qquad i \leqslant -2. \end{aligned}$$

Ha $y_2 - y_1 \neq 0$, úgy $\lim_{i\to\infty} y_i \in \{-\infty, \infty\}$, és így létezik olyan $i_0 \in \mathbb{N}$, hogy tetszőleges $i \geqslant i_0$ esetén $|y_i| > 1$. Mivel a minimális nemnegatív megoldás szükségképpen olyan, hogy felülről korlátos 1-gyel (hiszen valószínűségekről van szó), kapjuk, hogy $y_2 = y_1$. Hasonlóan belátható, hogy $y_{-2} = y_{-1}$. Felhasználva (2.6) és (2.7)-t kapjuk, hogy

$$y_1 = y_2 = 1, \qquad y_{-1} = y_{-2} = 1.$$

Így az $i = 0$-ra vonatkozó egyenlet alapján

$$y_0 = \frac{1}{2} y_{-1} + \frac{1}{2} y_1 = 1,$$

és ezért $y_0 = f^*_{0,0} = 1$, azaz a 0 állapot visszatérő. A fenti levezetés azt is mutatja, hogy a szóban forgó egyenletrendszer minimális nemnegatív megoldása $y_i = 1, i \in \mathbb{Z}$, azaz $f^*_{i,0} = 1$, $i \in \mathbb{Z}$. □

2.26. Feladat. (Szimmetrikus véletlen bolyongás a síkon) Tekintsük azt az $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ homogén Markov-láncot, melynek fázistere $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ és az egylépéses átmenetvalószínűségek

$$p_{(i,j),(i+1,j)} = p_{(i,j),(i-1,j)} = p_{(i,j),(i,j+1)} = p_{(i,j),(i,j-1)} = \frac{1}{4}.$$

(Azaz egy egész koordinátájú pontból valamelyik koordináta-tengellyel párhuzamosan haladva annak mind a 4 lehetséges egész koordinátájú szomszédjába $1/4$ valószínűséggel juthatunk.) Mutassuk meg, hogy a szóban forgó Markov-lánc visszatérő.

Megoldás. Ez a Markov-lánc irreducibilis, hiszen minden állapot elérhető minden állapotból. Így, mivel a visszatérőség osztálytulajdonság, vagy minden állapot visszatérő vagy minden állapot átmeneti. Megmutatjuk, hogy a $(0,0)$ állapot visszatérő, így kapjuk azt is, hogy minden állapot visszatérő. A visszatérőségi kritérium alapján ehhez elég azt ellenőrizni, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}_{(0,0),(0,0)} = +\infty.$$

Ha n páratlan, akkor $p^{(n)}_{(0,0),(0,0)} = 0$, mert $(0,0)$-ból kiindulva csak páros számú lépésben érhetünk vissza $(0,0)$-ba. Így

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}_{(0,0),(0,0)} = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(2n)}_{(0,0),(0,0)}.$$

Ha a lánc $(0,0)$-ból indulva $2n$ lépés alatt tér vissza $(0,0)$-ba, és x lépést tesz jobbra, y lépést felfelé, akkor x lépést kell tennie balra is, és y lépést kell tennie lefelé is útja során, ahol $0 \leqslant x, y \leqslant n$. Mivel összesen $2n$ lépést tesz, kapjuk, hogy $2x + 2y = 2n$, és így $y = n - x$. Összesen

$$\frac{(2n)!}{x!x!(n-x)!(n-x)!}$$

darab fenti tulajdonságú $2n$-hosszúságú út létezik. Gondoljunk arra, hogy hányféleképpen lehet x darab J (jobbra) betűt, x darab B (balra) betűt, $n-x$ darab F (felfelé) betűt és $n-x$ darab L (lefelé) betűt sorbarakni. Mivel mind a négy fajta lehetséges lépés valószínűsége $1/4$, adódik, hogy egy fenti tulajdonságú út valószínűsége (multinomiális eloszlás)

$$\frac{(2n)!}{x!x!(n-x)!(n-x)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}.$$

Mivel $0 \leqslant x \leqslant n$, így

$$\begin{aligned} p^{(2n)}_{(0,0),(0,0)} &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{i!i!(n-i)!(n-i)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{n!n!}\binom{n}{i}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \\ &= \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\binom{2n}{n}\binom{2n}{n}, \end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben azt használtuk fel, hogy

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}.$$

Ez pedig azért igaz, mert mindkét oldal felfogható egy $2n$ tagú (n fiút és n lányt tartalmazó) társaság n tagú résztársaságainak összes számaként. Mivel $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$, a Stirling-formula alapján,

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n2\pi}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{n2\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{n2\pi}} = \frac{(2n)^{2n+1/2}}{n^{2n+1}\sqrt{2\pi}} = \frac{2^{2n+1/2}}{\sqrt{2n\pi}} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

Így az előző levezetés alapján

$$p^{(2n)}_{(0,0),(0,0)} \sim \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\left(\frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}\right)^2 = \frac{1}{\pi n}.$$

Az (2.3) összefüggés alapján, mivel $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = +\infty$, kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(2n)}_{(0,0),(0,0)} = +\infty,$$

azaz $(0,0)$ visszatérő állapot. Ezért minden állapot visszatérő állapot. □

Megjegyezzük, hogy Pólya György tétele alapján a szimmetrikus véletlen bolyongás $d = 1$ és $d = 2$ dimenzióban visszatérő, viszont $d \geqslant 3$ dimenzióban nem visszatérő, azaz átmeneti (tranziens).

2.27. Feladat. Tekintsünk egy részecskét, mely a sík nemnegatív egész koordinátájú pontjain bolyong oly módon, hogy a $(0,0)$-ból kiindulva minden lépésben vagy felfelé vagy jobbra mozdul el egy egységet a koordináta tengelyekkel párhuzamosan a két lehetőség közül $1/2$-$1/2$ valószínűséggel választva. Feltételezzük, hogy az egymást követő lépések függetlenek. A részecske addig folytatja a bolyongását míg a feladat végén levő ábrán látható $\bigcirc$-el jelölt pontok valamelyikét el nem éri, és utána ott marad.

Például, ha 7 lépést tesz felfelé, akkor A-ba jut, így ott is marad. Abban az esetben, ha 5 lépést tesz jobbra, majd 6 lépést felfelé, úgy C-be jut és ott is marad. (C-be természetesen másképpen is eljuthat, például 1 lépés felfelé, 5 lépés jobbra, 5 lépés felfelé.)

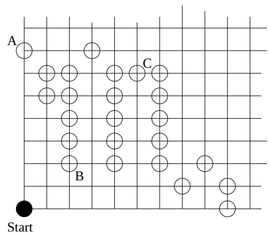
(i) Mi a valószínűsége, hogy a részecske A-ban fejezi be bolyongását?

(ii) Mi a valószínűsége, hogy a részecske B-ben fejezi be bolyongását?

(iii) Mi a valószínűsége, hogy a részecske C-ben fejezi be bolyongását?

(iv) Jelölje X_n a részecske helyzetét az n-edik lépés után. Markov-lánc-e $\{X_n : n \geqslant 1\}$? Ha igen, melyek a visszatérő és melyek a nem visszatérő osztályok? Melyek a lényeges és lényegtelen osztályok?

(v) A $\bigcirc$-el jelölt pontok elhelyezéséből nyilvánvaló, hogy a részecske 1 valószínűséggel valamelyik pontban megáll, azaz befejezi bolyongását. Jelölje U az ehhez szükséges lépésekből azok számát, mikor felfelé lép, R pedig azok számát, mikor jobbra lép (az utolsó lépést is számoljuk). Mutassuk meg, hogy $\mathbb{E}U = \mathbb{E}R$!



Megoldás.

(i) Ahhoz, hogy a részecske $(0,0)$-ból indulva $A = (0,7)$-ben fejezze be bolyongását egymást követően 7 lépést kell felfelé tennie, ennek a valószínűsége $(1/2)^7 = 1/128$.

(ii) Ahhoz, hogy a részecske $(0,0)$-ból indulva $B = (2,2)$-ben fejezze be bolyongását összesen 2-t kell jobbra és 2-t kell felfelé lépnie, és ezen lépések sorrendje tetszőleges lehet az elrendezés miatt. Mivel szóban forgó lépések sorrendje tetszőleges lehet és bármely 4 egymást követő lépés valószínűsége $(1/2)^4$, a keresett valószínűség

$$\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}.$$

(iii) Ahhoz, hogy a részecske $(0,0)$-ból indulva $C = (5,6)$-ban fejezze be bolyongását, el kell jutnia az $(5,1)$ pontba oly módon, hogy az ehhez szükséges első 6 lépésből pontosan 1-nek kell felfelé lépésnek lennie, majd ezen 6 lépés után 5-öt kell egymás után felfelé lépnie. (Ez a $\bigcirc$-el jelölt pontok elhelyezkedéséből következik.) Így a keresett valószínűség

$$\binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{2^{11}},$$

mivel minden lépés valószínűsége $1/2$.

(iv) Igen $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc, mert az, hogy a következő lépésben hol lesz a részecske csak attól függ, hogy most hol van. A $\bigcirc$-el jelölt pontokból álló egyelemű halmazok visszatérő (rekurrens) osztályok. Mivel a $\bigcirc$-el jelölt pontok elnyelő állapotok, minden ilyen pont (állapot) első visszatérési ideje egy valószínűséggel 1, és így az első visszatérési idő várható értéke is 1, ami véges. Ezért a $\bigcirc$-el jelölt pontokból álló egyelemű halmazok pozitív rekurrens állapotok. Az össszes többi $(0,0)$-ból elérhető pontból (azaz nem $\bigcirc$-el jelölt), illetve a $(0,0)$-ból álló egyelemű halmazok nem visszatérő osztályok. Így minden állapot egyetlen osztályt alkot. A $\bigcirc$-el jelölt állapotok lényegesek, a nem $\bigcirc$-el jelöltek nem lényegesek.

(v) Feledkezzünk el először a $\bigcirc$-el jelölt pontokról és tekintsük a feladatban definiált bolyongást a nemnegatív síknegyed egész koordinátájú pontjain. Jelölje U_n az első n lépésben a felfelé lépések számát, R_n pedig a jobbra lépések számát. ($R_0 = U_0 := 0$.) Legyen $Y_n := U_n - R_n$, $n \geqslant 0$. Megmutatjuk, hogy $\{Y_n : n \geqslant 0\}$ martingál az $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_u, 0 \leqslant u \leqslant n)$, $n \geqslant 0$ filtrációra nézve. Ekkor Y_n $\mathcal{F}_n$-mérhető és a konstrukció alapján nyilván $|Y_n| \leqslant 2n$, így $\mathbb{E}|Y_n| < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Továbbá,

$$Y_{n+1} = U_{n+1} - R_{n+1} = U_n + \mathbb{1}_{\{X_{n+1}-X_n=(0,1)\}} - (U_n + \mathbb{1}_{\{X_{n+1}-X_n=(1,0)\}}) = Y_n + Z,$$

ahol $Z := \mathbb{1}_{\{X_{n+1}-X_n=(0,1)\}} - \mathbb{1}_{\{X_{n+1}-X_n=(1,0)\}}$. Ekkor

$$P(Z = 1) = P(Z = -1) = \frac{1}{2},$$

és Z független $\mathcal{F}_n$-től. Ezért

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Y_n + Z \,|\, \mathcal{F}_n) = Y_n + \mathbb{E}(Z \,|\, \mathcal{F}_n) = Y_n + \mathbb{E}Z = Y_n.$$

Így $\{Y_n : n \geqslant 0\}$ martingál az $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_u, 0 \leqslant u \leqslant n)$, $n \geqslant 0$, filtrációra nézve. Helyezzük most vissza a $\bigcirc$-el jelölt pontokat. Jelölje T a részecske megállásának időpontját (azaz az első $\bigcirc$-el jelölt pontba való eljutásának időpontját). Ekkor T korlátos megállítási időpont $\{Y_n : n \geqslant 0\}$-ra nézve, ugyanis az elrendezés alapján $T \leqslant U + R \leqslant 7 + 9 = 16$ és tetszőleges $n \in \{0, 1, \dots, 16\}$ esetén $\{T \leqslant n\} \in \sigma(Y_0, \dots, Y_n)$. Ez utóbbi azért teljesül, mert $\sigma(Y_0, \dots, Y_n) = \sigma(Y_1, Y_2 - Y_1, \dots, Y_n - Y_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, és $(Y_1, Y_2 - Y_1, \dots, Y_n - Y_{n-1})$ egyértelműen megadja a részecske mozgását az első n lépés során. Így a martingálokra vonatkozó szabad megállás tétele alapján $\mathbb{E}Y_T = \mathbb{E}Y_0 = 0$. Mivel $\mathbb{E}Y_T = \mathbb{E}U - \mathbb{E}R$, kapjuk, hogy $\mathbb{E}U = \mathbb{E}R$. $\square$

3. Frobenius–Perron tétel

3.1. Tétel. (Frobenius–Perron) *Legyen P egy véges állapotterű, irreducibilis, d-periódusú Markov-lánc átmenetvalószínűségi mátrixa. Jelölje N a szóban forgó Markov-lánc állapotainak számát. Ekkor*

(i) $\lambda_1 = 1$ *sajátértéke P-nek,*

(ii) *a d-edik komplex egységgyökök, azaz $\lambda_1 = \omega^0$, $\lambda_2 = \omega^1, \ldots, \lambda_d = \omega^{d-1}$, ahol $\omega = \exp((2\pi i)/d)$, sajátértékei P-nek (itt i az imaginárius egységet jelöli),*

(iii) *a többi $\lambda_{d+1}, \ldots, \lambda_N$ sajátértéke P-nek eleget tesz a $|\lambda_j| < 1$, $j = d+1, \ldots, N$ feltételnek.*

Ha a $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ sajátértékek különbözőek, akkor jól ismert, hogy létezik olyan B $(N \times N)$-es mátrix, melyre $P = B^{-1}\Lambda B$, ahol

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

Ezért

$$P^n = (B^{-1}\Lambda B)^n = B^{-1}\Lambda^n B = B^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N^n \end{pmatrix} B.$$

(Itt B sorai P bal-sajátvektorai $xP = \lambda x$.)

A Frobenius–Perron tétel alapján vizsgálhatjuk a $\lim_{n\to\infty} P^n$ határértéket. Abban az esetben például, ha a lánc aperiódikus (azaz $d = 1$) és a $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ sajátértékek különbözőek, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P^n = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} B,$$

ugyanis $\lambda_1 = 1$ és $|\lambda_j| < 1$, $j = 2, \ldots, N$, így $\lim_{n\to\infty} \lambda_j^n = 0$, $j = 2, \ldots, N$. Ha P sajátértékei nem mind különbözőek, de P diagonalizálható, nyilván akkor is használható a fenti módszer. Általában, azaz ha P nem feltétlen diagonalizálható, akkor az ún. Jordan-féle normál felbontást használhatjuk. Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a P különböző sajátértékei és jelölje k_i a λ_i sajátérték multiplicitását, $i = 1, \ldots, m$. Legyen továbbá minden

$i = 1, \ldots, m$ esetén J_i a következő $(k_i \times k_i)$-méretű mátrix

$$J_i := \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Azaz J_i főátlójában λ_i-k állnak, a főátló felett egyesek, mindenhol máshol nullák. Ekkor létezik olyan B $(N \times N)$-es mátrix, melyre

$$P = B^{-1} M B,$$

ahol

$$M = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & J_m \end{pmatrix}.$$

Így $P^n = B^{-1} M^n B$, ahol M^n-re elég egyszerű formula adható. Felhasználva, hogy

$$M^n = \begin{pmatrix} J_1^n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & J_3^n & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & J_m^n \end{pmatrix},$$

látjuk, hogy elég a J_i^n, $i = 1, \ldots, m$, mátrixokat vizsgálnunk. Írjuk fel a J_i $(k_i \times k_i)$-s mátrixot

$$J_i = \lambda_i I + S \qquad \text{alakban,}$$

ahol I a $(k_i \times k_i)$-s egységmátrix, S pedig az a $(k_i \times k_i)$-s méretű mátrix, melynek főátlója felett egyesek állnak, mindenhol máshol nullák. Könnyen ellenőrizhető, hogy $S^{k_i} = 0$. Ha $1 \leqslant l \leqslant k_i - 1$, akkor S^l az a $(k_i \times k_i)$-s méretű mátrix lesz, melynek a főátló feletti l-edik mellékátlójában csupa egyes van, a többi helyen pedig nulla. Ezért, ha $n \geqslant k_i$, akkor

$$J_i^n = (\lambda_i I + S)^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \lambda_i^{n-l} I S^l = \sum_{l=0}^{k_i - 1} \binom{n}{l} \lambda_i^{n-l} S^l. \tag{3.1}$$

Megmutatjuk, hogy $|\lambda_i| < 1$ esetén $\lim_{n\to\infty} J_i^n = 0$. Legyenek $l \in \{1, \ldots, k_i\}$ és $j \in \{0, \ldots, k_i - 1\}$ rögzítettek oly módon, hogy $l + j \leqslant k_i$. Tekintsük J_i^n $(l, l+j)$-pozíciójú elemét. Felhasználva (3.1)-t, ez az elem nem más, mint $\binom{n}{j} \lambda_i^{n-j}$. Mivel $|\lambda_i| < 1$ és

$$\left| \binom{n}{j} \lambda_i^{n-j} \right| = \binom{n}{j} |\lambda_i|^{n-j} = \frac{n(n-1)\ldots(n-j+1)}{j!} |\lambda_i|^{n-j} \leqslant \frac{n^j}{j!} \frac{|\lambda_i|^n}{|\lambda_i|^j},$$

a $\mathcal{L}$'Hospital-szabály alkalmazásával kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty}\binom{n}{j}\lambda_i^{n-j}=0$, és így $\lim_{n\to\infty} J_i^n = 0\in\mathcal{M}_{k_i\times k_i}$.

Egy másik módszer található *Stoyan Gisbert, Takó Galina: Numerikus módszerek 1.* című könyvének 101. oldalán. Nevezetesen, mivel

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{n+1}{j}\lambda_i^{n+1-j}}{\binom{n}{j}\lambda_i^{n-j}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+1-j}\lambda_i\right| = |\lambda_i|<1,$$

a hányadoskritérium segítségével kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n}{j}\lambda_i^{n-j}<+\infty.$$

Ezért

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{j}\lambda_i^{n-j}=0.$$

Az alábbiakban egy másik módszert is mutatunk P^n felírására. Legyen A egy olyan $N\times N$-es mátrix, melynek páronként különböző sajátértékei $\lambda_1,\dots,\lambda_r\in\mathbb{C}$, melyek multiplicitásai rendre $m_1,\dots,m_r\in\mathbb{N}$ (azaz $\det(zI-A)=\prod_{j=1}^r(z-\lambda_j)^{m_j}$). Ekkor tetszőleges olyan $f(z)=\sum_{k=0}^\infty c_k z^k$, $z\in\mathbb{C}$, függvényre, melynek konvergencia-sugara nagyobb, mint az A spektrálsugara, azaz

$$\frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}}>\max_{1\leqslant j\leqslant r}|\lambda_j| \qquad \text{esetén,}$$

teljesül az, hogy

$$f(A):=\sum_{k=0}^\infty c_k A^k=\sum_{j=1}^r\sum_{l=1}^{m_j} f^{(l-1)}(\lambda_j)P_{j,l}(A),$$

ahol $A^0:=I$, és $P_{j,l}$ az az egyértelműen meghatározott komplex együtthatós legfeljebb $N-1$-edfokú polinom, melyre

$$P_{j,l}^{(i)}(\lambda_k)=\begin{cases}1 & \text{ha } i=l-1,\ k=j\\ 0 & \text{ha } i\neq l-1,\ 0\leqslant i\leqslant m_k-1,\ 1\leqslant k\leqslant r \text{ vagy } k\neq j,\ 1\leqslant k\leqslant r,\ 0\leqslant i\leqslant m_k-1.\end{cases}$$

Itt $P_{j,l}$ függ a $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ sajátértékektől és azok multiplicitásától, illetve az nyilván fennáll, hogy $N=\sum_{j=1}^r m_j$.

Ha például A sajátértékei egyszeresek, azaz $m_1=\cdots=m_r=1$, akkor $r=N$ és

$$f(A)=\sum_{j=1}^N f(\lambda_j)\prod_{1\leqslant l\leqslant N,\,l\neq j}\frac{A-\lambda_l I}{\lambda_j-\lambda_l},$$

azaz

$$P_{j,1}(z)=\prod_{1\leqslant l\leqslant N,\,l\neq j}\frac{z-\lambda_l}{\lambda_j-\lambda_l}$$

a következő Lagrange-polinom: az az $N-1$-edfokú polinom, melyre

$$P_{j,1}(\lambda_k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = j, \\ 0 & \text{ha } 1 \leqslant k \leqslant N, \ k \neq j. \end{cases}$$

Nyilván az ismertetett módszer tetszőleges A mátrix esetén alkalmazható az $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, függvényekre, és azt kapjuk, hogy

$$A^n = \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=1}^{m_j} n(n-1)\cdots(n-l+2)\lambda_j^{n-l+1} P_{j,l}(A). \tag{3.2}$$

A Frobenius–Perron tétel alapján (az ottani jelöléseket használva) P-nek $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ egyszeres sajátértékei, melyekre $\lambda_i^d = 1$, $i = 1, \ldots, d$. A további $\lambda_{d+1}, \ldots, \lambda_N$ sajátértékek közül jelölje $\widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_s$ a páronként különbözőeket (ahol $s \leqslant N$), melyek multiplicitását rendre $\widetilde{m}_1, \ldots, \widetilde{m}_s$ jelöli. Ekkor

$$P^n = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j^n P_{j,1}(P) + \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=1}^{\widetilde{m}_j} n(n-1)\cdots(n-l+2)(\widetilde{\lambda}_j)^{n-l+1} P_{j,l}(P).$$

Nyilván, ha $|\lambda_j| < 1$, úgy

$$\lim_{n\to\infty} n(n-1)\cdots(n-l+2)\lambda_j^{n-l+1} = 0,$$

így tetszőleges $m = 0, 1, \ldots, d-1$ egész szám esetén létezik a $\lim_{n\to\infty} P^{nd+m}$ határérték és

$$\lim_{n\to\infty} P^{nd+m} = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j^m P_{j,1}(P),$$

azaz csak részsorozatok mentén létezik általában P^n-nek határértéke.

3.2. Feladat. Egy bolha egy háromszög csúcspontjain ugrál. Minden egyes ugráskor egyenlő valószínűséggel választ az általa éppen el nem foglalt két csúcspont közül. Mi a valószínűsége, hogy n lépés után visszajut oda, ahonnan indult?

Megoldás. A feladatot visszavezetjük egy 2-állapotú Markov-láncra. Legyen minden $n \geqslant 1$ esetén $X_n = 0$, ha az n-edik ugrás után azon a csúcsponton van a bolha, ahonnan indult, ill. $X_n = 1$, ha nem azon a csúcsponton van a bolha, ahonnan indult. Így $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc, melynek fázistere $\{0, 1\}$ és átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \ \ 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ugyanis például $p_{0,0} = 0$, mert ugyanott nem maradhat a bolha, és $p_{0,1} = 1$, mert ha valamely lépésben ott van a bolha, ahonnan indult, akkor biztos, hogy elugrik onnan, így a következő lépésben már máshol lesz. Ekkor $\{X_n : n \geqslant 1\}$ irreducibilis, aperiódikus Markov-lánc, melynek fázistere véges, így a Frobenius–Perron tétel alapján biztos, hogy $\lambda_1 = 1$ sajátértéke P-nek. Keressük meg most a másik sajátértéket is (összesen kettő van). Írjuk fel P karakterisztikus polinomját

$$\det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1/2 & 1/2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) - \frac{1}{2} = \lambda^2 - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}.$$

Így P sajátértékei

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4\frac{1}{2}}}{2},$$

azaz $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = -1/2$. Keressünk most egy, a $\lambda_2 = -1/2$ sajátértékhez tartozó bal-sajátvektort:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Ezt az egyenletet megoldva kapjuk, hogy $(1,-1)$ a $-1/2$ sajátértékhez tartozó bal-sajátvektor.

Hasonlóan a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó bal-sajátvektort keresve

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix},$$

kapjuk, hogy $(1,2)$ az 1 sajátértékhez tartozó bal-sajátvektor. Ezért

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

és

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

kapjuk, hogy

$$P^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ (-1/2)^n & -(-1/2)^n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Ezért, mivel a $p_{0,0}^{(n)}$ valószínűséget keressük, a válasz

$$p_{0,0}^{(n)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

A P^n mátrixot meghatározzuk a korábban leírt másik módszerünket alkalmazva is (lásd (3.2)-t). Mivel a λ_1 és λ_2 sajátértékek különbözőek, kapjuk, hogy

$$P^n = \lambda_1^n \frac{P-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2} + \lambda_2^n \frac{P-\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Itt $\lambda_1 - \lambda_2 = 3/2$,

$$P-\lambda_2 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P-\lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Így

$$P^n = \frac{2}{3}\left(\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

□

3.3. Feladat. Tekintsünk egy háromszöget, melynek csúcspontjait a $0, 1, 2$ számokkal jelöljük. Egy bolha ezen háromszög csúcspontjain ugrál. Minden egyes ugráskor kétszer olyan valószínű, hogy a tőle óramutató járásával megegyező irányban levő csúcspontra ugrik, mint, hogy az óramutató járásával ellentétes irányban levőre ugorna. Feltételezzük, hogy a bolha az 1-el jelölt csúcspontban tartózkodik kezdetben. Mi a valószínűsége, hogy n lépés után visszajut oda, ahonnan indult?

Megoldás. Tételezzük fel, hogy a háromszög csúcspontjait az óramutató járásával ellentétes irányban rendre a $0, 1, 2$ számokkal számozzuk. Legyen minden $n \geqslant 0$ esetén $X_n = i$, $i = 0, 1, 2$, ha a bolha a háromszög i-vel jelölt csúcspontján van az n-edik ugrás után. Így $X_0 = 1$. Ekkor $\{X_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc, melynek fázistere $\{0, 1, 2\}$ és átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Nekünk a $P(X_n = 1 \mid X_0 = 1)$ valószínűséget kell meghatározni. A Chapman-Kolmogorov egyenletek alapján $P^{(n)} = P^n$. Mivel $\{X_n : n \geqslant 0\}$ irreducibilis, aperiódikus Markov-lánc, az átmenetvalószínűségi mátrixának $\lambda_1 = 1$ biztosan sajátértéke. Keressük meg most a többi sajátértéket! A P átmenetvalószínűségi mátrix karakterisztikus polinomja

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -\lambda & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{2}{9}\right) - \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{9}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\lambda\right) = -\lambda^3 + \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{3}.$$

Így a sajátértékeket a $-3\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$ egyenlet megoldásai adják. Mivel $\lambda_1 = 1$ gyök, osztva $(\lambda - 1)$-el a $-3\lambda^3 + 2\lambda + 1$ polinomot a $-(3\lambda^2 + 3\lambda + 1)$ polinomot kapjuk. A $3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$ egyenlet megoldásai

$$\lambda_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3},$$

azaz

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2\sqrt{3}}$$

a másik két sajátérték. Vegyük észre, hogy

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left\{\mp\frac{i\pi}{6}\right\},$$

ugyanis

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left\{\mp\frac{i\pi}{6}\right\} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos(\pi/6) \mp i\sin(\pi/6)) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \mp i\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

A Frobenius–Perron tétel után leírtak szerint létezik olyan B (3×3)-as mátrix, hogy

$$P = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\pi/6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\pi/6} \end{pmatrix} B.$$

Így

$$P^n = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\pi/6} & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n e^{-in\pi/6} \end{pmatrix} B.$$

Mi a P^n mátrix $(1,1)$ elemét keressük. Ha

$$B = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} \end{pmatrix},$$

akkor

$$\begin{aligned}
(P^n)_{1,1} = p_{1,1}^{(n)} &= \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\pi/6} \\ x_{3,1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n e^{-in\pi/6} \end{pmatrix} \\
&= y_{1,1}x_{1,1} + y_{1,2}x_{2,1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\pi/6} + y_{1,3}x_{3,1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n e^{-in\pi/6} \\
&=: a + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n (be^{in\pi/6} + ce^{-in\pi/6})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \big((b+c)\cos(n\pi/6) + (b-c)i\sin(n\pi/6)\big) \\
&=: \alpha + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \big(\beta\cos(n\pi/6) + \gamma i\sin(n\pi/6)\big),
\end{aligned}
$$

valamilyen α, β, γ valós konstansokkal. Kiszámolva a $p_{1,1}^{(0)}$, $p_{1,1}^{(1)}$, $p_{1,1}^{(2)}$ értékeket, meghatározzuk az α, β és γ konstansokat. Mivel $P^0 = I$, $P^1 = P$ kapjuk, hogy $p_{1,1}^{(0)} = 1$ és $p_{1,1}^{(1)} = 0$, és mivel $(P^2)_{1,1} = 2/9 + 2/9 = 4/9$, adódik, hogy $p_{1,1}^{(2)} = 4/9$. Ezért

$$
\begin{aligned}
1 &= \alpha + \beta, \\
0 &= \alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\beta\frac{\sqrt{3}}{2} + \gamma i\frac{1}{2}\right), \\
\frac{4}{9} &= \alpha + \frac{1}{3}\left(\beta\frac{1}{2} + \gamma i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),
\end{aligned}
$$

azaz

$$
\begin{aligned}
&\alpha + \beta = 1, \\
&\alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma = 0, \\
&\alpha + \frac{1}{6}\beta + \frac{i}{2\sqrt{3}}\gamma = \frac{4}{9}.
\end{aligned}
$$

Ennek megoldása

$$
\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \beta = \frac{2}{3}, \qquad \gamma = 0.
$$

Ezért

$$
p_{1,1}^{(n)} = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \frac{2}{3}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right).
$$

A P^n mátrixot meghatározzuk a korábban leírt másik módszerünket alkalmazva is (lásd (3.2)-t). Mivel a λ_1, λ_2 és λ_3 sajátértékek páronként különbözőek, kapjuk, hogy

$$
P^n = \lambda_1^n \frac{(P-\lambda_2 I)(P-\lambda_3 I)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} + \lambda_2^n \frac{(P-\lambda_1 I)(P-\lambda_3 I)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} + \lambda_3^n \frac{(P-\lambda_1 I)(P-\lambda_2 I)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}, \qquad n \in \mathbb{N}.
$$

Mivel $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}$ és $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}$, kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}, \quad \lambda_1 - \lambda_3 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}, \quad \lambda_2 - \lambda_3 = i\frac{\sqrt{3}}{3}, \\
&(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3) = -\frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2) = -\frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
&(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3) = \frac{9}{4} - i^2\frac{3}{36} = \frac{7}{3}.
\end{aligned}
$$

Továbbá,

$$P-\lambda_1 I=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix},\qquad P-\lambda_2 I=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3-i\sqrt{3} & 2 & 4\\ 4 & 3-i\sqrt{3} & 2\\ 2 & 4 & 3-i\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

$$P-\lambda_3 I=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3+i\sqrt{3} & 2 & 4\\ 4 & 3+i\sqrt{3} & 2\\ 2 & 4 & 3+i\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

és így

$$(P-\lambda_2 I)(P-\lambda_3 I)=\frac{7}{9}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

valamint

$$(P-\lambda_1 I)(P-\lambda_2 I)=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}-1+3i\sqrt{3} & 5-i\sqrt{3} & -4-2i\sqrt{3}\\ -4-2i\sqrt{3} & -1+3i\sqrt{3} & 5-i\sqrt{3}\\ 5-i\sqrt{3} & -4-2i\sqrt{3} & -1+3i\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

$$(P-\lambda_1 I)(P-\lambda_3 I)=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}-1-3i\sqrt{3} & 5+i\sqrt{3} & -4+2i\sqrt{3}\\ -4+2i\sqrt{3} & -1-3i\sqrt{3} & 5+i\sqrt{3}\\ 5+i\sqrt{3} & -4+2i\sqrt{3} & -1-3i\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{-4\mp 2i\sqrt{3}}{-1\pm 3i\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \frac{5\mp i\sqrt{3}}{-1\pm 3i\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}\mp i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}P^n=&\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^n\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} & 1\end{pmatrix}\\ &+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^n\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned}p_{1,1}^{(n)}&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^n\right]=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\pi/6}\right)^n+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\pi/6}\right)^n\right]\\ &=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n\left(e^{-in\pi/6}+e^{in\pi/6}\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

□

3.4. Feladat. Tekintsünk egy dobókockát, mely úgy van súlyozva, hogy minden egyes dobás esetén az eredmény nem lehet ugyanaz, mint az azt megelőző dobás eredménye, a többi szám viszont egyenlő valószínűséggel előfordulhat (azaz valószínűségük egyenként $1/5$). Feldobva a kockát az első dobás eredménye 6. Mi a valószínűsége annak, hogy az n-edik dobás eredménye újra 6? Mi a valószínűsége annak, hogy az n-edik dobás eredménye j, ahol $j \neq 6$?

Megoldás. A feladatot visszavezetjük egy 2-állapotú Markov-láncra. Legyen minden $n \geqslant 1$ esetén $X_n = 0$, ha az n-edik dobás eredménye 6, és $X_n = 1$, ha nem 6. Ekkor $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc, melynek fázistere $\{0, 1\}$ és átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & \;\;1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ugyanis például $p_{1,0} = 1/5$, mert ha nem 6-os az n-edik dobás eredménye, akkor az $(n+1)$-edik dobás eredménye $1/5$ valószínűséggel lesz 6-os. Feltéve, hogy az első dobás eredménye 6, annak a valószínűsége, hogy az n-edik dobás eredménye is 6 $(P^{n-1})_{0,0} = p_{0,0}^{(n-1)}$. (Azért szerepel $n-1$, mert az első dobás után még $n-1$-et kell dobnunk az n-edikig.) A szimmetria miatt kapjuk, hogy feltéve, hogy az első dobás eredménye 6, annak a valószínűsége, hogy az n-edik dobás eredménye 1 megyezik annak a valószínűségével, hogy az n-edik dobás eredménye i $(i \in \{2, \dots, 5\})$. Ezért ez a valószínűség

$$(P^{n-1})_{0,1} = \frac{1}{5}(1 - (P^{n-1})_{0,0}).$$

Mivel $\{X_n : n \geqslant 1\}$ irreducibilis, aperiódikus Markov-lánc, melynek fázistere véges, a Frobenius–Perron tétel miatt biztos, hogy $\lambda_1 = 1$ sajátértéke P-nek. Keressük meg most a másik sajátértéket is (összesen 2 van)! Felírva P karakterisztikus polinomját

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1/5 & 4/5 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda \left(\frac{4}{5} - \lambda \right) - \frac{1}{5} = \lambda^2 - \frac{4}{5}\lambda - \frac{1}{5}.$$

Így P sajátértékei

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{4}{5} \pm \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{5}}}{2},$$

azaz $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = -1/5$. Keressünk most egy, a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó bal-sajátvektort

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Ezt az egyenletet megoldva kapjuk, hogy $(1, 5)$ a 1 sajátértékhez tartozó bal-sajátvektor. Hasonlóan a $\lambda_2 = -1/5$ sajátértékhez tartozó bal-sajátvektort keresünk

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Ezt az egyenletet megoldva kapjuk, hogy $(1,-1)$ a $-1/5$ sajátértékhez tartozó bal-sajátvektor. Ezért

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

és

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/5)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

kapjuk, hogy

$$P^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ (-1/5)^n & -(-1/5)^n \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 + 5\left(-\frac{1}{5}\right)^n & 5 - 5\left(-\frac{1}{5}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n & 5 + \left(-\frac{1}{5}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Így

$$p_{0,0}^{(n-1)} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1},$$

és

$$(P^{n-1})_{0,1} = \frac{1}{5}(1 - p_{0,0}^{(n-1)}) = \frac{1}{5}\left(\frac{5}{6} - \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}.$$

A P^n mátrixot meghatározzuk a korábban leírt másik módszerünket alkalmazva is (lásd (3.2)-t). Mivel a λ_1 és λ_2 sajátértékek különbözőek, kapjuk, hogy

$$P^n = \lambda_1^n \frac{P - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} + \lambda_2^n \frac{P - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Itt $\lambda_1 - \lambda_2 = 6/5$,

$$P - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1/5 & 1 \\ 1/5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

Ezért

$$P^n = \frac{5}{6}\left(\begin{pmatrix} 1/5 & 1 \\ 1/5 & 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{5}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 + 5\left(-\frac{1}{5}\right)^n & 5 - 5\left(-\frac{1}{5}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n & 5 + \left(-\frac{1}{5}\right)^n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

3.5. Feladat. Tekintsünk egy dobókockát, mely úgy van súlyozva, hogy minden egyes dobás esetén az eredmény nem lehet az azt megelőző dobás eredménye plusz $1 \mod (6)$, a többi szám viszont egyenlő valószínűséggel előfordulhat (azaz valószínűségük egyenként $1/5$). Feldobva a kockát a dobás eredménye 6. Mi a valószínűsége annak, hogy az n-edik dobás eredménye újra 6?

Megoldás. Felhasználjuk az előző feladatbeli dobókockát. A jelen feladatbeli dobókockánál az n-edik dobás eredménye előállítható úgy, hogy az előző feladatbeli kockát feldobva n-szer, a kapott értékhez hozzáadunk $n-1$-et $\mod (6)$. Azaz, ha az előző feladatbeli kockával az n-edik dobás eredménye i_n, úgy a jelen feladatbeli kockával adódóan $i_n + n - 1 \mod (6)$ (szimulálható így). Ehhez azt kell csak ellenőrizni, hogy

$$(i_{n-1} + n - 2) + 1 \not\equiv i_n + n - 1 \mod (6), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$i_{n-1} \not\equiv i_n \mod (6), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

ez pedig az előző feladatbeli kockára vonatkozó dobásokra nyilván igaz.

Mivel $i_1 \equiv 0 \mod (6)$ (az előző feladatbeli kockával az első dobás eredménye 6), így ezen feladatbeli kockával dobva az n-edik dobás eredménye akkor lesz újra 6, ha $i_n + n - 1 \equiv 0 \mod (6)$. Ha $n \equiv 1 \mod (6)$, úgy $i_n = 6$ kell legyen, ezért a keresett valószínűség

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}, \qquad \text{ha} \qquad n \equiv 1 \mod (6).$$

Ha $n-1 \equiv j \mod (6)$, $j = 1,2,3,4,5$, úgy $i_n = 6 - j$ kell legyen. Mivel $j = 1,2,3,4,5$ esetén $6 - j \neq 0$, a keresett valószínűség

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}, \qquad \text{ha} \qquad n \not\equiv 1 \mod (6).$$

□

3.6. Feladat. Legyen $\{X_n : n \geqslant 0\}$ egy Markov-lánc, melynek fázistere $\{1,2,3\}$ és átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \;\;1 & \quad\;\; 2 & \quad\;\; 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/12 & 11/12 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Határozzuk meg a $P(X_n = 1 \,|\, X_0 = 1)$, $n \geqslant 1$ valószínűséget!

Megoldás. Ez egy irreducibilis, aperiódikus Markov-lánc, melynek fázistere véges, így a Frobenius–Perron tétel alapján $\lambda_1 = 1$ biztosan sajátértéke P-nek. Keressük meg P másik két sajátértékét (összesen 3 van neki)! Felírva P karakterisztikus polinomját

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2/3-\lambda & 1/3 \\ 1/12 & 11/12 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{11}{36}\lambda + \frac{1}{36}.$$

Így a sajátértékek a $36\lambda^3-24\lambda^2-11\lambda-1=0$ egyenlet megoldásai. Mivel $\lambda_1=1$ megoldás, osztva a fenti polinomot $\lambda-1$-el, kapjuk, hogy a másik két sajátérték a $36\lambda^2+12\lambda+1=0$ egyenlet megoldásai, azaz

$$\lambda_2=\lambda_3=-\frac{1}{6}.$$

Ellenőrizhető, hogy a $-\frac{1}{6}$ sajátértékhez tartozó sajátaltér

$$\left\{ u\begin{pmatrix}12\\-2\\5\end{pmatrix}, \quad u\in\mathbb{R}\right\},$$

melynek dimenziója 1. Így P nem diagonalizálható. Ezért a jelen esetben a Jordan-féle normál formás megközelítési módot tudjuk alkalmazni. Ekkor létezik olyan B (3×3)-as mátrix, melyre

$$P=B^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1/6&1\\0&0&-1/6\end{pmatrix}B,$$

és így

$$P^n=B^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1/6&1\\0&0&-1/6\end{pmatrix}^n B=B^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a_{1,1}&a_{1,2}\\0&a_{2,1}&a_{2,2}\end{pmatrix}B,$$

ahol

$$\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}\\a_{2,1}&a_{2,2}\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}-1/6&1\\0&-1/6\end{pmatrix}^n.$$

Felhasználva a Frobenius–Perron tétel után írottakat, kapjuk, hogy minden $n\geqslant 1$ esetén

$$a_{1,1}=\left(-\frac{1}{6}\right)^n,\quad a_{2,1}=0,\quad a_{2,2}=\left(-\frac{1}{6}\right)^n,\quad a_{1,2}=\binom{n}{1}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}=n\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$$

Azonban ezt most közvetlenül is megkaphatjuk, ugyanis teljes indukcióval megmutatjuk, hogy

$$\begin{pmatrix}-1/6&1\\0&-1/6\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\left(-\frac{1}{6}\right)^n & n\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\\0&\left(-\frac{1}{6}\right)^n\end{pmatrix},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Triviálisan teljesül az egyenlőség $n=1$-re. Tegyük most fel, hogy igaz az egyenlőség $k=1,\dots,n$-re, és mutassuk meg, hogy igaz $(n+1)$-re is. Ekkor

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-1/6&1\\0&-1/6\end{pmatrix}^{n+1}&=\begin{pmatrix}\left(-\frac{1}{6}\right)^n & n\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\\0&\left(-\frac{1}{6}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/6&1\\0&-1/6\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} & \left(-\frac{1}{6}\right)^n+n\left(-\frac{1}{6}\right)^n\\0&\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} & (n+1)\left(-\frac{1}{6}\right)^n\\0&\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ezért

$$P^n = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{6}\right)^n & n\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} B.$$

Ha

$$B = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} \end{pmatrix},$$

akkor

$$\begin{aligned}
(P^n)_{1,1} = p_{1,1}^{(n)} &= \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + x_{3,1} n \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \\ x_{3,1}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \\
&= y_{1,1}x_{1,1} + y_{1,2}x_{2,1}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + y_{1,2}x_{3,1}n\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} + y_{1,3}x_{3,1}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\
&=: a + b\left(-\frac{1}{6}\right)^n + cn\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

valamilyen a, b, c valós konstansokkal. Kiszámolva a $p_{1,1}^{(1)}$, $p_{1,1}^{(2)}$, $p_{1,1}^{(3)}$ értékeket, meghatározzuk az a, b és c konstansokat. Mivel $P^1 = P$, kapjuk, hogy $p_{1,1}^{(1)} = 0$ és mivel $(P^2)_{1,1} = 0$, adódik, hogy $p_{1,1}^{(2)} = 0$. Hasonlóan, $p_{1,1}^{(3)} = 1/36$. Ezért az a, b, c konstansok kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}
0 &= a - \frac{1}{6}b + c \\
0 &= a + \frac{1}{36}b - \frac{1}{3}c \\
\frac{1}{36} &= a - \frac{1}{216}b + \frac{1}{12}c.
\end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$a = \frac{1}{49}, \qquad b = \frac{48}{49}, \qquad c = \frac{1}{7}.$$

Ezért

$$p_{1,1}^{(n)} = \frac{1}{49} + \frac{48}{49}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{7}n\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$$

A P^n mátrixot meghatározzuk a korábban leírt másik módszerünket alkalmazva is (lásd (3.2)-t). Mivel $\lambda_1 = 1$ egyszeres, $\lambda_2 = -1/6$ kétszeres sajátérték, kapjuk, hogy

$$P^n = \lambda_1^n P_{1,1}(P) + \lambda_2^n P_{2,1}(P) + n\lambda_2^{n-1} P_{2,2}(P),$$

ahol

$P_{1,1}$ az a másodfokú polinom, melyre $P_{1,1}(\lambda_1) = 1,\ P_{1,1}(\lambda_2) = 0,\ P'_{1,1}(\lambda_2) = 0,$

$P_{2,1}$ az a másodfokú polinom, melyre $P_{2,1}(\lambda_1) = 0,\ P_{2,1}(\lambda_2) = 1,\ P'_{2,1}(\lambda_2) = 0,$

$P_{2,2}$ az a másodfokú polinom, melyre $P_{2,2}(\lambda_1) = 0,\ P_{2,2}(\lambda_2) = 0,\ P'_{2,2}(\lambda_2) = 1.$

Így

$$P_{1,1}(z) = \frac{(z-\lambda_2)^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}, \quad P_{2,1}(z) = 1 - \frac{(z-\lambda_2)^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}, \quad P_{2,2}(z) = \frac{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

Leellenőrizhető, hogy

$$\frac{(P-\lambda_2 I)^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 1 & 36 & 12 \\ 1 & 36 & 12 \\ 1 & 36 & 12 \end{pmatrix}, \qquad I - \frac{(P-\lambda_2 I)^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 48 & -36 & -12 \\ -1 & 13 & 12 \\ -1 & -36 & 37 \end{pmatrix},$$

valamint

$$\frac{(P-\lambda_1 I)(P-\lambda_2 I)}{\lambda_2-\lambda_1} = -\frac{1}{84}\begin{pmatrix} -12 & -12 & 24 \\ 2 & 2 & -4 \\ -5 & -5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Ezért

$$P^n = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 1 & 36 & 12 \\ 1 & 36 & 12 \\ 1 & 36 & 12 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{6}\right)^n \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 48 & -36 & -12 \\ -1 & 13 & 12 \\ -1 & -36 & 37 \end{pmatrix} + n\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{84}\begin{pmatrix} 12 & 12 & -24 \\ -2 & -2 & 4 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix},$$

és így

$$p_{1,1}^{(n)} = \frac{1}{49} + \frac{48}{49}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{7}n\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$$

□

4. Ergodikusság, stacionárius eloszlás

4.1. Megjegyzés. (Ergodikus osztályok keresése) Tudva azt, hogy egy ergodikus osztály visszatérő és minden visszatérő osztály lényeges, kapjuk, hogy lényegtelen osztály nem lehet ergodikus. Így először meg kell keresnünk a lényeges osztályokat. Tegyük fel, hogy C egy lényeges osztály és legyen

$$\pi_i := \frac{1}{m_{i,i}}, \quad i \in C, \qquad \left(\frac{1}{+\infty} := 0\right).$$

Ekkor az elméletből tanultaknak megfelelően az

$$u_j = \sum_{i\in C} u_i p_{i,j}, \qquad j \in C,$$

egyenletrendszernek a $\sum_{i\in C} |u_i| < +\infty$ feltételt kielégítő megoldásai éppen $u_i = c\pi_i$, $i \in C$ alakúak, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Ha C ergodikus osztály d periódussal és C_r, $0 \leqslant r \leqslant d-1$ jelöli az alosztályokat, akkor

$$\sum_{i \in C_r} \pi_i = \frac{1}{d}, \qquad 0 \leqslant r \leqslant d-1,$$
$$\sum_{i \in C} \pi_i = 1.$$

Egy C lényeges osztály ergodicitása vizsgálható a következők alapján. Először is $\pi_i \geqslant 0$, $i \in C$, mert $m_{i,i} > 0$, $i \in C$, attól függetlenül, hogy C ergodikus vagy nem. Ha pedig C ergodikus, úgy $\pi_i > 0$, $i \in C$, mert $m_{i,i} < +\infty$, $i \in C$. Tekintsük az

$$u_j = \sum_{i \in C} u_i p_{i,j}, \qquad j \in C,$$
$$\sum_{i \in C} |u_i| < +\infty$$

egyenletrendszert. Ekkor a C lényeges osztály akkor és csak akkor ergodikus, ha ennek az egyenletrendszernek van olyan megoldása, hogy $u_i > 0$, $i \in C$. Ugyanis, ha a C lényeges osztály ergodikus, úgy $u_i = \pi_i$, $i \in C$-vel $u_i > 0$, $\sum_{i \in C} u_i = \sum_{i \in C} \pi_i = 1 < +\infty$ és $\pi_j = \sum_{i \in C} \pi_i p_{i,j}$, $j \in C$ is teljesül a fentebb idézett tétel miatt. (Itt π_i, $i \in C$, az egyértelműen létező stacionárius eloszlás lesz a C ergodikus osztály számára.)

Ha pedig a fenti egyenletrendszernek van olyan megoldása, hogy $u_i > 0$, $i \in C$, úgy az idézett tétel miatt létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy $u_i = k\pi_i$, $i \in C$. Felhasználva, hogy $\pi_i \geqslant 0$, kapjuk, hogy $\pi_i > 0$, $i \in C$ kell legyen, azaz C ergodikus osztály.

Ha kijött, hogy a C lényeges osztály ergodikus, azaz a fenti egyenletrendszernek van olyan megoldása, hogy $u_i > 0$, $i \in C$, és létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy $u_i = k\pi_i$, $i \in C$, úgy a $\pi_i = 1/m_{i,i}$, $i \in C$ mennyiségeket már könnyen meghatározhatjuk. Ugyanis $\sum_{i \in C} \pi_i = 1$ miatt

$$\sum_{i \in C} u_i = \sum_{i \in C} k\pi_i = k \cdot 1 = k,$$

és így

$$\pi_i = \frac{u_i}{\sum_{i \in C} u_i}, \quad i \in C.$$

□

4.2. Megjegyzés. (stacionárius eloszlás) Felidézünk most bizonyos előadáson tanult dolgokat. Ha C egy aperiódikus osztály, akkor bármilyen $i, j \in C$ állapotokra

$$\lim_{n \to \infty} p_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{m_{j,j}},$$

ahol $m_{j,j} = \mathbb{E}(\tau_j \,|\, X_0 = j)$ és

$$\tau_j(\omega) = \begin{cases} k & \text{ha} \quad X_k(\omega) = j \text{ és } X_t(\omega) \neq j,\ 1 \leqslant t < k, \\ +\infty & \text{ha} \quad X_t(\omega) \neq j,\ \forall\, t \geqslant 1. \end{cases}$$

(Azaz τ_j a j állapot első elérési ideje, $m_{j,j}$ pedig a j állapot átlagos visszatérési ideje.)

Irreducibilis, aperiódikus Markov-lánc esetén bármilyen $j \in I$ állapotra

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \frac{1}{m_{j,j}},$$

a Markov-lánc tetszőleges, rögzített $P(X_0 = i)$, $i \in I$, kezdeti eloszlása esetén.

Az $\{u_i : i \in I\}$ valós számsorozatot a Markov-lánc **stacionárius eloszlásának** nevezzük, ha

(i) $u_i \geqslant 0, \forall\, i \in I$ és $\sum_{i\in I} u_i = 1$,

(ii) $u_j = \sum_{i\in I} u_i p_{i,j}, \forall\, j \in I$.

(A (ii) feltétel írható $u = uP$ alakban is, ahol u sorvektort jelöl, azaz u kielégít egy homogén lineáris (esetleg végtelen sok egyenletet tartalmazó) egyenletrendszert.)

Ha egy irreducibilis Markov-lánc ergodikus, akkor egyetlen stacionárius eloszlása van és ez

$$\pi_i = \frac{1}{m_{i,i}}, \qquad i \in I,$$

és ekkor $\pi_i > 0$, mert az ergodikusság miatt $m_{i,i} < +\infty, i \in I$.

Ha egy irreducibilis Markov-lánc nem ergodikus, akkor nem létezik stacionárius eloszlása és ekkor

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = i) = 0, \quad i \in I,$$

a Markov-lánc tetszőleges, rögzített $P(X_0 = i)$, $i \in I$, kezdeti eloszlása esetén. Ezek alapján, ha $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy irreducibilis, aperiódikus ergodikus Markov-lánc, akkor minden $i, j \in I$ állapotra létezik a $\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}$ határérték és független i-től, valamint

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{m_{j,j}}, \qquad j \in I.$$

Ekkor $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}, j \in I$, valamint $\{\pi_j, j \in I\}$ az egyértelmű pozitív megoldása a

$$\begin{aligned} &\pi_j = \sum_{i\in I} \pi_i p_{i,j}, \qquad j \in I, \\ &\sum_{j\in I} \pi_j = 1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

egyenletrendszernek. Ez az egyenletrendszer a Chapman–Kolmogorov egyenletekből következik. Valóban, tetszőleges $k, j \in I$ állapotok esetén

$$p_{k,j}^{(n)} = \sum_{i\in I} p_{k,i}^{(n-1)} p_{i,j},$$

és így $n \to \infty$ határátmenettel adódik, hogy

$$\pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{i,j}, \quad j \in I.$$

Továbbá,

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \frac{1}{m_{j,j}}, \qquad j \in I,$$

a Markov-lánc tetszőleges, rögzített $P(X_0 = i)$, $i \in I$, kezdeti eloszlása esetén. Felhasználva $m_{j,j}$ értelmezését, π_j nem más, mint a Markov-lánc által hosszú távú működés során a j állapotban eltöltött idő aránya az összidőhöz viszonyítva. Ezért π_j interpretálható úgy is, mint annak a valószínűsége, hogy hosszú távú működés után a Markov-lánc a j állapotban van. Érdemes az alábbi speciális esetre rámutatni: ha X_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, független, azonos eloszlású valószínűségi változók, akkor $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ homogén Markov-lánc és τ_j-nek az $\{X_0 = j\}$ eseményre vonatkozó feltételes eloszlása geometriai eloszlás $P(X_0 = j)$ paraméterrel. Így ekkor $m_{j,j} = \frac{1}{P(X_0=j)}$, azaz $P(X_0 = j) = \frac{1}{m_{j,j}}$, $j \in I$. Mivel X_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, független, azonos eloszlásúak, ebben a speciális esetben

$$\pi_j = P(X_n = j) = P(X_0 = j) = \frac{1}{m_{j,j}}, \qquad j \in I, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Ha az $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc irreducibilis, ergodikus és periódikus ($d \geqslant 2$ periódussal), akkor a

$$\pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{i,j}, \quad j \in I,$$
$$\sum_{j \in I} \pi_j = 1$$

egyenletrendszernek létezik egyértelmű, pozitív $\{\pi_i : i \in I\}$ megoldása. Azonban ekkor nem létezik a $\lim_{n\to\infty} P(X_n = i), i \in I$, határérték. Valóban, legyen $i \in I$ egy tetszőleges rögzített állapot. Jelölje $C_0(i)$ azon $j \in I$ állapotok halmazát, melyekhez létezik olyan $n \in \mathbb{Z}_+$, hogy $p_{i,j}^{(nd)} > 0$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(nd)} = \begin{cases} d\pi_j & \text{ha } j \in C_0(i), \\ 0 & \text{ha } j \notin C_0(i). \end{cases}$$

Feltételezve, hogy Markov-láncunk kezdeti eloszlása olyan, hogy $P(X_0 \in C_0(i)) = 1$, kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(X_{nd} = i) = \sum_{j \in C_0(i)} \Big(P(X_0 = j) \cdot \lim_{n\to\infty} p_{j,i}^{(nd)} \Big).$$

Mivel $j \in C_0(i)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $i \in C_0(j)$, kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} p_{j,i}^{(nd)} = d\pi_i$, és így

$$\lim_{n\to\infty} P(X_{nd} = i) = d\pi_i \sum_{j \in C_0(i)} P(X_0 = j) = d\pi_i.$$

Továbbá, $P(X_n = i) = 0$, ha $d \nmid n$. Így látjuk, hogy a $\lim_{n\to\infty} P(X_n = i)$, $i \in I$, határérték nem létezik, csak bizonyos részsorozat mentén. Azonban ekkor is fennáll, hogy $\pi_i = 1/m_{i,i}$, azaz π_i-t ekkor is lehet úgy interpretálni, mint a Markov-lánc által hosszú távú működés után az i állapotban eltöltött idő aránya az összidőhöz viszonyítva.

A gyakorlati példák során úgy járhatunk el, hogy ha egy Markov-láncról sikerül kimutatni, hogy irreducibilis, akkor felírva az (4.1) egyenletrendszert, ha annak van pozitív megoldása, akkor a Markov-lánc ergodikus és a kapott megoldás az egyetlen stacionárius eloszlás. Ebben az esetben ugyanis az nem fordulhat elő, hogy az (4.1) egyenletrendszernek két különböző megoldása van és az sem lehetséges, hogy a Markov-lánc nem ergodikus. Ugyanis, ha a Markov-lánc nem lenne ergodikus, úgy nem lenne stacionárius eloszlása, azaz (4.1)-nek nem lenne egyetlen megoldása sem. Illetve, az ergodikusság alapján az is adódik, hogy pontosan egy stacionárius eloszlás van, azaz (4.1)-nek nem lehet két különböző megoldása. Ha nincs pozitív megoldása (4.1)-nek, akkor a Markov-lánc nem ergodikus és nincs stacionárius eloszlása sem. Abban az esetben, ha a Markov-lánc irreducibilis, aperiódikus és az (4.1) egyenletrendszernek van pozitív megoldása kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = \pi_j, \qquad i, j \in I,$$

ahol $\{\pi_j, j \in I\}$ az (4.1) egyenletrendszer egyértelmű pozitív megoldása.

Ismert továbbá, hogy egy véges állapotterű, irreducibilis Markov-lánc ergodikus, így létezik egyértelmű stacionárius eloszlása. □

4.3. Megjegyzés. Egy irreducibilis Markov-lánc esetén, ha a stacionárius eloszlást meghatározó (4.1) egyenletrendszernek van nemnegatív megoldása, akkor az szükségszerűen pozitív is. Ugyanis két eset lehetséges: az irreducibilis Markov-lánc ergodikus vagy nem ergodikus. Ha nem ergodikus, akkor nincs stacionárius eloszlása. Ugyanis, ha egy irreducibilis Markov-lánc nem ergodikus, akkor nincs stacionárius eloszlása. Mivel esetünkben van stacionárius eloszlás kapjuk, hogy Markov-láncunk ergodikus és így $\pi_i = 1/m_{i,i}$, $i \in I$ az egyértelmű stacionárius eloszlás. Az ergodicitás miatt pedig még az is igaz, hogy $\pi_i > 0$, $\forall\, i \in I$. Kiemeljük, hogy ha csak azt tesszük fel, hogy a

$$\pi_j = \sum_{i\in I} \pi_i p_{i,j}, \quad j \in I,$$

egyenletrendszernek van nemnegatív megoldása, akkor általában nem következik, hogy ez a megoldás pozitív. Ugyanis egy irreducibilis, aperiódikus és nem ergodikus Markov-lánc esetén, ha $\pi = (\pi_i)_{i\in I}$ nemnegatív megoldása $\pi = \pi P$-nek, úgy $\pi = \pi P^n$, $n \in \mathbb{N}$. Felhasználva, hogy ekkor $\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = 0$, $\forall\, i, j \in I$, kapjuk, hogy

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \pi P^n = 0,$$

azaz $\pi_i = 0$, $i \in I$. □

4.4. Megjegyzés. A stacionárius eloszlás elnevezésének magyarázata a következő. Ha egy homogén Markov-lánc stacionárius eloszlása $\{\pi_j, j \in I\}$, akkor ha a lánc kezdeti eloszlásának a $\{\pi_j, j \in I\}$ eloszlást választjuk, úgy minden $n \in \mathbb{N}$-re, $j \in I$-re $P(X_n = j) = \pi_j$. Azaz, ha $P(X_0 = j) = \pi_j$, $j \in I$, akkor $P(X_n = j) = \pi_j$, $n \in \mathbb{N}, j \in I$. Ugyanis teljes indukciót alkalmazva, tegyük fel, hogy $1, 2, \ldots, n-1$-re igaz az állítás és bizonyítsuk be, hogy n-re is igaz. A teljes valószínűség tétele alapján

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \sum_{i \in I} P(X_n = j, X_{n-1} = i) = \sum_{i \in I} P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) P(X_{n-1} = i) \\ &= \sum_{i \in I} p_{i,j} \pi_i = \pi_j, \end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti lépésben az indukciós feltevést, az utolsó lépésben pedig a stacionárius eloszlás definícióját használtuk. □

4.5. Feladat. Legyen $\{X_n : n \geqslant 0\}$ egy tetszőleges Markov-lánc, A a fázisterében egy véges osztály. Igaz-e, hogy ekkor A vagy lényegtelen vagy ergodikus?

Megoldás. A válasz: **Igen.** *Indoklás:* Ha A nem lényegtelen, úgy lényeges. Ekkor A minimális zárt halmaz, mely véges, így egy előadásbeli tétel alapján tartalmaz ergodikus állapotot. Mivel az ergodikusság osztálytulajdonság, kapjuk, hogy A ergodikus. □

4.6. Feladat. Legyen $\{X_n : n \geqslant 1\}$ egy olyan véges állapotterű Markov-lánc, melynek egyértelműen létezik stacionárius eloszlása. Igaz-e, hogy ekkor $\{X_n : n \geqslant 1\}$ fázistere egyetlen ergodikus osztály?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* Lehetnek átmeneti állapotok is. □

4.7. Feladat. Létezik-e olyan véges állapotterű, irreducibilis Markov-lánc, melynek nem létezik stacionárius eloszlása?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* tétel előadásból. □

4.8. Feladat. Ha egy véges állapotterű Markov-lánc fázistere tartalmaz lényegtelen állapotot, akkor nem létezik stacionárius eloszlása.

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* A későbbi 5.8. Feladat példát szolgáltat erre. □

4.9. Feladat. Igaz-e, hogy egy véges állapotterű Markov-lánc esetén minden osztály ergodikus?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* Mert lehet lényegtelen osztály is a fázistérben, ez azonban egy tétel miatt nem lehet ergodikus (hiszen ergodikus osztály az lényeges). □

4.10. Feladat. Legyen $\{X_n : n \geqslant 1\}$ egy véges állapotterű Markov-lánc. Igaz-e, hogy ekkor a Markov-láncnak létezik stacionárius eloszlása?

Megoldás. A válasz: **Igen.** *Indoklás:* Egy véges állapotterű Markov-láncnak mindig létezik stacionárius eloszlása, de nem feltétlenül egyértelműen. Ugyanis, tanultuk, hogy egy véges állapotterű Markov-lánc állapotai ergodikusak vagy átmenetiek (azaz nincs null állapot) és mindig van legalább egy ergodikus állapot. Így egy véges állapotterű Markov-láncnak mindig van ergodikus osztálya. Felhasználva, hogy a stacionárius eloszlások (minden esetben) az ergodikus osztályokon egyértelműen meghatározott stacionárius eloszlások keverékei (lásd, pl., K. L. Chung [1], 35. old.), kapjuk, hogy egy Markov-láncnak akkor és csak akkor van stacionárius eloszlása, ha van ergodikus osztálya. Mivel egy véges állapotterű Markov-láncnak mindig van ergodikus osztálya, kapjuk, hogy mindig van stacionárius eloszlása. □

4.11. Feladat. Legyen $\{X_n : n \geqslant 1\}$ egy olyan véges állapotterű Markov-lánc, melynek egyértelműen létezik stacionárius eloszlása. Igaz-e, hogy ekkor $\{X_n : n \geqslant 1\}$ fázisterében egyetlen ergodikus osztály van?

Megoldás. A válasz: **Igen.** *Indoklás:* Az előző feladat indoklása alapján. □

4.12. Feladat. Legyen $\{X_n : n \geqslant 0\}$ egy tetszőleges Markov-lánc. Igaz-e, hogy ennek a Markov-láncnak akkor és csak akkor létezik stacionárius eloszlása, ha létezik a fázisterében legalább egy ergodikus osztály?

Megoldás. A válasz: **Igen.** Indoklás: K. L. Chung [1], 35. oldala alapján. □

4.13. Feladat. **[Szevasztyanov–Csisztyakov–Zubkov [9], 5.1.27 Feladat]** Legyenek $\{X_n : n \geqslant 0\}$ és $\{X'_n : n \geqslant 0\}$ Markov-láncok $\{1, \ldots, N\}$ állapottérrel és P, ill. P' átmenetvalószínűségi mátrixokkal. Tegyük fel, hogy egyértelműen létezik stacionárius eloszlásuk $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_N)$ és $\pi' = (\pi'_1, \ldots, \pi'_N)$. Következik-e a P és P' mátrixok közelségéből (pl.: a $\sum_{i,j=1}^N |p_{i,j} - p'_{i,j}|$ mennyiség kicsi értékéből) a π és π' vektortok közelsége (pl.: a $\sum_{i=1}^N |\pi_i - \pi'_i|$ kicsi értéke)?

Megoldás. **Nem.** Legyen a fázistér $\{1, 2\}$, azaz $N = 2$. Tekintsük tetszőleges $\varepsilon \in (0, 1)$ esetén a

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1-\varepsilon^2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{és a} \quad P' = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1-\varepsilon^2 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix} \end{array}$$

átmenetvalószínűségi mátrixokat. Határozzuk meg a stacionárius eloszlásukat (melyek most egyértelműek, hiszen egy véges állapotterű, irreducibilis Markov-lánc ergodikus és így egyértelműen létezik stacionárius eloszlása). Ezek a következő egyenletrendszerek megoldásai:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (1-\varepsilon)\pi_1 + \varepsilon^2 \pi_2, \\ \pi_2 &= \varepsilon \pi_1 + (1-\varepsilon^2)\pi_2, \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
\pi_1' &= (1-\varepsilon^2)\pi_1' + \varepsilon\pi_2',\\
\pi_2' &= \varepsilon^2\pi_1' + (1-\varepsilon)\pi_2',\\
\pi_1' &+ \pi_2' = 1.
\end{aligned}$$

Így

$$\pi_1 = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad \pi_2 = \frac{1}{1+\varepsilon} \qquad \text{és} \qquad \pi_1' = \frac{1}{1+\varepsilon}, \quad \pi_2' = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

A P és P' mátrixokra számolt $\sum_{i,j=1}^N |p_{i,j} - p_{i,j}'|$ mennyiség $4\varepsilon(1-\varepsilon)$, így ha $\varepsilon \to 0$, akkor ez tart 0-hoz. A π és π' vektorokra számolt $\sum_{i=1}^N |\pi_i - \pi_i'|$ mennyiség $2(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)$, így ha $\varepsilon \to 0$ ez tart 2-höz, ezért a π és π' vektorok nincsenek egymáshoz közel.

Ahogy a P és P' mátrixok egyre „közelebb kerülnek” egymáshoz, a π és π' vektorok egyre „távolabb” és a két „szélsőséges” esethez tartanak

$$(\pi_1, \pi_2) \to (0,1) \qquad \text{és} \qquad (\pi_1', \pi_2') \to (1,0), \quad \text{ha} \quad \varepsilon \to 0.$$

□

4.14. Tétel. (Doeblin-tétel) *Legyen $\{X_n : n \geqslant 0\}$ egy homogén Markov-lánc. Jelölje P az egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixát, és I a fázisterét. Tegyük fel, hogy létezik olyan $j_0 \in I$ állapot és $\varepsilon > 0$, hogy $p_{i,j_0} \geqslant \varepsilon$ minden $i \in I$ esetén. Ekkor az $\{X_n : n \geqslant 0\}$ Markov-láncnak egyértelműen létezik π stacionárius eloszlása, melyre fennáll, hogy $\pi_{j_0} \geqslant \varepsilon$, és tetszőleges $\mu = (\mu_i)_{i\in I}$ kezdeti eloszlásra*

$$\|\mu P^n - \pi\|_v \leqslant 2(1-\varepsilon)^n, \qquad n \geqslant 0,$$

ahol $\|\mu P^n - \pi\|_v$ jelöli μP^n és π ún. variációs távolságát:

$$\|\mu P^n - \pi\|_v := \sum_{i\in I} |(\mu P^n - \pi)_i|.$$

4.15. Feladat. Legyen $\{X_n : n \geqslant 1\}$ egy véges állapotterű Markov-lánc. Igaz-e, hogy ha létezik olyan állapot, mely minden állapotból elérhető, akkor a Markov-láncnak (egyértelműen) létezik stacionárius eloszlása?

Megoldás. A válasz: **Igen.** *Indoklás:* A Doeblin-tétel miatt (4.14. Tétel) (egyértelművel is igen a válasz). □

4.16. Feladat. **[Ross [7], Chapter 4, Example 4a]** Tekintsük az 1.4. Példát (időjárás előrejelzés). Határozzuk meg az ott definiált, az időjárás naponkénti változását leíró $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc stacionárius eloszlását (feltéve, ha létezik)! Feltételezzük, hogy $0 < \alpha, \beta < 1$.

Megoldás. Az átmenetvalószínűségi mátrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

Így ez a Markov-lánc irreducibilis és aperiódikus. A stacionárius eloszlást (feltéve, ha létezik) meghatározó egyenletrendszer

$$\begin{aligned} &\pi_0 = \alpha\pi_0 + \beta\pi_1, \\ &\pi_1 = (1-\alpha)\pi_0 + (1-\beta)\pi_1, \\ &\pi_0 + \pi_1 = 1. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} &(\alpha-1)\pi_0 + \beta\pi_1 = 0, \\ &(1-\alpha)\pi_0 + (-\beta)\pi_1 = 0, \\ &\pi_0 + \pi_1 = 1. \end{aligned}$$

A 3. egyenletet szorozva β-val, majd hozzáadva a 2. egyenlethez kapjuk, hogy

$$\pi_0 = \frac{\beta}{1+\beta-\alpha}, \qquad \pi_1 = \frac{1-\alpha}{1+\beta-\alpha}.$$

Mivel létezik egyértelmű pozitív megoldás, az 4.2. Megjegyzés alapján (π_0, π_1) az egyértelmű stacionárius eloszlás és a Markov-lánc ergodikus. A megoldás alapján, hosszú távon az idő $\beta/(1+\beta-\alpha)$-ad részében lesz eső (lásd, a 4.2. Megjegyzést).

Másként is érvelhetünk. Mivel a szóban forgó Markov-lánc irreducibilis és véges állapotterű, ezért ergodikus is. Így létezik egyértelmű stacionárius eloszlása. Azaz a stacionárius eloszlást meghatározó egyenletrendszernek létezik egyértelmű pozitív megoldása. Így ezt az megoldást kell megkeresnünk. □

4.17. Feladat. [Szevasztyanov–Csisztyakov–Zubkov [9], 5.1.11 Feladat] Egy szabályos dobókockát azonos valószínűséggel, és az előző mozgatásoktól függetlenül, folyamatosan átfordítjuk az egyik oldaláról a négy szomszédos oldal valamelyikére. Milyen határértékhez tart $n \to \infty$ esetén annak a valószínűsége, hogy az n-edik forgatás után a kocka a „6"-os oldalára került, feltéve, ha kezdéskor is ugyanezen az oldalán állt?

Megoldás. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $X_n = i$, ha a kocka az n-edik forgatás után az „i"-edik oldalára került és legyen $X_0 = 6$. Ekkor $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc, melynek fázistere $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és átmenetvalószínűségi mátrixa (a kocka szemközti oldalain levő számok összege 7)

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Mi a

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 6 \mid X_0 = 6) = \lim_{n\to\infty} p_{6,6}^{(n)}$$

határértéket keressük. Mivel ez a Markov-lánc irreducibilis, aperiódikus és véges állapotterű, az általános eredmények alapján (lásd, a 4.2. Megjegyzést) kapjuk, hogy ergodikus és

$$\lim_{n\to\infty} p_{6,6}^{(n)} = \pi_6,$$

ahol π_i, $i = 1, \ldots, 6$, az egyértelműen létező stacionárius eloszlás. Most ezt határozzuk meg. Az (4.1) egyenletrendszer a konkrét esetben

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4 + \frac{1}{4}\pi_5, \\
\pi_2 &= \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4 + \frac{1}{4}\pi_6, \\
\pi_3 &= \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_5 + \frac{1}{4}\pi_6, \\
\pi_4 &= \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_5 + \frac{1}{4}\pi_6, \\
\pi_5 &= \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4 + \frac{1}{4}\pi_6, \\
\pi_6 &= \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4 + \frac{1}{4}\pi_5, \\
& \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1.
\end{aligned}$$

Ennek megoldása $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = \pi_6 = 1/6$. Ezért

$$\lim_{n\to\infty} p_{6,6}^{(n)} = \frac{1}{6}.$$

□

4.18. Feladat. [Ross [7], Chapter 4, Example 4b] Tekintsük az 1.6. Példát (hangulatjelentés). Határozzuk meg, hogy hosszú távon az idő hányad részében lesz Józsi jókedvű, semleges ill. mogorva!

Megoldás. A

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

átmenetvalószínűségi mátrixú homogén Markov-lánc irreducibilis, aperiódikus és véges állapotterű, így ergodikus és egyértelműen létező stacionárius eloszlását a

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= 0.5\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.2\pi_2,\\
\pi_1 &= 0.4\pi_0 + 0.4\pi_1 + 0.3\pi_2,\\
\pi_2 &= 0.1\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.5\pi_2,\\
\pi_0 &+ \pi_1 + \pi_2 = 1
\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Átrendezve

$$\begin{aligned}
-0.5\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.2\pi_2 &= 0,\\
0.4\pi_0 - 0.6\pi_1 + 0.3\pi_2 &= 0,\\
0.1\pi_0 + 0.3\pi_1 - 0.5\pi_2 &= 0,\\
\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 &= 1.
\end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$\pi_0 = \frac{21}{62}, \quad \pi_1 = \frac{23}{62}, \quad \pi_2 = \frac{18}{62}.$$

Így Józsi hosszú távon idejének $21/62$-ed részében jókedvű, $23/62$-ed részében semleges, a többiben pedig mogorva. (Valószínűleg nem Gáll Józsefről Mihályról van szó.) □

4.19. Feladat. Tekintsünk két érmét. Az elsővel dobva 0.6, a másodikkal dobva 0.5 valószínűséggel kapunk fejet. A két érme közül egyenlő valószínűséggel választunk egyet és addig dobálunk vele míg írást nem kapunk, amikor ez megtörtént cserélünk, és a másik érmével dobálunk addig, míg írást nem kapunk, és így tovább.

(i) Hosszú távon az idő hányad részében dobálunk az első érmével?

(ii) Feltéve, hogy az első érmével dobunk először mi a valószínűsége, hogy az ötödik dobás a második érmével történik?

Megoldás. Minden $n \geqslant 1$ esetén legyen $X_n = 1$, ha az n-edik alkalomkor az első, és $X_n = 2$, ha az n-edik alkalomkor a második érmével dobunk. Ekkor $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc, melynek fázistere $\{1, 2\}$ és átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & \;\;\;2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Például $p_{1,1} = 0.6$, mert ha az n-edik alkalommal az 1. érmével dobunk, akkor abban az esetben dobunk az $n+1$-edik alkalommal is az 1. érmével, ha az n-edik dobáskor fejet dobunk vele, ennek valószínűsége pedig 0.6.

Mivel ez a Markov-lánc irreducibilis, aperiódikus és véges állapotterű, kapjuk, hogy ergodikus és az egyértelműen létező (π_1, π_2) stacionárius eloszlását a következő egyenletrendszer (pozitív) megoldásaként kapjuk

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= 0.6\pi_1 + 0.5\pi_2,\\
\pi_2 &= 0.4\pi_1 + 0.5\pi_2,\\
\pi_1 &+ \pi_2 = 1.
\end{aligned}$$

Megoldva, $\pi_1 = 5/9$ és $\pi_2 = 4/9$, így hosszú távon az idő $5/9$-ed részében dobálunk az 1. érmével.

A (ii) kérdésben a $p_{1,2}^{(4)}$ valószínűségre vagyunk kíváncsiak, ahol $P^{(4)} = (p_{i,j}^{(4)})_{i,j=1,2}$ a 4-lépéses átmenetvalószínűségi mátrix. Mivel $P^{(4)} = P^4 = P^2P^2$, kapjuk, hogy

$$P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.56 & 0.44 \\ 0.55 & 0.45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.56 & 0.44 \\ 0.55 & 0.45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5556 & 0.4444 \\ 0.5555 & 0.4445 \end{pmatrix},$$

és így $p_{1,2}^{(4)} = 0.4444$. □

4.20. Feladat. Ugyanazt a kísérletet ismételjük egymás után és a kísérlet minden egyes elvégzése után megállapítjuk, hogy az sikeres volt vagy eredménytelen. Feltételezzük, hogy ha az utolsó két kísérlet sikeres volt, akkor a következő kísérlet 0.8 valószínűséggel lesz sikeres, egyébként a következő kísérlet 0.5 valószínűséggel lesz sikeres. Hosszú távon a kísérletek hányad része lesz sikeres?

Megoldás. Legyen minden $n \geqslant 1$ esetén

$$\begin{aligned}
X_n &= 0 \quad \text{ha az utolsó két kísérlet sikeres,}\\
X_n &= 1 \quad \text{ha az utolsó kísérlet sikeres, de az azt megelőző nem,}\\
X_n &= 2 \quad \text{ha az utolsó kísérlet nem sikeres.}
\end{aligned}$$

(Vegyük észre, hogy ha az utolsó kísérlet nem sikeres, akkor az azt megelőzőt nem specifikáljuk.) Ekkor $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc, melynek fázistere $\{0, 1, 2\}$ és átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Például $p_{0,0} = 0.8$, mert az S=sikeres, N=nem sikeres jelölésekkel $0 = SS$, $1 = NS$, $2 = *N$ (ahol $*$ a bármit jelöli), és így kapjuk, hogy $p_{0,0}$ annak a valószínűsége, hogy SS-ből SS-be megyünk át, ennek valószínűsége pedig (a feltétel miatt) 0.8. Hasonlóan $p_{2,1} = 0.5$, mert ez annak a valószínűsége, hogy $*N$-ből NS-be megyünk át, ez pedig szintén a feltétel miatt 0.5.

Mivel ez a Markov-lánc irreducibilis, aperiódikus és véges állapotterű, kapjuk, hogy ergodikus és az egyértelműen létező (π_0, π_1, π_2) stacionárius eloszlását a következő egyenletrendszer (pozitív) megoldásaként kapjuk

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= 0.8\pi_0 + 0.5\pi_1, \\
\pi_1 &= 0.5\pi_2, \\
\pi_2 &= 0.2\pi_0 + 0.5\pi_1 + 0.5\pi_2, \\
\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 &= 1.
\end{aligned}$$

Megoldva

$$\pi_0 = \frac{5}{11}, \qquad \pi_1 = \frac{2}{11}, \qquad \pi_2 = \frac{4}{11}.$$

Mivel egy kísérlet sikeres kimenetele annak felel meg, hogy a Markov-lánc a 0 vagy az 1 állapotok valamelyikében van, kapjuk, hogy a keresett valószínűség

$$\pi_0 + \pi_1 = \frac{7}{11}.$$

Így hosszú távon a kísérletek $7/11$-ed része lesz sikeres. □

4.21. Feladat. [**Szűcs Gábor feladatsorából [10]**] Egy automatikus öntözőrendszer két lehetséges állapota ON és OFF. A berendezés óránként megvizsgálja a talaj nedvességtartalmát, és eldönti, hogy szükség van-e locsolásra a következő órában. Ha szükség van locsolásra, úgy ON állapotba kapcsol és a következő órában locsol; ha nincs szükség locsolásra, úgy OFF állapotba kapcsol és a következő órában nem locsol. Agrármérnök barátunk szerint a rendszer 0.5 valószínűséggel kezd el locsolni, ha az előző órában nem üzemelt, és 0.3 valószínűséggel fog leállni, ha az előző órában öntözött. Legyen X_n az öntözőrendszer állapota n órával az üzembeállítás után.

(i) Mekkora valószínűséggel fog az öntözőrendszer (üzembeállítás után) két órán át állni, majd ezután bekapcsolni, ha üzembehelyezéskor az öntözés nem működött?

(ii) Hosszú távon az idő milyen hányadában fog az öntözőrendszer locsolni?

Megoldás. Jelölje a továbbiakban 1 az ON állapotot, 0 pedig az OFF állapotot. Ekkor $\{X_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc, melynek fázistere $\{0, 1\}$ és egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \;\;1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(i): A $P(X_2 = 1, X_1 = 0 \,|\, X_0 = 0)$ feltételes valószínűséget kell meghatározni. Felhasználva, hogy a Markov-lánc homogén kapjuk, hogy

$$P(X_2 = 1, X_1 = 0 \,|\, X_0 = 0) = p_{0,0}p_{0,1} = (0.5)^2 = 0.25.$$

(ii): A szóban forgó Markov-lánc irreducibilis és aperiódikus. A stacionárius eloszlást (feltéve, ha létezik) meghatározó egyenletrendszer

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= 0.5\pi_0 + 0.3\pi_1, \\
\pi_1 &= 0.5\pi_0 + 0.7\pi_1, \\
\pi_0 + \pi_1 &= 1.
\end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$\pi_0 = 0.375, \qquad \pi_1 = 0.625.$$

Mivel létezik egyértelmű pozitív megoldás, az 4.2. Megjegyzés alapján (π_0, π_1) az egyértelmű stacionárius eloszlás és a Markov-lánc ergodikus. A megoldás alapján, hosszú távon az idő 0.625-öd részében fog az öntözőrendszer locsolni. □

4.22. Feladat. (munkaszociológia) [Ross [7], Chapter 4, Example 4c] Munkaszociológusok számára fontos kérdés egy nagyobb közösségben az alacsony (A), közepes (K) és magas (M) jövedelműek arányának meghatározása. Egy lehetséges matematikai megközelítési mód azt feltételezni, hogy az egymást követő generációk jövedelmi viszonyait egy Markov-lánc írja le. Csak a férfi populációt vizsgáljuk és feltételezzük, hogy mindenkinek pontosan 1 fia születik. Továbbá azt is feltételezzük, hogy egy férfi anyagi helyzetét csak az határozza meg, hogy milyen az apjának az anyagi helyzete és az már nem, hogy milyen a nagyapjának az anyagi helyzete. Az átmenetvalószínűségi mátrix legyen

$$\begin{array}{c} \\ A \\ K \\ M \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & K & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.45 & 0.48 & 0.07 \\ 0.05 & 0.7 & 0.25 \\ 0.01 & 0.5 & 0.49 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(Ezt úgy értelmezhetjük tehát, hogy például egy közepes jövedelmű apa gyereke 0.05 valószínűséggel lesz alacsony jövedelmű, 0.7 valószínűséggel lesz közepes jövedelmű, és 0.25 valószínűséggel lesz magas jövedelmű.) Határozzuk meg, hogy hosszú távon a férfiak hányad része alacsony, közepes, ill. magas jövedelmű!

Megoldás. Minden $n \geqslant 1$-re legyen $X_n = A$, K, vagy M aszerint, hogy az n-edik generációban levő leszármazott milyen jövedelmű. Ekkor $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc lesz a fenti átmenetvalószínűségi mátrixszal. Adódik az is, hogy irreducibilis, aperiódikus és véges állapotterű, így ergodikus és egyértelműen létező stacionárius eloszlása a következő egyenletrendszer (egyértelmű) megoldása:

$$\begin{aligned}
\pi_A &= 0.45\pi_A + 0.05\pi_K + 0.01\pi_M, \\
\pi_K &= 0.48\pi_A + 0.7\pi_K + 0.5\pi_M, \\
\pi_M &= 0.07\pi_A + 0.25\pi_K + 0.49\pi_M, \\
\pi_A + \pi_K + \pi_M &= 1.
\end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$\pi_A = 0.062389, \qquad \pi_K = 0.62344, \qquad \pi_M = 0.314171.$$

Ez azt jelenti, hogy hosszú távon a férfiak 6.2%-a lesz alacsony jövedelmű, 62.3%-a közepes jövedelmű és 31.5%-a magas jövedelmű. $\square$

4.23. Definíció. *Legyen* $\{X_n : n \geqslant 0\}$ *egy Markov-lánc, melynek* $P = (p_{i,j})_{i,j\in I}$ *az átmenetvalószínűségi mátrixa. Azt mondjuk, hogy* P **duplán sztochasztikus**, *ha minden oszlopösszeg 1-el egyenlő, azaz ha* $\sum_{i\in I} p_{i,j} = 1, \ \forall\, j \in I$ *esetén.*

4.24. Feladat. [Ross [7], Chapter 4, Problem 13] Legyen $\{X_n : n \geqslant 0\}$ egy irreducibilis, aperiódikus Markov-lánc, melynek fázistere $\{0, 1, \ldots, M\}$ és $P = (p_{i,j})_{i,j=0,1,\ldots,M}$ átmenetvalószínűségi mátrixa duplán sztochasztikus. Mutassuk meg, hogy a Markov-lánc ergodikus és egyértelmű stacionárius eloszlása

$$\pi_j = \frac{1}{M+1}, \qquad j = 0, 1, \ldots, M.$$

(Ez nem más, mint a $\{0, 1, \ldots, M\}$ halmazon az egyenletes eloszlás.)

Megoldás. Az 4.2. Megjegyzés alapján azt kell megmutatni, hogy $\pi_j = 1/(M + 1)$, $j = 0, 1, \ldots, M$ kielégíti a

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i p_{i,j},$$
$$\sum_{i=0}^{M} \pi_i = 1$$

egyenletrendszert. (π_j pozitivitásával nincs gond.) Ezek teljesülnek felhasználva azt, hogy $\sum_{i=0}^{M} p_{i,j} = 1$, $j = 0, 1, \ldots, M$ esetén. $\square$

4.25. Feladat. Tegyük fel, hogy két repülőgéptársaság, A és B közül választhatunk minden utunk során. Ha A-val repültünk legutóbbi utunk során, úgy a következő alkalommal A-t 0.85, B-t 0.15 valószínűséggel választjuk. Ha B-vel repültünk legutóbbi utunk során, úgy a következő alkalommal A-t 0.1, B-t 0.9 valószínűséggel választjuk. Feltételezzük, hogy évente kétszer repülünk. Jelenleg az A repülőgéptársaság 30%-os részesedést mondhat magáénak a piacból, így azt feltételezzük, hogy az évbeli első utunkhoz 0.3 valószínűséggel választjuk az A repülőgéptársaságot. Hogyan alakul 2 év elmúltával a helyzet?

Megoldás. Minden $n \geqslant 1$ esetén legyen $X_n = A$ vagy $X_n = B$ annak megfelelően, hogy az n-edik utunk során az A vagy a B repülőgéptársasággal utaztunk. Ekkor $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc, melynek fázistere $\{A, B\}$ és átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

A Markov-lánc kezdeti eloszlása pedig $q_1 = (0.3, 0.7)$, azaz

$$P(X_1 = A) = 0.3, \qquad P(X_1 = B) = 0.7.$$

Nekünk a $q_1 P^4$ sorvektor első koordinátájára van szükségünk. Ekkor

$$\begin{aligned} q_1 P^4 &= \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7375 & 0.2625 \\ 0.175 & 0.825 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5898 & 0.4102 \\ 0.2734 & 0.7266 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36832 & 0.63168 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Így két év elteltével az A repülőgéptársaságot körülbelül 0.368 valószínűséggel választjuk. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy két év elteltével az A repülőgéptársaság részesedése a piacból kb. 36.8% (azt feltételezve, hogy az emberek évente kétszer repülnek). □

A következő feladat az operációkutatáshoz is kapcsolódik.

4.26. Feladat. Tegyük fel, hogy négy repülőgéptársaság, A, B, C és D közül választhatunk minden utunk során. Feltételezzük, hogy hónaponta 1-szer repülünk. Minden $n \geqslant 1$ esetén legyen $X_n = A, B, C$ vagy D annak megfelelően, hogy az n-edik utunk során az A, B, C vagy a D repülőgéptársasággal utaztunk. Feltételezzük, hogy $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc, melynek átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.95 & 0.02 & 0.02 & 0.01 \\ 0.05 & 0.9 & 0.02 & 0.03 \\ 0.1 & 0.05 & 0.83 & 0.02 \\ 0.13 & 0.13 & 0.02 & 0.72 \end{pmatrix} \end{array}.$$

A jelen hónapban (1. hónap) az A, B, C és D társaságok részesedése a piacból rendre 45%, 23%, 20%, és 12%.

(i) Két hónap múlva (azaz a 3. hónapban) hogyan alakulnak a részesedések?

(ii) Hosszú távon hogyan alakulnak a részesedések?

(iii) Az A repülőgéptársaság vezetése úgy határoz, hogy nekik, ha törik, ha szakad hosszú távon 75%-os piaci részesedést kell produkálniuk. Ezért úgy döntenek meghamisítják a statisztikai adatok alapján felállított P átmenetvalószínűségi mátrixot. Azokat az adatokat manipulálják, melyek arra vonatkoznak, hogy egy őket választó utas következő útja melyik társaságnál lesz. Mi legyen az új átmenetvalószínűségi mátrix?

(A részesedést matematikailag úgy értjük, hogy egy átlagos utas (így mi is) ennek megfelelő arányokban választja az A, B, C és D repülőgéptársaságokat.)

Megoldás. Az $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc kezdeti eloszlása

$$q_1 = (0.45, 0.23, 0.2, 0.12).$$

Az (i) kérdésre a válasz $q_1 P^2$ koordinátái. Ekkor

$$q_1 P^2 = \begin{pmatrix} 0.4943 & 0.2492 & 0.1674 & 0.0889 \end{pmatrix}.$$

(ii) A lánc stacionárius eloszlását kell meghatározni. Az ezt meghatározó egyenletrendszer

$$\begin{aligned}
&\pi_A = 0.95\pi_A + 0.05\pi_B + 0.1\pi_C + 0.13\pi_D,\\
&\pi_B = 0.02\pi_A + 0.9\pi_B + 0.05\pi_C + 0.13\pi_D,\\
&\pi_C = 0.02\pi_A + 0.02\pi_B + 0.83\pi_C + 0.02\pi_D,\\
&\pi_D = 0.01\pi_A + 0.03\pi_B + 0.02\pi_C + 0.72\pi_D,\\
&\pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D = 1.
\end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$\pi_A = 0.5965, \qquad \pi_B = 0.2433, \qquad \pi_C = 0.1052, \qquad \pi_D = 0.0548.$$

(iii) Egy olyan P'-vel jelölt átmenetvalószínűségi mátrixot kell keresnünk, melynek stacionárius eloszlása

$$\begin{pmatrix} 0.75 & \pi'_B & \pi'_C & \pi'_D \end{pmatrix}$$

és

$$P' = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ 0.05 & 0.9 & 0.02 & 0.03 \\ 0.1 & 0.05 & 0.83 & 0.02 \\ 0.13 & 0.13 & 0.02 & 0.72 \end{pmatrix},$$

ahol

$$\begin{aligned}
&p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1,\\
&\pi'_B + \pi'_C + \pi'_D = 0.25,\\
&p_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4,\\
&\pi'_B \geqslant 0,\ \pi'_C \geqslant 0,\ \pi'_D \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Ezért annak kell fennállnia, hogy

$$\begin{aligned}
&0.75 = p_1 0.75 + 0.05\pi'_B + 0.1\pi'_C + 0.13\pi'_D,\\
&\pi'_B = p_2 0.75 + 0.9\pi'_B + 0.05\pi'_C + 0.13\pi'_D,\\
&\pi'_C = p_3 0.75 + 0.02\pi'_B + 0.83\pi'_C + 0.02\pi'_D,\\
&\pi'_D = p_4 0.75 + 0.03\pi'_B + 0.02\pi'_C + 0.72\pi'_D,\\
&\pi'_B + \pi'_C + \pi'_D = 0.25,\\
&p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1,\\
&p_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4,\\
&\pi'_B \geqslant 0,\ \pi'_C \geqslant 0,\ \pi'_D \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Itt 7 ismeretlen van és 6 lineáris egyenlet, így valamilyen célfüggvényt kell választanunk, hogy a 6 lineáris egyenletből álló lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza ne egy lineáris sokaság (lineáris altér eltoltja) legyen. Természetes azt a célt (célfüggvényt) választani, hogy p_1 legyen maximális, azaz, ha valaki A-val utazik, akkor annak legyen a legnagyobb a valószínűsége, hogy újra A-val utazik. Így egy lineáris programozási feladathoz jutunk (LP-feladat), ahol a p_1 célfüggvényt kell maximalizálni az előző feltételek mellett kiegészítve még azokat az $\pi'_B, \pi'_C, \pi'_D \geqslant 0$, és $p_1, p_2, p_3, p_4 \geqslant 0$ sorokkal. Az R nevű programmal megoldva ezt az LP-feladatot kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &p_1 \approx 0.98, \qquad &&p_2 \approx 0.02, \qquad &&p_3 = p_4 = 0, \\ &\pi'_B \approx 0.2, \qquad &&\pi'_C \approx 0.026, \qquad &&\pi'_D = 0.024. \end{aligned}$$

□

4.27. Feladat. Évi és Hemü vasárnaponként tánciskolába járnak, és az órák előtt ketten otthon gyakorolnak. Azonban ez a gyakorlás nem mindig jön össze. Ha egy vasárnap gyakorolnak, akkor a következő vasárnap 0.4 valószínűséggel nem gyakorolnak, és ez az esetek $2/3$-ad részében köszönhető Hemünek. Ha egy vasárnap nem gyakorolnak, akkor a következő vasárnap 0.3 valószínűséggel nem gyakorolnak, és ez az esetek $4/5$-ad részében köszönhető Hemünek. Azért, hogy ösztönözzék magukat a következő rendszerben állapodnak meg. Ha Hemü miatt nem gyakorolnak egy vasárnap, akkor Hemü 500 forintot, ha Évi miatt nem gyakorolnak egy vasárnap, akkor Évi 450 forintot tesz be egy közös kasszába (amit utána majd együtt használnak fel, valami jó dologra). Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje ξ_n az n-edik vasárnap a kasszába befizetett összeget. Határozzuk meg a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n$ határértéket! (Ezt a határértéket interpretálhatjuk úgy, hogy hosszú távon várhatóan ennyivel nő 1 hét alatt a közös kasszában levő összeg.)

Megoldás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén ξ_n értékkészlete $\{0, 450, 500\}$, és így

$$\mathbb{E}\xi_n = 450\mathbb{P}(\xi_n = 450) + 500\mathbb{P}(\xi_n = 500), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Célunk a továbbiakban a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\xi_n = 450)$ és $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\xi_n = 500)$ határértékek kiszámolása. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $X_n = 1$, ha az n-edik vasárnap gyakorol Évi és Hemü, illetve $X_n = 0$, ha az n-edik vasárnap nem gyakorolnak. Ekkor $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc, melynek egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Mivel $\{X_n : n \geqslant 1\}$ irreducibilis, véges állapotterű, aperiódikus, kapjuk, hogy ergodikus és így egyértelműen létezik stacionárius eloszlása, melyet a következő egyenletrendszer megoldásaként kapunk

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= 0.6\pi_1 + 0.7\pi_0,\\
\pi_0 &= 0.4\pi_1 + 0.3\pi_0,\\
\pi_1 + \pi_0 &= 1.
\end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva $\pi_1 = 7/11$ és $\pi_0 = 4/11$.

Így

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_n = 450) &= \mathbb{P}(\xi_n = 450 \,|\, X_{n-1} = 0)\mathbb{P}(X_{n-1} = 0) + \mathbb{P}(\xi_n = 450 \,|\, X_{n-1} = 1)\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\\
&= \mathbb{P}(\xi_n = 450, X_n = 1 \,|\, X_{n-1} = 0)\mathbb{P}(X_{n-1} = 0)\\
&\quad + \mathbb{P}(\xi_n = 450, X_n = 0 \,|\, X_{n-1} = 0)\mathbb{P}(X_{n-1} = 0)\\
&\quad + \mathbb{P}(\xi_n = 450, X_n = 1 \,|\, X_{n-1} = 1)\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\\
&\quad + \mathbb{P}(\xi_n = 450, X_n = 0 \,|\, X_{n-1} = 1)\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\\
&= \mathbb{P}(\xi_n = 450 \,|\, X_n = 1, X_{n-1} = 0)\mathbb{P}(X_n = 1 \,|\, X_{n-1} = 0)\mathbb{P}(X_{n-1} = 0)\\
&\quad + \mathbb{P}(\xi_n = 450 \,|\, X_n = 0, X_{n-1} = 0)\mathbb{P}(X_n = 0 \,|\, X_{n-1} = 0)\mathbb{P}(X_{n-1} = 0)\\
&\quad + \mathbb{P}(\xi_n = 450 \,|\, X_n = 1, X_{n-1} = 1)\mathbb{P}(X_n = 1 \,|\, X_{n-1} = 1)\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\\
&\quad + \mathbb{P}(\xi_n = 450 \,|\, X_n = 0, X_{n-1} = 1)\mathbb{P}(X_n = 0 \,|\, X_{n-1} = 1)\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\\
&= 0 \cdot 0,7 \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = 0) + \frac{1}{5} \cdot 0,3 \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = 0) + 0 \cdot 0,6 \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\\
&\quad + \frac{1}{3} \cdot 0,4 \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\\
&= \frac{0,3}{5}\mathbb{P}(X_{n-1} = 0) + \frac{0,4}{3}\mathbb{P}(X_{n-1} = 1).
\end{aligned}$$

Hasonlóan,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_n = 500) &= \mathbb{P}(\xi_n = 500 \,|\, X_{n-1} = 0)\mathbb{P}(X_{n-1} = 0) + \mathbb{P}(\xi_n = 500 \,|\, X_{n-1} = 1)\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\\
&= \mathbb{P}(\xi_n = 500, X_n = 1 \,|\, X_{n-1} = 0)\mathbb{P}(X_{n-1} = 0)\\
&\quad + \mathbb{P}(\xi_n = 500, X_n = 0 \,|\, X_{n-1} = 0)\mathbb{P}(X_{n-1} = 0)\\
&\quad + \mathbb{P}(\xi_n = 500, X_n = 1 \,|\, X_{n-1} = 1)\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\\
&\quad + \mathbb{P}(\xi_n = 500, X_n = 0 \,|\, X_{n-1} = 1)\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\\
&= \mathbb{P}(\xi_n = 500 \,|\, X_n = 1, X_{n-1} = 0)\mathbb{P}(X_n = 1 \,|\, X_{n-1} = 0)\mathbb{P}(X_{n-1} = 0)\\
&\quad + \mathbb{P}(\xi_n = 500 \,|\, X_n = 0, X_{n-1} = 0)\mathbb{P}(X_n = 0 \,|\, X_{n-1} = 0)\mathbb{P}(X_{n-1} = 0)\\
&\quad + \mathbb{P}(\xi_n = 500 \,|\, X_n = 1, X_{n-1} = 1)\mathbb{P}(X_n = 1 \,|\, X_{n-1} = 1)\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\\
&\quad + \mathbb{P}(\xi_n = 500 \,|\, X_n = 0, X_{n-1} = 1)\mathbb{P}(X_n = 0 \,|\, X_{n-1} = 1)\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\\
&= 0 \cdot 0,7 \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = 0) + \frac{4}{5} \cdot 0,3 \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = 0) + 0 \cdot 0,6 \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\\
&\quad + \frac{2}{3} \cdot 0,4 \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\\
&= \frac{1,2}{5}\mathbb{P}(X_{n-1} = 0) + \frac{0,8}{3}\mathbb{P}(X_{n-1} = 1).
\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $\{X_n : n \geqslant 1\}$ irreducibilis, véges állapotterű és aperiódikus, kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{n-1} = 0) = \pi_0 = \frac{4}{11}, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{n-1} = 1) = \pi_1 = \frac{7}{11}.$$

Így

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\xi_n = 450) = \frac{0,3}{5}\cdot\frac{4}{11} + \frac{0,4}{3}\cdot\frac{7}{11},$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\xi_n = 500) = \frac{1,2}{5}\cdot\frac{4}{11} + \frac{0,8}{3}\cdot\frac{7}{11}.$$

Ezért

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n &= 450 \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\xi_n = 450) + 500 \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\xi_n = 500)\\
&= 450\left(\frac{0,3}{5}\cdot\frac{4}{11} + \frac{0,4}{3}\cdot\frac{7}{11}\right) + 500\left(\frac{1,2}{5}\cdot\frac{4}{11} + \frac{0,8}{3}\cdot\frac{7}{11}\right)\\
&= 0,3(90+400)\frac{4}{11} + 0.4\left(150 + \frac{1000}{3}\right)\frac{7}{11} = \frac{5824}{33} \approx 176.4.
\end{aligned}$$

Egy hasonló (itt részletesen ki nem fejtett) logika szerint $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\xi_n$ közvetlenül is megkapható az alábbi módon:

$$\frac{7}{11}\frac{4}{10}\Big(500\frac{2}{3} + 450\frac{1}{3}\Big) + \frac{4}{11}\frac{3}{10}\Big(500\frac{4}{5} + 450\frac{1}{5}\Big) = \frac{5824}{33} \approx 176.4.$$

□

4.28. Feladat. Remy Bonjasky, a holland K1 harcos, hetente egy-két mérkőzést vív. Az évad elején vagyunk. Előzetes statisztikákból tudjuk, hogy ha egymás után legalább 3 meccset megnyert, akkor a következő meccset 0.6 valószínűséggel nyeri meg. Ha egymás után 2 meccset nyert meg, akkor a következő meccset 0.7 valószínűséggel nyeri meg, minden más esetben a következő meccset 0.8 valószínűséggel nyeri meg. Adjunk közelítő becslést arra, hogy milyen valószínűséggel nyeri meg R. Bonjasky az év végén sorra kerülő K1 világbajnokságot? Itt 8 ország bajnoka méri össze erejét, sorsolás alapján 4 párt alakítanak ki, majd a párok nyerteseiből (4 ember) újból 2 párt, és a végén ezen két pár győztese vívja a döntőt. (Ez a feladat azzal kapcsolatos, hogy a K1 harcosok az év végére fáradtabbak a sok évközi mérkőzés miatt, így meglepetések is történhetnek a világbajnokságon.)

Megoldás. Bevezetünk egy Markov-láncot, melynek állapottere Remy három egymás utáni meccsének lehetséges kimeneteleiből álló halmaz. Minden $n \geqslant 3$ esetén legyen $X_n = (1,1,1)$, ha Remy n-edik, $(n-1)$-edik és $(n-2)$-edik meccsét is megnyeri. Hasonlóan, például $X_n = (1,0,1)$, ha Remy n-edik meccsét megnyeri, $(n-1)$-edik meccsét elveszti és $(n-2)$-edik meccsét megnyeri. Az $X_n = (i,j,k)$, $i,j,k \in \{0,1\}$, esetek hasonlóan értelmezhetők. Így $\{X_n : n \geqslant 3\}$ Markov-lánc, melynek fázistere 8 elemű és egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa

$$\begin{array}{c} \\ (1,1,1) \\ (1,1,0) \\ (1,0,1) \\ (1,0,0) \\ (0,1,1) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \\ (0,0,0) \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} (1,1,1) & (1,1,0) & (1,0,1) & (1,0,0) & (0,1,1) & (0,1,0) & (0,0,1) & (0,0,0) \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\
0.7 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\
0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\
0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\
0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0.2
\end{pmatrix} \end{array}.$$

Mivel $\{X_n : n \geqslant 3\}$ irreducibilis, véges állapotterű, kapjuk, hogy ergodikus és így létezik egyértelműen stacionárius eloszlása.

Remy csak úgy nyerheti meg a K1 világbajnokságot, ha az évad utolsó három meccsét megnyeri, azaz a világbajnokságon mind a kétszer továbbjut és a döntőben is nyer. Így kérdésünkre a válasz a stacionárius eloszlás által az $(1,1,1)$ állapothoz rendelt súly. A stacionárius eloszlást a következő egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\begin{aligned}
&\pi_{(1,1,1)} = 0.6\pi_{(1,1,1)} + 0.7\pi_{(1,1,0)}, && \pi_{(1,1,0)} = 0.8\pi_{(1,0,1)} + 0.8\pi_{(1,0,0)}, \\
&\pi_{(1,0,1)} = 0.8\pi_{(0,1,1)} + 0.8\pi_{(0,1,0)}, && \pi_{(1,0,0)} = 0.8\pi_{(0,0,1)} + 0.8\pi_{(0,0,0)}, \\
&\pi_{(0,1,1)} = 0.4\pi_{(1,1,1)} + 0.3\pi_{(1,1,0)}, && \pi_{(0,1,0)} = 0.2\pi_{(1,0,1)} + 0.2\pi_{(1,0,0)}, \\
&\pi_{(0,0,1)} = 0.2\pi_{(0,1,1)} + 0.2\pi_{(0,1,0)}, && \pi_{(0,0,0)} = 0.2\pi_{(0,0,1)} + 0.2\pi_{(0,0,0)}, \\
&\pi_{(1,1,1)} + \pi_{(1,1,0)} + \pi_{(1,0,1)} + \pi_{(1,0,0)} + \pi_{(0,1,1)} + \pi_{(0,1,0)} + \pi_{(0,0,1)} + \pi_{(0,0,0)} = 1.
\end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$\begin{aligned}
\pi_{(1,1,1)} &= \frac{28}{89}, \quad \pi_{(1,1,0)} = \frac{16}{89}, \quad \pi_{(1,0,1)} = \frac{16}{89}, \quad \pi_{(1,0,0)} = \frac{4}{89}, \\
\pi_{(0,1,1)} &= \frac{16}{89}, \quad \pi_{(0,1,0)} = \frac{4}{89}, \quad \pi_{(0,0,1)} = \frac{4}{89}, \quad \pi_{(0,0,0)} = \frac{1}{89}.
\end{aligned}$$

Így Remy megközelítőleg $28/89 \approx 0.31$ valószínűséggel nyeri meg a K1 világbajnokságot.

Az alábbiakban egy másik (kicsit bonyolultabb) gondolatmenetet is mutatunk. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$Y_n := \begin{cases} 1 & \text{ha Remy az } n\text{-edik meccsét megnyeri,} \\ 0 & \text{ha Remy az } n\text{-edik meccsét elveszti.} \end{cases}$$

Mint korábban írtuk, Remy csak úgy nyerheti meg a K1 világbajnokságot, ha a K1 világbajnokságon mindhárom meccsét megnyeri. Tegyük fel, hogy ezek a meccsek sorrendben Remy $(N-2)$., $(N-1)$., illetve N. meccsei. Feladatunk a $P(Y_N = 1, Y_{N-1} = 1, Y_{N-2} = 1)$

valószínűség közelítő értékének meghatározása. A teljes valószínűség tétele alapján

$$\begin{aligned}
&P(Y_N = 1, Y_{N-1} = 1, Y_{N-2} = 1)\\
&= P(Y_N = 1, Y_{N-1} = 1, Y_{N-2} = 1 \,|\, Y_{N-3} = 0)P(Y_{N-3} = 0)\\
&\quad + P(Y_N = 1, Y_{N-1} = 1, Y_{N-2} = 1 \,|\, Y_{N-3} = 1, Y_{N-4} = 0)P(Y_{N-3} = 1, Y_{N-4} = 0)\\
&\quad + P(Y_N = 1, Y_{N-1} = 1, Y_{N-2} = 1 \,|\, Y_{N-3} = 1, Y_{N-4} = 1, Y_{N-5} = 0)P(Y_{N-3} = 1, Y_{N-4} = 1, Y_{N-5} = 0)\\
&\quad + P(Y_N = 1, Y_{N-1} = 1, Y_{N-2} = 1 \,|\, Y_{N-3} = 1, Y_{N-4} = 1, Y_{N-5} = 1)P(Y_{N-3} = 1, Y_{N-4} = 1, Y_{N-5} = 1)\\
&= 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot P(Y_{N-3} = 0) + 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot P(Y_{N-3} = 1, Y_{N-4} = 0)\\
&\quad + 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,7 \cdot P(Y_{N-3} = 1, Y_{N-4} = 1, Y_{N-5} = 0)\\
&\quad + 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot P(Y_{N-3} = 1, Y_{N-4} = 1, Y_{N-5} = 1).
\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(Y_n = 0) &= \lim_{n\to\infty} P\big(X_n \in \{(0,1,1),(0,1,0),(0,0,1),(0,0,0)\}\big)\\
&= \pi_{(0,1,1)} + \pi_{(0,1,0)} + \pi_{(0,0,1)} + \pi_{(0,0,0)} = \frac{25}{89},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(Y_n = 1, Y_{n-1} = 0) &= \lim_{n\to\infty} P(X_n \in \{(1,0,1),(1,0,0)\})\\
&= \pi_{(1,0,1)} + \pi_{(1,0,0)} = \frac{20}{89},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(Y_n = 1, Y_{n-1} = 1, Y_{n-2} = 0) &= \lim_{n\to\infty} P(X_n = (1,1,0)) = \pi_{(1,1,0)} = \frac{16}{89},\\
\lim_{n\to\infty} P(Y_n = 1, Y_{n-1} = 1, Y_{n-2} = 1) &= \lim_{n\to\infty} P(X_n = (1,1,1)) = \pi_{(1,1,1)} = \frac{28}{89},
\end{aligned}$$

kapjuk, hogy a $P(Y_N = 1, Y_{N-1} = 1, Y_{N-2} = 1)$ valószínűség közelítése

$$\begin{aligned}
&0,7 \cdot (0,8)^2 \cdot \frac{25}{89} + 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot \frac{20}{89} + (0,6)^2 \cdot 0,7 \cdot \frac{16}{89} + (0,6)^3 \cdot \frac{28}{89}\\
&\qquad = \frac{11,2 + 6,72 + 4,032 + 6,048}{89} = \frac{28}{89} = \pi_{(1,1,1)}.
\end{aligned}$$

□

4.29. Feladat. (Hardy–Weinberg törvény) [Ross [7], Chapter 4, Example 4d] Tekintsünk egy nagy populációt. Egy adott génnek minden ,,előfordulása" vagy **A** vagy **a** típusú, és a populáció minden tagja vagy az **AA** vagy az **aa** vagy az **Aa** génpárral rendelkezik, feltételezzük továbbá, hogy ezen egyedek aránya rendre p_0, q_0 és r_0 $(p_0+q_0+r_0 = 1)$. Mikor két egyed párosodik mindkettő hozzájárul (véletlenszerűen) egy-egy génjével az utód génpárjának kialakításához. Feltételezzük azt is, hogy a párosodások véletlenszerűen történnek, melyben minden egyed egyenlő valószínűséggel párosodik minden más egyeddel.

(i) Határozzuk meg az első generációban az **AA, aa** ill. **Aa** génpárral rendelkezők arányát!

(ii) Határozzuk meg a második generációban az **AA, aa** ill. **Aa** génpárral rendelkezők arányát!

(iii) Vizsgáljuk meg a Hardy–Weinberg törvény és a Markov-láncok kapcsolatát! Határozzuk meg a modellezéshez használt Markov-lánc stacionárius eloszlását!

Megoldás. (i): Jelölje p, q és r az első generációban az **AA, aa** ill. **Aa** génpárral rendelkező egyedek arányát ($p + q + r = 1$). Feltételt véve a szülők génösszetétele szerint

$$\begin{aligned}
p &= P(\{\text{egy egyed AA az első generációban}\}) := P(AA) \\
&= P(AA \,|\, \text{mindkét szülő AA}) P(\text{mindkét szülő AA}) \\
&\quad + P(AA \,|\, \text{az egyik szülő AA, a másik Aa}) P(\text{az egyik szülő AA, a másik Aa}) \\
&\quad + P(AA \,|\, \text{mindkét szülő Aa}) P(\text{mindkét szülő Aa}) \\
&\quad + P(AA \,|\, \text{legalább az egyik szülő aa}) P(\text{legalább az egyik szülő aa}) \\
&= 1p_0^2 + \frac{1}{2} 2p_0r_0 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} r_0^2 + 0(1-(1-q_0)^2) = \left(p_0 + \frac{r_0}{2}\right)^2 .
\end{aligned}$$

Hasonlóan kaphatjuk, hogy

$$q = q_0^2 + \frac{1}{2} 2q_0r_0 + \frac{1}{4} r_0^2 = \left(q_0 + \frac{r_0}{2}\right)^2 .$$

Szintén hasonlóan

$$\begin{aligned}
r &= P(\{\text{egy egyed Aa az első generációban}\}) := P(Aa) \\
&= P(Aa \,|\, \text{mindkét szülő AA}) P(\text{mindkét szülő AA}) \\
&\quad + P(Aa \,|\, \text{mindkét szülő aa}) P(\text{mindkét szülő aa}) \\
&\quad + P(Aa \,|\, \text{az egyik szülő AA, a másik Aa}) P(\text{az egyik szülő AA, a másik Aa}) \\
&\quad + P(Aa \,|\, \text{az egyik szülő AA, a másik aa}) P(\text{az egyik szülő AA, a másik aa}) \\
&\quad + P(Aa \,|\, \text{az egyik szülő aa, a másik Aa}) P(\text{az egyik szülő aa, a másik Aa}) \\
&\quad + P(Aa \,|\, \text{mindkét szülő Aa}) P(\text{mindkét szülő Aa}) \\
&= \frac{1}{2} 2p_0r_0 + 1 \cdot 2p_0q_0 + \frac{1}{2} 2q_0r_0 + \frac{1}{2} r_0^2 = 2\left(p_0 + \frac{r_0}{2}\right)\left(q_0 + \frac{r_0}{2}\right).
\end{aligned}$$

Ellenőrizhető, hogy $p + q + r = 1$.

(ii): Jelölje $\widetilde{p}, \widetilde{q}$ és $\widetilde{r}$ a második generációban az **AA, aa,** ill. **Aa** génpárral rendelkező egyedek arányát ($\widetilde{p} + \widetilde{q} + \widetilde{r} = 1$). Hasonló okoskodással, mint az előbbiek, az első generációs adatok figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\widetilde{p} = \left(p + \frac{r}{2}\right)^2, \qquad \widetilde{q} = \left(q + \frac{r}{2}\right)^2, \qquad \widetilde{r} = 2\left(p + \frac{r}{2}\right)\left(q + \frac{r}{2}\right).$$

Így

$$\begin{aligned}
\widetilde{p} &= \left[\left(p_0 + \frac{r_0}{2}\right)^2 + \left(p_0 + \frac{r_0}{2}\right)\left(q_0 + \frac{r_0}{2}\right)\right]^2 = \left(p_0 + \frac{r_0}{2}\right)^2 \left[p_0 + \frac{r_0}{2} + q_0 + \frac{r_0}{2}\right]^2 \\
&= \left(p_0 + \frac{r_0}{2}\right)^2 1^2 = \left(p_0 + \frac{r_0}{2}\right)^2 = p.
\end{aligned}$$

Hasonlóan $\widetilde{q} = q$ és $\widetilde{r} = r$. Így az első generációtól kezdve minden generációban ugyanaz az AA, aa és Aa génpárok aránya, azaz p, q és r. Ez az ún. **Hardy–Weinberg törvény**.

(iii): A Hardy–Weinberg törvényt jobban megértjük, ha a teljes génkészletet egyszerre tekintjük. Kezdetben a A-típusú gének a teljes génkészlet

$$\overline{p} = \frac{2p_0 + r_0}{2} = p_0 + \frac{r_0}{2} \text{-ed}$$

részét, az a-típusú gének pedig

$$\overline{q} = \frac{2q_0 + r_0}{2} = q_0 + \frac{r_0}{2} \text{-ed}$$

részét teszik ki. Mivel minden egyed egyenlő valószínűséggel párosodik minden más egyeddel és egy egyed mindkét génjét egyenlő valószínűséggel adja az utódnak, az utódnemzedék génpár összetételét az A-típusú és az a-típusú gének véletlen találkozása határozza meg. A véletlen találkozásba beleértjük az A-típusú gének találkozását A-típusú génekkel, illetve az a-típusú gének találkozását a-típusú génekkel is. Így annak a valószínűsége, hogy egy egyed az első utód nemzedékben AA génpárral rendelkezik $\overline{p}^2$, annak, hogy Aa génpárral $2\overline{pq}$, annak, hogy aa génpárral $\overline{q}^2$. Így az első generációban az AA, aa, Aa génpárok aránya $\overline{p}^2, \overline{q}^2$, $2\overline{pq}$. Ekkor az első generációban az A-típusú gének aránya

$$\frac{2\overline{p}^2 + 2\overline{pq}}{2(\overline{p}^2 + \overline{q}^2 + 2\overline{pq})} = \frac{\overline{p}(\overline{p} + \overline{q})}{(\overline{p} + \overline{q})^2} = \frac{\overline{p}}{\overline{p} + \overline{q}} = \frac{\overline{p}}{p_0 + q_0 + r_0} = \overline{p}.$$

Hasonlóan az a-típusú gének aránya $\overline{q}$. Ezért az összes elkövetkező generációban az AA, aa, Aa génpárú egyedek aránya $\overline{p}^2, \overline{q}^2$, $2\overline{pq}$.

Tegyük fel, hogy a populációnk AA, aa, Aa génpár állománya már stabilizálódott, azaz ezen génpárok előfordulásának valószínűsége egy véletlenszerűen választott egyednél rendre p, q és r. Vizsgáljuk most egy adott egyed és leszármazottjainak ,,genetikai fáját". (Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy minden egyednek pontosan 1 leszármazottja van.) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje X_n az adott egyed n-edik leszármazottjának génpárját. Ekkor $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc. Vegyük észre, hogy X_n nem függ $X_1, \ldots, X_{n-2}$-től, de függ X_{n-1}-től és más nem vizsgált egyedektől. A Markov-tulajdonság definíciójára gondolva, az, hogy X_n függ X_{n-1}-en kívül más nem vizsgált egyedektől is nem okoz problémát. Megmutatjuk, hogy ezen Markov-lánc átmenetvalószínűségi mátrixa

$$\begin{array}{c} \\ AA \\ aa \\ Aa \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad AA \quad & \quad aa \quad & \quad Aa \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} p + r/2 & 0 & q + r/2 \\ 0 & q + r/2 & p + r/2 \\ p/2 + r/4 & q/2 + r/4 & p/2 + q/2 + r/2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Vegyünk feltételt az utódnemzéshez választott partner génállománya szerint, így például

$$\begin{aligned}
P(X_n &= AA \,|\, X_{n-1} = AA) \\
&= P(X_n = AA, X_{n-1}\,\text{partnere AA} \,|\, X_{n-1} = AA) \\
&\quad + P(X_n = AA, X_{n-1}\,\text{partnere aa} \,|\, X_{n-1} = AA) \\
&\quad + P(X_n = AA, X_{n-1}\,\text{partnere Aa} \,|\, X_{n-1} = AA) \\
&= P(X_n = AA \,|\, X_{n-1}\,\text{partnere AA}, X_{n-1} = AA) P(X_{n-1}\,\text{partnere AA} \,|\, X_{n-1} = AA) \\
&\quad + P(X_n = AA \,|\, X_{n-1}\,\text{partnere aa}, X_{n-1} = AA) P(X_{n-1}\,\text{partnere aa} \,|\, X_{n-1} = AA) \\
&\quad + P(X_n = AA \,|\, X_{n-1}\,\text{partnere Aa}, X_{n-1} = AA) P(X_{n-1}\,\text{partnere Aa} \,|\, X_{n-1} = AA) \\
&= 1 \cdot p + 0 \cdot q + \frac{1}{2} r = p + \frac{1}{2} r,
\end{aligned}$$

ahol a legutolsó lépésben során felhasználtuk, hogy X_{n-1} partnerének génállománya független X_{n-1} génállományától. Az $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc irreducibilis, aperiódikus és véges állapotterű. Így ergodikus és ezért egyetlen stacionárius eloszlása létezik. A korábbiak alapján megsejthető a stacionárius eloszlás, ez nem más, mint p, q, r. Ez azt is jelenti, hogy az adott egyed leszármazottjainak p-ed, q-ad ill. r-ed része lesz AA, aa ill. Aa génpárú. Megmutatjuk, hogy p, q, r valóban a stacionárius eloszlás. Ehhez azt kell leellenőrizni, hogy p, q és r kielégíti a

$$\begin{aligned}
\pi_{AA} &= (p + r/2)\pi_{AA} + (p/2 + r/4)\pi_{Aa}, \\
\pi_{aa} &= (q + r/2)\pi_{aa} + (q/2 + r/4)\pi_{Aa}, \\
\pi_{Aa} &= (q + r/2)\pi_{AA} + (p + r/2)\pi_{aa} + (p/2 + q/2 + r/2)\pi_{Aa}, \\
\pi_{AA} &+ \pi_{aa} + \pi_{Aa} = 1
\end{aligned}$$

egyenletrendszert. Azt kell tehát leellenőrizni, hogy

$$\begin{aligned}
p &= p(p + r/2) + r(p/2 + r/4) = (p + r/2)^2, \\
q &= q(q + r/2) + r(q/2 + r/4) = (q + r/2)^2, \\
r &= p(q + r/2) + q(p + r/2) + r(p + q + r)/2, \\
p &+ q + r = 1.
\end{aligned}$$

Az 1., 2. és 4. egyenletet korábban már leellenőriztük. A 3. egyenlethez azt kell megmutatni, hogy $r^2/2 = 2pq$. Ez akkor és csak akkor igaz (felhasználva a korábbi számításokat), ha

$$4(p_0 + r_0/2)^2(q_0 + r_0/2)^2 = 4(p_0 + r_0/2)^2(q_0 + r_0/2)^2,$$

ami pedig azonosság. □

4.30. Feladat. [Ross [7], Chapter 4, Problem 22] Legyen $m > 0$ egy rögzített természetes szám. Tekintsünk egy populációt, melynek minden generációjában egy adott génből összesen m darab található. Minden egyes gén lehet 1. és 2. típusú. Feltételezzük, hogy ha egy generációban az m darab génből i darab 1. típusú, akkor annak a valószínűsége, hogy a következő generációban j darab 1. típusú (és $m-j$ darab 2. típusú) gén lesz

$$\binom{m}{j}\left(\frac{i}{m}\right)^j\left(\frac{m-i}{m}\right)^{m-j}, \qquad j=0,1,\dots,m,$$

azaz az 1. típusú gének eloszlása m-ed rendű i/m-paraméterű binomiális eloszlás. Jelölje X_n az n-edik generációban levő 1. típusú gének számát és tegyük fel, hogy $X_0=i$.

(i) Mennyi $\mathbb{E}X_n$?

(ii) Határozzuk meg a

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n=m)$$

valószínűséget! (Ez heurisztikusan annak a valószínűsége, hogy hosszú távon minden gén 1. típusú lesz.)

Megoldás.

(i) Ha $i=0$, akkor

$$\binom{m}{j}\left(\frac{i}{m}\right)^j\left(\frac{m-i}{m}\right)^{m-j} = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad j\neq 0,\\ 1 & \text{ha} \quad j=0.\end{cases}$$

Ha $i=m$, akkor

$$\binom{m}{j}\left(\frac{i}{m}\right)^j\left(\frac{m-i}{m}\right)^{m-j} = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad j\neq m,\\ 1 & \text{ha} \quad j=m.\end{cases}$$

Azaz, ha egy generációban 0 darab 1. típusú gén van, akkor a következő generációban 1 valószínűséggel 0 darab 1. típusú gén lesz. Hasonlóan, ha egy generációban m darab 1. típusú gén van, akkor a következő generációban 1 valószínűséggel m darab 1. típusú gén lesz. Ha pedig egy generációban i darab 1. típusú gén van, ahol $i\neq 0$ és $i\neq m$, akkor a következő generációban levő 1. típusú gének száma binomiális eloszlású m és i/m paraméterekkel. Ezért minden $n\geqslant 1$ esetén X_n-nek X_{n-1}-re vonatkozó feltételes várható értéke

$$\mathbb{E}(X_n \,|\, X_{n-1}) = m\frac{X_{n-1}}{m} = X_{n-1}.$$

Így $\mathbb{E}X_n=\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n \,|\, X_{n-1}))=\mathbb{E}X_{n-1}$, és ezért

$$\mathbb{E}X_n=\mathbb{E}X_{n-1}=\dots=\mathbb{E}X_0=\mathbb{E}i=i.$$

(ii) A feladatban bevezetett $\{X_n : n\geqslant 0\}$ sztochasztikus folyamat Markov-lánc, melynek fázistere $\{0,1,\dots,m\}$ és az osztályok $\{0\}$, $\{1,\dots,m-1\}$, $\{m\}$. A 0 és m állapotok elnyelő állapotok, ez az előző vizsgálat alapján nyilvánvaló. Az $\{1, \dots, m-1\}$ osztály nem visszatérő, mert például annak a valószínűsége, hogy

$$\begin{aligned}
&P(\text{a Markov-lánc nem tér vissza 1-be} \,|\, X_0 = 1) \\
&\qquad\qquad \geqslant P(X_1 = m \,|\, X_0 = 1) = \binom{m}{m}\left(\frac{1}{m}\right)^m \left(\frac{m-1}{m}\right)^0 \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{m^m} > 0.
\end{aligned}$$

Ekkor $j = 1, \dots, m-1$-re (felhasználva, hogy $X_0 = i$)

$$P(X_n = j) = P(X_0 = i)p_{i,j}^{(n)}$$

és mivel az $\{1, \dots, m-1\}$ osztály aperiódikus, nem visszatérő és egy nem visszatérő állapot nullállapot (azaz $m_{j,j} = +\infty$, $j = 1, \dots, m-1$), az 4.2. Megjegyzés alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{m_{j,j}} = 0, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

Így

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = 0, \qquad j = 1, \dots, m-1.$$

Ezért

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{m} jP(X_n = j) = \sum_{j=0}^{m} j \lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = m \lim_{n\to\infty} P(X_n = m).$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \lim_{n\to\infty} i = i$, így

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = m) = \frac{i}{m}.$$

□

4.31. Feladat. Elhelyezünk 5 pontot kör alakban, az óramutató járásával megegyező irányban számozzuk őket rendre a $0, 1, 2, 3$ és 4 számjegyekkel. Egy részecske ezeken a pontokon bolyong oly módon, hogy minden lépésben valamelyik szomszédos pontra ugorhat, p valószínűséggel az óramutató járásával megegyező, $1-p$ valószínűséggel az óramutató járásával ellentétes irányban levő szomszédjára ugorva. A 0 pontból indul a részecske. Jelölje X_n a részecske helyzetét az n-edik lépés után. Ekkor $\{X_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc. Mutassuk meg, hogy létezik stacionárius eloszlás és határozzuk is meg azt!

Megoldás. Ez a Markov-lánc irreducibilis, aperiódikus (a 0-ból vissza lehet jutni a 0-ba például 2 vagy 5 lépés alatt is pozitív valószínűséggel, így a periódus csak 1 lehet). Az egylépéses átmenetvalószínűségi mátrix

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \;\;0\;\; & \;\;1\;\; & \;\;2\;\; & \;\;3\;\; & \;\;4\;\; \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Mivel a Markov-lánc irreducibilis, véges állapotterű, kapjuk, hogy ergodikus és az egyértelműen létező stacionárius eloszlást a következő egyenletrendszer megoldásaként kapjuk

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= (1-p)\pi_1 + p\pi_4,\\
\pi_1 &= p\pi_0 + (1-p)\pi_2,\\
\pi_2 &= p\pi_1 + (1-p)\pi_3,\\
\pi_3 &= p\pi_2 + (1-p)\pi_4,\\
\pi_4 &= (1-p)\pi_0 + p\pi_3,\\
\pi_0 &+ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1.
\end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$\pi_i = \frac{1}{5}, \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Mivel a szóban forgó Markov-lánc irreducibilis, aperiódikus és egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa duplán sztochasztikus, az 4.24. Feladat alapján közvetlenül is adódik, hogy $\pi_i = 1/5$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. (A stacionárius eloszlás nem más, mint a $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ halmazon az egyenletes eloszlás.) Megjegyezzük, hogy tetszőleges $p \in (0, 1)$ esetén egyértelműen létezik stacionárius eloszlás, így a szóban forgó Markov-lánc ergodikus. Felhívjuk a figyelmet, hogy ez eltérés az egydimenziós nem-szimmetrikus véletlen bolyongáshoz képest, ugyanis az tranziens (nem visszatérő), így nem ergodikus. □

4.32. Feladat. Legyen $\{X_n : n \geqslant 0\}$ egy olyan sztochasztikus folyamat, melynek fázistere $\{0, 1, \ldots, N\}$ és $X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$, ahol

$$P(Z_{n+1} = 1 \mid X_n = i) = \frac{N-i}{N} \qquad \text{és} \qquad P(Z_{n+1} = -1 \mid X_n = i) = \frac{i}{N}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant N,\ n \geqslant 0.$$

(i) Mutassuk meg, hogy $\{X_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc, és határozzuk meg az átmenetvalószínűségi mátrixát!

(ii) Határozzuk meg $\{X_n : n \geqslant 0\}$ stacionárius eloszlását (feltéve, ha létezik)!

(iii) Igaz-e, hogy
$$\lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(n)} = \pi_i (= 1/m_{i,i}), \qquad i = 0, 1, \ldots, N?$$

Megoldás. Ellenőrizhető, hogy $\{X_n : n \geqslant 0\}$ fázistere tényleg $\{0, 1, \ldots, N\}$.

(i) Ahhoz, hogy $\{X_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc azt kell belátni, hogy minden $n \geqslant 0$ és $x, x_0, x_1, \ldots, x_n \in \{0, \ldots, N\}$ esetén

$$P(X_{n+1} = x \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x \mid X_n = x_n).$$

Mivel $X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$ és Z_{n+1} csak X_n-től függ kapjuk, hogy X_{n+1} is csak X_n-től függ, így tényleg Markov-láncot kapunk. Az átmenetvalószínűségek

$$
\begin{aligned}
P(X_{n+1} = 0 \,|\, X_n = 0) &= \frac{P(X_{n+1} = 0, X_n = 0)}{P(X_n = 0)} = \frac{P(Z_{n+1} = 0, X_n = 0)}{P(X_n = 0)} \\
&= P(Z_{n+1} = 0 \,|\, X_n = 0) = 0, \\
P(X_{n+1} = 1 \,|\, X_n = 0) &= \frac{P(Z_{n+1} = 1, X_n = 0)}{P(X_n = 0)} = P(Z_{n+1} = 1 \,|\, X_n = 0) = 1, \\
P(X_{n+1} = 0 \,|\, X_n = 1) &= \frac{P(X_n + Z_{n+1} = 0, X_n = 1)}{P(X_n = 1)} = \frac{P(Z_{n+1} = -1, X_n = 1)}{P(X_n = 1)} \\
&= P(Z_{n+1} = -1 \,|\, X_n = 1) = \frac{1}{N}.
\end{aligned}
$$

Hasonló számolások alapján az átmenetvalószínűségi mátrix

$$
P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & N-2 & N-1 & N \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
1/N & 0 & (N-1)/N & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2/N & 0 & (N-2)/N & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 2/N & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (N-1)/N & 0 & 1/N \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

(ii) Mivel ez a Markov-lánc irreducibilis, véges állapotterű, kapjuk, hogy ergodikus és az egyértelműen létező stacionárius eloszlását az alábbi egyenletrendszer (pozitív) megoldásaként kapjuk

$$
\begin{aligned}
&\pi_0 = \frac{1}{N}\pi_1, \\
&\pi_1 = 1 \cdot \pi_0 + \frac{2}{N}\pi_2, \\
&\pi_2 = \frac{N-1}{N}\pi_1 + \frac{3}{N}\pi_3, \\
&\pi_3 = \frac{N-2}{N}\pi_2 + \frac{4}{N}\pi_4, \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
&\pi_{N-1} = \frac{2}{N}\pi_{N-2} + 1 \cdot \pi_N, \\
&\pi_N = \frac{1}{N}\pi_{N-1}, \\
&\pi_0 + \cdots + \pi_N = 1.
\end{aligned}
$$

Így

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= N\pi_0, \\
\pi_2 &= \frac{N}{2}(\pi_1 - \pi_0) = \frac{N(N-1)}{2}\pi_0, \\
\pi_3 &= \frac{N}{3}\Big(\pi_2 - \frac{N-1}{N}\pi_1\Big) = \frac{N(N-1)(N-2)}{6}\pi_0, \\
&\vdots \\
\pi_i &= \frac{N(N-1)\cdots(N-i+1)}{i!}\pi_0 = \binom{N}{i}\pi_0, \quad i = 1, \ldots, N-1, \\
\pi_N &= \pi_0.
\end{aligned}$$

Ezért

$$\pi_0 \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \pi_0 2^N = 1,$$

azaz $\pi_0 = 1/2^N$ és

$$\pi_i = \binom{N}{i}\frac{1}{2^N}, \qquad i = 0, \ldots, N.$$

(iii) Ez a Markov-lánc irreducibilis és 2-periódusú. Ugyanis, mivel a 2-periódusság osztálytulajdonság elegendő azt megmutatni, hogy a 0 állapot periódusa 2. A 0-ból kiindulva 2 lépés alatt visszajuthatunk 0-ba, hiszen $0 \rightharpoonup 1 \rightharpoonup 0$. Ha nem 2 lépést akarunk tenni, úgy az átmenetvalószínűségi mátrix alakjából például lehetséges a következő átmenet $0 \rightharpoonup 1 \rightharpoonup 2 \rightharpoonup 1 \rightharpoonup 0$. Végiggondolható, hogy mindig páros számú lépésre van szükség, hogy a 0-ból visszatérjünk 0-ba. Így egy előadásbeli tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(2n)} = \frac{2}{m_{i,i}} = 2\pi_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N.$$

Mivel a Markov-lánc ergodikus, $\pi_i > 0, i = 0, 1, \ldots, N$, és a 2-periódusság miatt $p_{i,i}^{(2n+1)} = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $i = 0, \ldots, N$. Így $\lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(2n+1)} = 0$, és $\lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(2n)} = 2\pi_i > 0$, $i = 0, \ldots, N$, azaz a $\lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(n)} = 0$ határérték nem létezik. □

4.33. Feladat. [Ross [7], Chapter 4, Example 4e alapján] Egy BVK nevű cég műanyag rózsaszínű párducokat gyárt gyerekek számára. (Sok kis Pink Panthert csinálnak.) Minden egyes párducot minősége alapján N osztályba sorolunk. Legyen $X_n = i$, ha az n-ediknek legyártott párducot az i-edik osztályba soroljuk, ahol $i \in \{1, \ldots, N\}$. Feltételezzük, hogy $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc, melynek átmenetvalószínűségi mátrixa $P = (p_{i,j})_{i,j=1,\ldots,N}$. Minőségi meggondolások alapján az N darab osztály egy részét elfogadhatónak, másik részét nem elfogadhatónak nevezzük. Az elfogadható osztályok halmazát jelölje A, a nem elfogadható osztályok halmazát pedig A^c. Azt mondjuk, hogy a gyártási folyamat „fent” van, ha elfogadható osztályban van és azt, hogy „lent” van, ha nem elfogadható osztályban van.

(i) Határozzuk meg, hogy hosszú távon átlagosan az idő hányad részében megy a gyártási folyamat ,,fentről lentre”!

(ii) Határozzuk meg, hogy átlagosan mennyi ideig megy lefelé a gyártási folyamat, ha egyszer már lent van!

(iii) Határozzuk meg, hogy átlagosan mennyi ideig megy felfelé a gyártási folyamat, ha egyszer már fent van!

(A megoldás során feltételezhetjük, hogy a megadott Markov-lánc irreducibilis, aperiódikus és ergodikus.)

Megoldás. Jelölje π_k, $k = 1, \dots, N$ az egyértelműen létező stacionárius eloszlást. Tetszőleges $i \in A$ és $j \in A^c$ állapotok esetén, az 4.2. Megjegyzés alapján

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(X_n = j, X_{n-1} = i) &= \lim_{n\to\infty} P(X_n = j \mid X_{n-1} = i)P(X_{n-1} = i)\\ &= p_{i,j} \lim_{n\to\infty} P(X_{n-1} = i) = \pi_i p_{i,j}.\end{aligned}$$

Tehát $\pi_i p_{i,j}$ interpretálható úgy, hogy hosszú távon a folyamat átlagosan az idő $\pi_i p_{i,j}$-ed részében megy az i állapotból a j állapotba. Így, mivel A véges halmaz

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j, X_{n-1} \in A) = \sum_{i\in A} \lim_{n\to\infty} P(X_n = j, X_{n-1} = i) = \sum_{i\in A} \pi_i p_{i,j}.$$

Tehát $\sum_{i\in A} \pi_i p_{i,j}$ interpretálható úgy, hogy hosszú távon a folyamat átlagosan az idő $\sum_{i\in A} \pi_i p_{i,j}$-ed részében megy az A állapothalmazból a j állapotba. És teljesen hasonlóan

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \in A^c, X_{n-1} \in A) = \sum_{j\in A^c} \sum_{i\in A} \pi_i p_{i,j}.$$

Ezért $\sum_{j\in A^c} \sum_{i\in A} \pi_i p_{i,j}$ interpretálható úgy, hogy a folyamat átlagosan az idő $\sum_{j\in A^c} \sum_{i\in A} \pi_i p_{i,j}$-ed részében megy a A állapothalmazból az A^c állapothalmazba, azaz ,,fentről lentre”. Az alábbiakban jön egy heurisztikus érvelés.

Jelölje $\overline{U}$ és $\overline{D}$, hogy hosszú távon átlagosan mennyi ideig megy a folyamat ,,felfelé”, ill. ,,lefelé”, ha egyszer már fent, ill. lent van. Így hosszú távon átlagosan $\overline{U}+\overline{D}$ időegységenként van egy darab ,,fentről lentre” menet és egy darab ,,lentről felfelé” menet, ezért hosszú távon átlagosan az idő $1/(\overline{U}+\overline{D})$-ad részében van ,,fentről lefelé” menet (breakdown). Így

$$\frac{1}{\overline{U}+\overline{D}} = \sum_{j\in A^c} \sum_{i\in A} \pi_i p_{i,j}. \tag{4.2}$$

Hasonlóan, hosszú távon átlagosan az idő $1/(\overline{U}+\overline{D})$-ad részében van ,,lentről felfelé” menet. Így fennáll az is, hogy

$$\frac{1}{\overline{U}+\overline{D}} = \sum_{j\in A} \sum_{i\in A^c} \pi_i p_{i,j}.$$

Megjegyezzük, hogy az közvetlenül leellenőrizhető, hogy

$$\sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A}\pi_i p_{i,j} = \sum_{j\in A}\sum_{i\in A^c}\pi_i p_{i,j}.$$

Valóban,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in A}\sum_{i\in A^c}\pi_i p_{i,j} &= \sum_{j\in A}\pi_j - \sum_{j\in A}\sum_{i\in A}\pi_i p_{i,j} = \sum_{j\in A}\pi_j - \sum_{j\in I}\sum_{i\in A}\pi_i p_{i,j} + \sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A}\pi_i p_{i,j}\\ &= \sum_{j\in A}\pi_j - \sum_{i\in A}\sum_{j\in I}\pi_i p_{i,j} + \sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A}\pi_i p_{i,j}\\ &= \sum_{j\in A}\pi_j - \sum_{i\in A}\pi_j + \sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A}\pi_i p_{i,j} = \sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A}\pi_i p_{i,j}.\end{aligned}$$

Levezetünk most egy másik összefüggést is $\overline{U}$ ill. $\overline{D}$-ra.

A folyamat hosszú távon átlagosan az idő $\sum_{i\in A}\pi_i$-ed részében van ,,fent". Újra egy kicsit heurisztikusan, hosszú távon átlagosan $\overline{U}+\overline{D}$ időegység alatt $\overline{U}$ időt tölt fent a gyártási folyamat, így

$$\sum_{i\in A}\pi_i = \frac{\overline{U}}{\overline{U}+\overline{D}}. \tag{4.3}$$

Ezért (4.2) és (4.3) alapján

$$\begin{aligned}\overline{U} &= \frac{\sum_{i\in A}\pi_i}{\sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A}\pi_i p_{i,j}},\\ \overline{D} &= \frac{1-\sum_{i\in A}\pi_i}{\sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A}\pi_i p_{i,j}} = \frac{\sum_{i\in A^c}\pi_i}{\sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A}\pi_i p_{i,j}}.\end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg speciális esetként azt, amikor $\{X_n : n\in\mathbb{N}\}$ Markov-lánc $\{1,2,3,4\}$ állapottérrel,

$$P = \begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\;1\; & \;\;2\;\; & \;\;3\;\; & \;\;4\;\end{array}\\ \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4\\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2\end{pmatrix}\end{array}$$

átmenetvalószínűségi mátrixxal, $\{1,2\}$ az elfogadható állapotok halmaza és $\{3,4\}$ a nem elfogadható állapotok halmaza. Ez a Markov-lánc véges állapotterű, irreducibilis, aperiódikus és ergodikus. A stacionárius eloszlás megtalálásához az

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4,\\
\pi_2 &= \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4,\\
\pi_3 &= \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3,\\
\pi_4 &= \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_4,\\
&\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1
\end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani. A megoldás

$$\pi_1 = \frac{3}{16}, \quad \pi_2 = \frac{1}{4}, \quad \pi_3 = \frac{14}{48}, \quad \pi_4 = \frac{13}{48}.$$

Hosszú távon átlagosan az idő hányad részében megy a folyamat az $1,2$ állapotok valamelyikéből a $3,4$ állapotok valamelyikébe?

Az előzőek alapján

$$\sum_{j\in\{3,4\}}\sum_{i\in\{1,2\}} \pi_i p_{i,j} = \pi_1 p_{1,3} + \pi_2 p_{2,3} + \pi_1 p_{1,4} + \pi_2 p_{2,4} = \pi_1(p_{1,3}+p_{1,4}) + \pi_2(p_{2,3}+p_{2,4}) = \frac{9}{32}.$$

A (iii) kérdésre a válasz $\overline{U} = 14/9$.

A (ii) kérdésre a válasz $\overline{D} = 2$.

Tehát a folyamat átlagosan 2 egységnyi időt tölt lent és $14/9$ egységnyi időt van fenn. Így idejének átlagosan $9/32$-ed részében megy „fentről lentre”, illetve $9/32$-ed részében „lentről fentre”.

(A Markov-láncság feltételezése annyiban realisztikus lehet, hogy ha egy rossz darabot gyárt a gépsor, akkor a hibát rögtön kijavítják, így csak ez van hatással a következő darabra.) □

4.34. Feladat. [Ross [7], Chapter 4, Problem 16] Évi a tengerparton minden reggel futni megy. Házán két ajtó van, elől és hátul. Feltételezzük, hogy minden reggel mind induláskor, mind érkezéskor egyenlő valószínűséggel választ a két ajtó közül. Összesen k pár futócipője van és minden induláskor egyenlő valószínűséggel választ az éppen aktuális ajtónál levő futócipők közül. Ha nincs futócipő annál az ajtónál, ahonnan indul, akkor mezítláb megy futni. Azt a futócipőt, amiben aznap futott mindig annál az ajtónál hagyja, ahol bement a házba. Hosszú távon az idő hányad részében fut mezítláb Évi?

Megoldás. Legyen minden $n \geqslant 1$ esetén X_n a még futás előtt annál az ajtónál levő futócipők száma, ahonnan az n-edik nap reggelén indulni fog Évi. Ekkor $\{X_n : n \geqslant 1\}$

Markov-lánc, melynek fázistere $\{0, 1, \ldots, k\}$ és megmutatjuk, hogy az alábbi átmenetvalószínűségekkel rendelkezik. Ha k páros, akkor $i = 1, \ldots, k$ esetén

$$\begin{aligned}
&p_{i,i} = \frac{1}{4}, \quad \text{ha } i \neq \frac{k}{2} && p_{k/2,k/2} = \frac{1}{2},\\
&p_{i,i-1} = \frac{1}{4}, \quad \text{ha } i \neq \frac{k}{2} + 1 && p_{k/2+1,k/2} = \frac{1}{2},\\
&p_{i,k-i} = \frac{1}{4}, \quad \text{ha } i \neq \frac{k}{2} && p_{k/2,k/2} = \frac{1}{2},\\
&p_{i,k-i+1} = \frac{1}{4}, \quad \text{ha } i \neq \frac{k}{2} + 1 && p_{k/2+1,k/2} = \frac{1}{2},\\
&p_{0,0} = p_{0,k} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

ha k páratlan, akkor $i = 1, \ldots, k$ esetén

$$\begin{aligned}
&p_{i,i} = \frac{1}{4}, \quad \text{ha } i \neq \frac{k+1}{2} && p_{(k+1)/2,(k+1)/2} = \frac{1}{2},\\
&p_{i,i-1} = \frac{1}{4}, \quad \text{ha } i \neq \frac{k+1}{2} && p_{(k+1)/2,(k+1)/2-1} = \frac{1}{2},\\
&p_{i,k-i} = \frac{1}{4}, \quad \text{ha } i \neq \frac{k+1}{2} && p_{(k+1)/2,(k+1)/2} = \frac{1}{2},\\
&p_{i,k-i+1} = \frac{1}{4}, \quad \text{ha } i \neq \frac{k+1}{2} && p_{(k+1)/2,(k+1)/2} = \frac{1}{2},\\
&p_{0,0} = p_{0,k} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Vezessük be a következő eseményeket:

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \Big\{\text{Évi a futás után ugyanoda tér vissza, ahonnan indult}\Big\},\\
A_2 &:= \Big\{\text{Évi a futás után a másik ajtót választja, mint ahonnan indult}\Big\},\\
B_1 &:= \Big\{\text{Évi másnap ugyanazt az ajtót választja indulásnak, mint ahonnan előző nap indult}\Big\},\\
B_2 &:= \Big\{\text{Évi másnap az ellenkező ajtót választja indulásnak, mint ahonnan előző nap indult}\Big\}.
\end{aligned}$$

Először a $p_{i,i}$ átmenetvalószínűséget határozzuk meg. Nézzük meg, hogyan lehetséges az, hogy két egymást követő napon azoknál az ajtóknál, ahonnan Évi indul i cipő van. Attól függetlenül, hogy k páros vagy páratlan és, hogy i-nek mennyi az értéke ez az $A_1 \cap B_1$ esetben fennáll, ennek valószínűsége $1/4$. Abban az esetben, mikor k páros és $i = k/2$, a fenti esemény akkor is bekövetkezhet, mikor $A_1 \cap B_2$ áll fenn, ugyanis ekkor $i = k - i$. Ennek valószínűsége szintén $1/4$. Abban az esetben, mikor k páratlan és $i = (k+1)/2$, a fenti esemény akkor is bekövetkezhet, mikor $A_2 \cap B_2$ áll fenn, ugyanis ekkor $i = k - i + 1$. Ennek valószínűsége szintén $1/4$. Így kapjuk, hogy ha k páros, akkor

$$p_{i,i} = \frac{1}{4}, \quad \text{ha } i \neq \frac{k}{2}, \qquad p_{k/2,k/2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

ha pedig k páratlan, úgy

$$p_{i,i} = \frac{1}{4}, \quad \text{ha } i \neq \frac{k+1}{2}, \qquad p_{(k+1)/2,(k+1)/2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Most a $p_{i,i-1}$ átmenetvalószínűséget határozzuk meg. Nézzük meg, hogyan lehetséges az, hogy két egymást követő napon azoknál az ajtóknál, ahonnan Évi indul i, illetve $i-1$ cipő van rendre. Attól függetlenül, hogy k páros vagy páratlan és, hogy i-nek mennyi az értéke ez az $A_2 \cap B_1$ esetben fennáll, ennek valószínűsége $1/4$. Abban az esetben, mikor k páros és $i = (k+2)/2$, a fenti esemény akkor is bekövetkezhet, mikor $A_2 \cap B_2$ áll fenn, ugyanis ekkor $k - i + 1 = i - 1$. Ennek valószínűsége szintén $1/4$. Abban az esetben, mikor k páratlan és $i = (k+1)/2$, a fenti esemény akkor is bekövetkezhet, mikor $A_1 \cap B_2$ áll fenn, ugyanis ekkor $i - 1 = k - i$. Ennek valószínűsége szintén $1/4$. A $p_{i,k-i}$ és $p_{i,k-i+1}$ átmenetvalószínűségek hasonlóan számolhatók. Hasonlóan, $p_{0,0}$ megegyezik annak a valószínűségével, hogy ugyanazt az ajtót választja Évi másnap indulásnak, ahonnan előző nap indult. Hasonlóan, $p_{0,k}$ megegyezik annak a valószínűségével, hogy a másik ajtót választja Évi másnap indulásnak, mint ahonnan előző nap indult.

Legyen $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, ekkor ha k páratlan és $j \neq (k+1)/2$, akkor

$$\sum_{i=0}^{k} p_{i,j} = p_{j,j} + p_{k-j,j} + p_{k-j+1,j} + p_{j+1,j} = 4\frac{1}{4} = 1,$$

ha pedig k páratlan és $j = (k+1)/2$, akkor

$$\sum_{i=0}^{k} p_{i,j} = p_{\frac{k+1}{2},\frac{k+1}{2}} + p_{\frac{k+1}{2}+1,\frac{k+1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

Továbbá páratlan k esetén

$$\sum_{i=0}^{k} p_{i,0} = p_{0,0} + p_{1,0} + p_{k,0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$
$$\sum_{i=0}^{k} p_{i,k} = p_{0,k} + p_{1,k} + p_{k,k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Ha k páros, akkor teljesen hasonlóan ellenőrizhető le, hogy tetszőleges $j \in \{0, \ldots, k\}$ esetén $\sum_{i=0}^{k} p_{i,j} = 1$.

Így az $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc átmenetvalószínűségi mátrixa P duplán sztochasztikus, és mivel ez a Markov-lánc irreducibilis, aperiódikus, az 4.24. Feladat alapján kapjuk, hogy ez a Markov-lánc ergodikus és egyértelmű stacionárius eloszlása

$$\pi_i = \frac{1}{k+1}, \qquad i = 0, 1, \ldots, k.$$

(A Markov-lánc aperiódikussága abból következik, hogy minden $i = 0, 1, \ldots, k$ esetén $p_{i,i} > 0$.) Így

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) = \frac{1}{k+1},$$

azaz átlagosan a napok $1/(k+1)$-ed részében fut mezítláb Évi. □

4.35. Feladat. Legyen $\{X_n : n \geqslant 0\}$ egy Markov-lánc, melynek fázistere $\{1,2,3,4,5\}$ és átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 3/10 & 1/5 & 1/10 & 1/5 \\ 1/3 & 0 & 0 & 5/12 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Legyen

$$R_{i,j} := \lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j \mid X_0 = i), \qquad i,j \in \{1,2,\dots,5\}.$$

Írjuk fel az $R := (R_{i,j})_{i,j=1,\dots,5}$ mátrixot!

Megoldás. Az, hogy az R mátrix definíciójában szereplő határértékek léteznek az alábbiakban lépésről lépésre kiderül. Ezen Markov-lánc osztályai $\{1,2\}$, $\{5\}$, $\{3\}$ és $\{4\}$. (A 3 és 4 nincsenek egy osztályban, mert $3 \rightharpoonup 4$, de $4 \not\rightharpoonup 3$.) Az $\{1,2\}$ és az $\{5\}$ osztályok visszatérőek. A $\{3\}$ és a $\{4\}$ osztályok nem visszatérőek, mert $f^*_{3,3} < 1$, $f^*_{4,4} < 1$. Azt, hogy $\{3\}$ és $\{4\}$ nem visszatérőek úgy is megkaphatjuk, hogy indirekt módon feltesszük, hogy visszatérőek. Mivel visszatérő osztály lényeges, kapjuk, hogy ez esetben a $\{3\}$ és $\{4\}$ osztályoknak lényegeseknek kellene lennie, azonban nem lényegesek, ugyanis $3 \rightharpoonup 4$, de $4 \not\rightharpoonup 3$, illetve $4 \rightharpoonup 5$, de $5 \not\rightharpoonup 4$. Az osztályok mindegyike aperiódikus. Ha $i = 1,2$ és $j = 3,4,5$, akkor mivel

$$P(X_n = j \mid X_0 = i) = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

kapjuk, hogy

$$R_{i,j} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j \mid X_0 = i) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0, \qquad i = 1,2, \quad j = 3,4,5.$$

Mivel $j = 1,2,3,4$ esetén $P(X_n = j \mid X_0 = 5) = 0,\, n \in \mathbb{N}$ és $P(X_n = 5 \mid X_0 = 5) = 1$, $n \in \mathbb{N}$ kapjuk, hogy

$$R_{5,j} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j \mid X_0 = 5) = 0, \qquad j = 1,2,3,4,$$
$$R_{5,5} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 5 \mid X_0 = 5) = 1.$$

Mivel 3 és 4 nem visszatérő állapotok, az 2.8. Megjegyzés alapján tetszőleges $i = 1,2,3,4,5$ esetén

$$R_{i,3} = \lim_{n\to\infty} p_{i,3}^{(n)} = 0,$$
$$R_{i,4} = \lim_{n\to\infty} p_{i,4}^{(n)} = 0.$$

Mivel az $\{1,2\}$ osztály egy lényeges, aperiódikus osztály, az 4.1. Megjegyzés szerint ergodicitásának belátásához azt kell megnézni, hogy az

$$u_1 = u_1 p_{1,1} + u_2 p_{2,1},$$
$$u_2 = u_1 p_{1,2} + u_2 p_{2,2}$$

egyenletrendszernek van-e az $u_1 > 0$, $u_2 > 0$ feltételt teljesítő (u_1, u_2) megoldása. (Az $|u_1| + |u_2| < +\infty$ feltétel automatikusan igaz.) Ez az egyenletrendszer

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{3}u_1 + \frac{3}{4}u_2, \\ u_2 &= \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{4}u_2. \end{aligned}$$

Ennek megoldása $u_2 = \frac{8}{9}u_1$. Így például $(1, 8/9)$ a pozitivitási feltételt teljesítő megoldás, tehát az $\{1,2\}$ osztály ergodikus osztály. (Felhasználva, hogy egy véges, lényeges, aperiódikus osztály mindig ergodikus, közvetlenül is adódik az $\{1,2\}$ osztály ergodicitása.) Ezért

$$\pi_1 = \frac{1}{1+\frac{8}{9}} = \frac{9}{17}, \qquad \pi_2 = \frac{\frac{8}{9}}{1+\frac{8}{9}} = \frac{8}{17}.$$

Ezért, egy előadásbeli tétel miatt,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} p_{i,1}^{(n)} &= \frac{1}{m_{1,1}} = \pi_1, \qquad i = 1,2, \\ \lim_{n\to\infty} p_{i,2}^{(n)} &= \frac{1}{m_{2,2}} = \pi_2, \qquad i = 1,2. \end{aligned}$$

Így $R_{1,1} = R_{2,1} = 9/17$, és $R_{1,2} = R_{2,2} = 8/17$.

Szükséges még az $R_{3,j}$ és $R_{4,j}$, $j = 1,2,5$ mennyiségeket kiszámolni. Mivel 3 és 4 lényegtelen állapotok, $1,2$ és 5 visszatérő állapotok, az $R_{3,j}$ és $R_{4,j}$, $j = 1,2,5$-beli határértékek valóban léteznek, és tekintve, hogy $1,2$ és 5 aperiódikusak, az elmélet alapján azt is tudjuk, hogy $R_{3,j} = f^*_{3,j}\frac{1}{m_{jj}}$, $j = 1,2,5$, és $R_{4,j} = f^*_{4j}\frac{1}{m_{jj}}$, $j = 1,2,5$. Az alábbiakban $R_{3,j}$ és $R_{4,j}$, $j = 1,2,5$, értékét nem $f^*_{3,j}$, ill. $f^*_{4,j}$ meghatározására vezetjük vissza, hanem ún. első lépés analízis segítségével határozzuk meg értéküket. Az első lépésre feltételt véve

$$\begin{aligned} R_{4,1} &= \lim_{n\to\infty} P(X_n = 1 \mid X_0 = 4) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{5} P(X_n = 1 \mid X_1 = i)P(X_1 = i \mid X_0 = 4) \\ &= \sum_{i=1}^{5} p_{4,i} \lim_{n\to\infty} P(X_n = 1 \mid X_1 = i) = \sum_{i=1}^{5} p_{4,i} \lim_{n\to\infty} p_{i,1}^{(n-1)} \\ &= \sum_{i=1}^{5} p_{4,i} R_{i,1} = \frac{1}{3}R_{1,1} + \frac{5}{12}R_{4,1} + \frac{1}{4}R_{5,1} \\ &= \frac{1}{3}\frac{9}{17} + \frac{5}{12}R_{4,1} + \frac{1}{4}\cdot 0, \end{aligned}$$

ezért $R_{4,1} = \frac{3}{17}\frac{12}{7} = 36/119$. Így $f^*_{4,1} = R_{4,1}m_{1,1} = \frac{R_{4,1}}{\pi_1} = \frac{36}{119}\frac{17}{9} = \frac{68}{119} \approx 0.5714285$. Hasonlóan

$$\begin{aligned} R_{3,1} &= \sum_{i=1}^{5} p_{3,i} R_{i,1} = \frac{1}{5}R_{1,1} + \frac{3}{10}R_{2,1} + \frac{1}{5}R_{3,1} + \frac{1}{10}R_{4,1} + \frac{1}{5}R_{5,1} \\ &= \frac{1}{5}\frac{9}{17} + \frac{3}{10}\frac{9}{17} + \frac{1}{5}R_{3,1} + \frac{1}{10}\frac{36}{119} + \frac{1}{5}\cdot 0, \end{aligned}$$

ezért
$$R_{3,1} = \frac{5}{4}\left(\frac{45}{170} + \frac{36}{1190}\right) = \frac{45}{136} + \frac{18}{476} = \frac{351}{952}.$$
Így $f^*_{4,2} = R_{4,2}m_{2,2} = \frac{32}{119}\frac{17}{8} = \frac{68}{119} \approx 0.5714285$ (ezért $f^*_{4,1} = f^*_{4,2}$). Hasonlóan
$$R_{4,2} = \sum_{i=1}^{5} p_{4,i}R_{i,2} = \frac{1}{3}R_{1,2} + \frac{5}{12}R_{4,2} + \frac{1}{4}R_{5,2} = \frac{1}{3}\frac{8}{17} + \frac{5}{12}R_{4,2} + \frac{1}{4}\cdot 0,$$
ezért
$$R_{4,2} = \frac{12}{7}\frac{1}{3}\frac{8}{17} = \frac{32}{119}.$$
Hasonlóan
$$\begin{aligned} R_{3,2} &= \frac{1}{5}R_{1,2} + \frac{3}{10}R_{2,2} + \frac{1}{5}R_{3,2} + \frac{1}{10}R_{4,2} + \frac{1}{5}R_{5,2}, \\ R_{4,5} &= \frac{1}{3}R_{1,5} + \frac{5}{12}R_{4,5} + \frac{1}{4}R_{5,5}, \\ R_{3,5} &= \frac{1}{5}R_{1,5} + \frac{3}{10}R_{2,5} + \frac{1}{5}R_{3,5} + \frac{1}{10}R_{4,5} + \frac{1}{5}R_{5,5}, \end{aligned}$$
és rövid számolás után
$$R_{3,2} = \frac{39}{119}, \qquad R_{3,5} = \frac{17}{56}, \qquad R_{4,5} = \frac{51}{119} = \frac{3}{7}.$$
Így $f^*_{45} = R_{4,5}m_{5,5} = \frac{R_{4,5}}{\pi_5} = \frac{3}{7} = \frac{51}{119}$ (ezért $f^*_{4,1} + f^*_{4,5} = f^*_{4,2} + f^*_{4,5} = 1$). Az $f^*_{3,1} = f^*_{3,2}$ és $f^*_{3,5}$ mennyiségek hasonlóan meghatározhatóak.

Az alábbiakban egy másik módszert is mutatunk az $R_{3,j}$ és $R_{4,j}$, $j = 1, 2, 5$ mennyiségek meghatározására. Először a következő elnyelődési valószínűségeket határozzuk meg. Minden $i = 1, \dots, 5$ esetén legyen
$$f^*_{i,\{1,2\}} := P\big(\exists\, n \in \mathbb{N} : X_n \in \{1, 2\} \,|\, X_0 = i\big), \qquad f^*_{i,5} := P\big(\exists\, n \in \mathbb{N} : X_n = 5 \,|\, X_0 = i\big).$$
Ekkor $f^*_{i,\{1,2\}} + f^*_{i,5} = 1$, $i = 1, \dots, 5$, ugyanis nem visszatérő állapotok véges halmazában a lánc 1 valószínűséggel csak véges sokat tartózkodik, és 3 és 4 nem visszatérő állapotok. Az első lépés kimenetele szerint feltételt véve
$$\begin{aligned} f^*_{3,\{1,2\}} &= \frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5}f^*_{3,\{1,2\}} + \frac{1}{10}f^*_{4,\{1,2\}}, \\ f^*_{4,\{1,2\}} &= \frac{1}{3} + \frac{5}{12}f^*_{4,\{1,2\}}. \end{aligned}$$
A második egyenletből $f^*_{4,\{1,2\}} = 4/7$, és így
$$f^*_{3,\{1,2\}} = \frac{39}{56}, \qquad f^*_{4,5} = \frac{3}{7}, \qquad f^*_{3,5} = \frac{17}{56}.$$

Felhasználva, hogy az $\{1,2\}$ ergodikus osztályon a stacionárius eloszlás $\pi_1 = 9/17$, $\pi_2 = 8/17$, a keresett határértékek:

$$R_{3,1} = f^*_{3,\{1,2\}}\pi_1 = \frac{39}{56}\frac{9}{17} = \frac{351}{952}, \quad R_{3,2} = f^*_{3,\{1,2\}}\pi_2 = \frac{39}{56}\frac{8}{17} = \frac{39}{119}, \quad R_{3,5} = f^*_{3,5} = \frac{17}{56},$$
$$R_{4,1} = f^*_{4,\{1,2\}}\pi_1 = \frac{4}{7}\frac{9}{17} = \frac{36}{119}, \quad R_{4,2} = f^*_{4,\{1,2\}}\pi_2 = \frac{4}{7}\frac{8}{17} = \frac{32}{119}, \quad R_{4,5} = f^*_{4,5} = \frac{3}{7}.$$

Valóban, például

$$\begin{aligned}
R_{3,1} &= \lim_{n\to\infty} P(X_n = 1 \,|\, X_0 = 3) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(X_n = 1, X_0 = 3)}{P(X_0 = 3)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{P(X_n = 1, \bigcup_{m=1}^n \{X_m \in \{1,2\}\}, X_0 = 3)}{P(X_0 = 3)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=1}^n P(X_n = 1, X_m \in \{1,2\}, X_0 = 3)}{P(X_0 = 3)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=1}^n (P(X_n = 1, X_m = 1, X_0 = 3) + P(X_n = 1, X_m = 2, X_0 = 3))}{P(X_0 = 3)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^n \Big[P(X_n = 1 \,|\, X_m = 1, X_0 = 3) P(X_m = 1 \,|\, X_0 = 3) \\
&\qquad\qquad + P(X_n = 1 \,|\, X_m = 2, X_0 = 3) P(X_m = 2 \,|\, X_0 = 3)\Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^n \Big[P(X_n = 1 \,|\, X_m = 1) P(X_m = 1 \,|\, X_0 = 3) \\
&\qquad\qquad + P(X_n = 1 \,|\, X_m = 2) P(X_m = 2 \,|\, X_0 = 3)\Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^n [p_{1,1}^{(n-m)} p_{3,1}^{(m)} + p_{2,1}^{(n-m)} p_{3,2}^{(m)}] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^\infty [p_{1,1}^{(n-m)} p_{3,1}^{(m)} + p_{2,1}^{(n-m)} p_{3,2}^{(m)}] \mathbb{1}_{\{m \leqslant n\}} \\
&= \sum_{m=1}^\infty \pi_1 P(X_m \in \{1,2\} \,|\, X_0 = 3) \\
&= \pi_1 f^*_{3,\{1,2\}},
\end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti előtti lépésben a dominált konvergencia tételt használtuk, mely valóban alkalmazható ugyanis

- tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} (p_{1,1}^{(n-m)} p_{3,1}^{(m)} + p_{2,1}^{(n-m)} p_{3,2}^{(m)}) \mathbb{1}_{\{m \leqslant n\}} = \pi_1 p_{3,1}^{(m)} + \pi_2 p_{3,2}^{(m)} = \pi_1 P(X_m \in \{1,2\} \,|\, X_0 = 3),$$

- $$(p_{1,1}^{(n-m)} p_{3,1}^{(m)} + p_{2,1}^{(n-m)} p_{3,2}^{(m)}) \mathbb{1}_{\{m \leqslant n\}} \leqslant p_{3,1}^{(m)} + p_{3,2}^{(m)}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

- $$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} (p_{3,1}^{(m)} + p_{3,2}^{(m)}) &= \sum_{m=1}^{\infty} P(X_m \in \{1,2\} \,|\, X_0 = 3) = P(\exists\, m \in \mathbb{N} : X_m \in \{1,2\} \,|\, X_0 = 3) \\ &= f_{3,\{1,2\}}^* \leqslant 1 < \infty. \end{aligned}$$

Összefoglalva,

$$R = \begin{pmatrix} 9/17 & 8/17 & 0 & 0 & 0 \\ 9/17 & 8/17 & 0 & 0 & 0 \\ 351/952 & 39/119 & 0 & 0 & 17/56 \\ 36/119 & 32/119 & 0 & 0 & 51/119 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(A sorösszegeknek egynek kell lennie, és ez teljesül is.) □

5. Első lépés analízis, elnyelődési problémák, visszatérési idők

Általában elmondható, hogy sok Markov-lánccal kapcsolatos probléma megoldható az első lépés vizsgálatával. A Markov-láncot úgymond két részre osztjuk, mi történik az első lépésben és mi történik az utána következő lépésekben. Ez a módszer azért olyan hatékony, mert a Markov-lánc, definíciója folytán, rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy az első lépés utáni jövő ugyanolyan ,,eloszlású,” mint a nulladik lépés utáni jövő.

A továbbiakban csak diszkrét idejű, véges állapotterű Markov-láncokkal foglalkozunk. Legyen tehát $\{X_n : n \geqslant 0\}$ egy Markov-lánc, melynek fázistere $\{0, 1, \ldots, N-1\}$, azaz a láncnak összesen N állapota van.

Egy i állapotot **elnyelő állapotnak** hívunk, ha $p_{i,i} = 1$ (absorbing state).

Sok Markov-láncokkal kapcsolatos kérdés megválaszolható úgy, hogy az eredeti Markov-láncból (bizonyos állapotokból elnyelő állapotokat csinálva) egy új, elnyelő láncot alakítunk ki.

Legyen S az állapottér egy tetszőleges részhalmaza. Például $S = \{i_1, i_2\}$.

Kérdéseink lehetnek például

(a) Várhatóan mennyi idő alatt éri el a Markov-lánc az S halmazt?

(b) Feltéve, hogy a Markov-lánc eléri az S halmazt mi annak a feltételes valószínűsége, hogy egy adott S-beli állapotot ér el először a Markov-lánc?

Módszer a fenti kérdések megválaszolására.

(i) Tegyük az összes S-beli állapotot elnyelő állapottá (akkor is, ha az eredeti rendszerben nem azok)!

(ii) Ezt az új Markov-láncot tekintve használjuk az alább kidolgozandó módszerek valamelyikét:

(a) lineáris egyenletrendszeres megközelítési mód,

(b) mátrixos megközelítési mód.

Az újonnan megkonstruált Markov-láncban lesznek elnyelő és nem elnyelő állapotok. Tegyük fel, hogy a $0, 1, \ldots, r-1$ állapotok nem elnyelőek és az $r, \ldots, N-1$ állapotok elnyelőek. (Ha nem ez lenne a helyzet, úgy rendezzük, majd számozzuk át az állapotokat!) Feltételezve az állapotok előbbi felsorolását az új Markov-lánc átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

ahol I az $(N-r)\times(N-r)$-es egységmátrix, 0 az $(N-r)\times r$-es nullmátrix, $Q \in \mathcal{M}_{r\times r}$, $R \in \mathcal{M}_{r\times(N-r)}$. (Itt $\mathcal{M}_{m\times n}$ az $m \times n$-es mátrixok halmazát jelöli, és a Q ill. az R mátrix P-ből értelemszerűen származtatható.)

1. Kérdés: Adott állapotba való elnyelődés valószínűsége (hitting probabilities)

Lineáris egyenletrendszeres módszer

Legyen tetszőleges $i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ esetén

$$T_i := \min\{n \geqslant 0 : X_n \geqslant r, X_0 = i\},$$

azaz T_i a Markov-lánc elnyelődéséig eltelt idő, feltéve, hogy i-ből indul a lánc (absorption time). Ekkor T_i megállítási pillanat az $\{X_n : n \geqslant 0\}$ Markov-láncra nézve, azonban $P(T_i = +\infty) > 0$ is előfordulhat. Ha például i visszatérő (nem elnyelő) állapot, úgy $P(T_i = +\infty) = 1$. Legyen továbbá tetszőleges $i \in \{0, \ldots, r-1\}$ és $k \in \{r, r+1, \ldots, N-1\}$ állapotok esetén

$$U_{i,k} := P(X_{T_i} = k \mid X_0 = i),$$

azaz $U_{i,k}$ annak a valószínűsége, hogy a Markov-lánc a k (elnyelő) állapotban nyelődik el, feltéve, hogy i-ből indul (hitting probability). Nézzük meg, hogy mi történik az első lépésben és utána. Matematikailag ez azt jelenti, hogy a teljes valószínűség tételét (law of total probability) alkalmazzuk az első lépés kimenetele szerint. Ezért tetszőleges $i \in \{0, \ldots, r-1\}$

és $k \in \{r, r+1, \ldots, N-1\}$ állapotok esetén

$$\begin{aligned}
U_{i,k} = P(X_{T_i} = k \mid X_0 = i) &= \sum_{j=0}^{N-1} P(X_{T_i} = k, X_1 = j \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} P(X_{T_i} = k \mid X_1 = j, X_0 = i) P(X_1 = j \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} P(X_{T_i} = k \mid X_1 = j, X_0 = i) p_{i,j}.
\end{aligned}$$

Az alábbiakban a $P(X_{T_i} = k \mid X_1 = j, X_0 = i)$ valószínűség kiszámításával foglalkozunk. Ha $j = k$, akkor mivel $X_0 = i, X_1 = j = k$, kapjuk, hogy $T_i = 1$, és ezért $X_{T_i} = k$, továbbá

$$P(X_{T_i} = k \mid X_1 = j, X_0 = i) = 1.$$

Ha $j \neq k$ és $j \in \{r, \ldots, N-1\}$, úgy $T_i = 1$ és $X_{T_i} = j \neq k$, és ezért

$$P(X_{T_i} = k \mid X_1 = j, X_0 = i) = 0.$$

Ha $j \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$, úgy $T_i \geqslant 2$ és

$$\begin{aligned}
P(X_{T_i} = k \mid X_1 = j, X_0 = i) &= P(\exists\, n \geqslant 2 : X_n = k \mid X_1 = j, X_0 = i) \\
&= P(\exists\, n \geqslant 0 : X_{n+2} = k \mid X_1 = j, X_0 = i) \\
&= P(\exists\, n \geqslant 0 : X_{n+2} = k \mid X_1 = j),
\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben a Markov-tulajdonságot használtuk. Legyen $Y_{i-1} = X_i, i \in \mathbb{N}$. Ekkor $\{Y_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc, melynek átmenetvalószínűségi mátrixa megegyezik $\{X_n : n \geqslant 0\}$ átmenetvalószínűségi mátrixával. Így, bevezetve az

$$T_j^Y := \min\{n \geqslant 0 : Y_n \geqslant r, Y_0 = j\}$$

jelölést, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
P(X_{T_i} = k \mid X_1 = j, X_0 = i) &= P(\exists\, n \geqslant 0 : X_{n+2} = k \mid X_1 = j) \\
&= P(\exists\, n \geqslant 0 : Y_{n+1} = k \mid Y_0 = j) = P(Y_{T_j^Y} = k \mid Y_0 = j) \\
&= P(X_{T_j} = k \mid X_0 = j) = U_{j,k}.
\end{aligned}$$

Ezért

$$U_{i,k} = p_{i,k} + \sum_{j=0}^{r-1} p_{i,j} U_{j,k}, \qquad i = 0, \ldots, r-1, \quad k = r, \ldots, N-1.$$

Mátrixos megközelítési mód

Átírjuk most az előbbi egyenletrendszert mátrixos alakra. Legyen $U := (U_{i,k})$, $i = 0, \ldots, r-1$, $k = r, \ldots, N-1$, azaz $U \in \mathcal{M}_{r\times(N-r)}$. Figyelembe véve P (5.1) alakját, adódik, hogy

$$\begin{aligned} R &= (p_{i,k}), \quad i = 0, \ldots, r-1, \ j = r, \ldots, N-1, \\ Q &= (p_{i,j}), \quad i = 0, \ldots, r-1, \ j = 0, \ldots, r-1, \end{aligned}$$

ezért $U = R+QU$. Feltételezve, hogy $I-Q$ invertálható, ekvivalens átalakításokat végezve, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (I-Q)U &= R, \\ U &= (I-Q)^{-1}R. \end{aligned}$$

Általában nem invertálható $I-Q$. Ha például

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{úgy} \qquad I - Q = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

és $\det(I-Q) = 0$, azaz $I-Q$ nem invertálható. Abban az esetben, ha $\sum_{j=0}^{r-1} p_{i,j} < 1$, $i = 0, 1, \ldots, r-1$, azaz Q minden sorösszege (szigorúan) kisebb, mint 1, megmutatjuk, hogy $I-Q$ invertálható. Ellátva $\mathbb{R}^r$-et a $l_\infty^{(r)}$ normával, a $Q \in \mathcal{M}_{r\times r}$ mátrix normája:

$$\|Q\| = \max_{0\leqslant i\leqslant r-1} \sum_{j=0}^{r-1} p_{i,j} < 1.$$

Így a Neumann-tétel alapján $I-Q$ invertálható és $(I-Q)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n$.

2. Kérdés: Várhatóan hányszor látogat meg a Markov-lánc egy adott nem elnyelő állapotot mielőtt elnyelődne (valamelyik elnyelő állapotban)?

Lineáris egyenletrendszeres módszer

Részkérdések:

(i) Várhatóan hány lépést tesz meg a lánc mielőtt elnyelődne (valamelyik elnyelő állapotban)?

(ii) Feltételezzük, hogy valahányszor a Markov-lánc ellátogat egy előre adott nem elnyelő állapotba 5 forintot nyerünk. Várhatóan hány forintot nyerünk mielőtt a játék véget ér (azaz mielőtt a Markov-lánc elnyelődik valamely elnyelő állapotban)?

Ezekre a kérdésekre a válaszokat egységesen tudjuk megadni. A korábbi jelölésekkel élve tetszőleges $i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ esetén

$$T_i = \min\{n \geqslant 0 : X_n \geqslant r, X_0 = i\},$$

azaz T_i a Markov-lánc elnyelődéséig eltelt idő, feltéve, hogy i-ből indul. Legyen $g : \{0,1,\ldots,N-1\} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Vezessük be tetszőleges $i \in \{0,\ldots,r-1\}$ esetén az

$$w_i := \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{T_i-1} g(X_n) \,\Big|\, X_0 = i\right)$$

mennyiségeket. (w_i nem más, mint a Markov-lánc elnyelődéséig meglátogatott j nem elnyelő állapotokra a $g(j)$ mennyiségek összegének várható értéke.) A továbbiakban feltételezzük, hogy az összes elnyelő állapoton g nullát vesz fel, azaz $g(j) = 0$, ha $r \leqslant j \leqslant N-1$.

Speciális esetek:

(i) Ha $g(l) = 1$, $l = 0,\ldots,r-1$, azaz g minden nem elnyelő állapotra 1, úgy w_i nem más, mint a Markov-lánc elnyelődéséig eltelt idő várható értéke feltéve, hogy i-ből indul.

(ii) Ha $g(l) = \delta_{l,k}$, ahol $k \in \{0,1,\ldots,r-1\}$ egy nem elnyelő állapot, úgy w_i megadja, hogy várhatóan hányszor látogatjuk meg a k nem elnyelő állapotot, mielőtt a Markov-lánc elnyelődne, feltéve, hogy i-ből indul. Ezt a későbbiekben $W_{i,k}$-val jelöljük majd.

(iii) Amennyiben g tetszőleges, úgy w_i interpretálható úgy, hogy w_i nem más, mint várható nyereményünk egy olyan játékban, mely addig tart míg a Markov-lánc el nem nyelődik és ha a Markov-lánc egy időpontban az $l \in \{0,\ldots,r-1\}$ nem elnyelő állapotban van, úgy abban az időpontban $g(l)$ forintot nyerünk.

Az alábbiakban azon feltételezés mellett, hogy **az** $i = 0,\ldots,r-1$ **nem elnyelő állapotok átmeneti állapotok** a w_i mennyiségekre egy rekurziós összefüggést vezetünk le. Felhasználva, hogy átmeneti állapotok véges halmazában egy Markov-lánc 1 valószínűséggel csak véges sokat tartózkodik, kapjuk, hogy ekkor $P(T_i < +\infty) = 1$, $i = 0,\ldots,r-1$. Tetszőleges $i = 0,1,\ldots,r-1$ esetén, felhasználva, hogy $P(T_i < +\infty) = 1$, a teljes várható érték tétele alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
w_i &= \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{T_i-1} g(X_n) \,\Big|\, X_0 = i\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{T_i-1} g(X_n) \,\Big|\, X_0 = i, T_i = m\right) P(T_i = m \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{m-1} g(X_n) \,\Big|\, X_0 = i, T_i = m\right) P(T_i = m \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \mathbb{E}(g(X_n) \mid X_0 = i, T_i = m) P(T_i = m \mid X_0 = i).
\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $1 \leqslant m \leqslant n$ esetén $\mathbb{E}(g(X_n) \,\big|\, X_0 = i, T_i = m) = 0$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
w_i &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}(g(X_n) \,\Big|\, X_0 = i, T_i = m) P(T_i = m \,|\, X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(g(X_n) | \, X_0 = i) \\
&= g(i) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(g(X_n) | \, X_0 = i).
\end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned}
w_i &= g(i) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-1} g(j) P(X_n = j \,|\, X_0 = i) && \text{a várható érték definíciója miatt} \\
&= g(i) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} g(j) P(X_n = j \,|\, X_0 = i, X_1 = l) p_{i,l} && \text{teljes valószínűség tétele} \\
&= g(i) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} g(j) P(X_n = j \,|\, X_1 = l) p_{i,l} && \text{a Markov-tulajdonság miatt} \\
&= g(i) + \sum_{l=0}^{N-1} p_{i,l} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-1} g(j) P(X_n = j \,|\, X_1 = l) && \text{a szummák átrendezése.}
\end{aligned}$$

Vezessük be az $Y_{i-1} = X_i$, $i = 1, 2, \ldots$ jelölést. Ekkor $\{Y_n : n \geqslant 0\}$ is Markov-lánc lesz, melynek fázistere és átmenetvalószínűségi mátrixa megyegyezik az $\{X_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc fázisterével és átmenetvalószínűségi mátrixával. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
w_i &= g(i) + \sum_{l=0}^{N-1} p_{i,l} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-1} g(j) P(X_{n+1} = j \,|\, X_1 = l) \\
&= g(i) + \sum_{l=0}^{N-1} p_{i,l} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-1} g(j) P(Y_n = j \,|\, Y_0 = l) \\
&= g(i) + \sum_{l=0}^{N-1} p_{i,l} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(g(Y_n) \,|\, Y_0 = l).
\end{aligned}$$

Ha $l = 0, 1, \ldots, r-1$, úgy feltételezésünk alapján l átmeneti állapot, így a korábbi számolások alapján:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(g(Y_n) \,|\, Y_0 = l) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} g(Y_n) \,\Big|\, Y_0 = l \right), \quad l = 0, 1, \ldots, r-1.$$

Ha pedig $l = r, r+1, \ldots, N-1$, úgy l elnyelő állapot és $\mathbb{E}(g(Y_n) \,|\, Y_0 = l) = 0$, $n \geqslant 0$, így

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(g(Y_n) \,|\, Y_0 = l) = 0 = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} g(Y_n) \,\Big|\, Y_0 = l \right), \quad l = r, \ldots, N-1.$$

Ezért

$$
\begin{aligned}
w_i &= g(i) + \sum_{l=0}^{N-1} p_{i,l} \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} g(Y_n) \,\Big|\, Y_0 = l \right) \\
&= g(i) + \sum_{l=0}^{N-1} p_{i,l} \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{T_l-1} g(Y_n) \Big|\, Y_0 = l \right) \\
&= g(i) + \sum_{l=0}^{N-1} p_{i,l} w_l = g(i) + \sum_{l=0}^{r-1} p_{i,l} w_l.
\end{aligned}
$$

Mátrixos megközelítési mód

Tetszőleges $i \in \{0, \dots, r-1\}$ és $k \in \{0, \dots, r-1\}$ állapotok esetén jelölje $W_{i,k}$, hogy a Markov-lánc várhatóan hányszor látogatja meg a k nem elnyelő állapotot mielőtt elnyelődne, feltéve, hogy i-ből indul. Hasonlóan $i, k \in \{0, \dots, r-1\}$ és $n \geqslant 1$ esetén jelölje $W_{i,k}^{(n)}$, hogy a Markov-lánc várhatóan hányszor látogatja meg az első n lépés alatt a k nem elnyelő állapotot mielőtt elnyelődne, feltéve, hogy i-ből indul. (n lehet kisebb és nagyobb is, mint az elnyelődéshez szükséges lépésszám.) A korábbi jelölésekkel élve

$$
W_{i,k}^{(n)} = \mathbb{E}\left(\sum_{m=0}^{n} g(X_m) \,|\, X_0 = i \right),
$$

ahol $g(l) = \delta_{l,k}$, $l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Legyen $W := (W_{i,k})$, $i, k = 0, \dots, r-1$, azaz $W \in \mathcal{M}_{r \times r}$.

5.1. Lemma. *Ha a* $0, 1, \dots, r-1$ *állapotok átmeneti állapotok és* $I - Q$ *invertálható, úgy* $W = (I - Q)^{-1}$.

Bizonyítás. A korábbi módszerrel belátható, hogy $W^{(n)} := (W_{i,k}^{(n)})$, $i, k = 0, \dots, r-1$-re igaz, hogy

$$
W_{i,k}^{(n)} = \delta_{i,k} + \sum_{j=0}^{r-1} p_{i,j} W_{j,k}^{(n-1)}.
$$

Mátrix alakban ez a $W^{(n)} = I + QW^{(n-1)}$ összefüggést jelenti, ahol I az $(r \times r)$-es egységmátrix. Felhasználva, hogy a $0, 1, \dots, r-1$ állapotok átmeneti állapotok megmutatható, hogy $n \to \infty$ esetén $W_{j,k}^{(n)} \to W_{j,k}$, $j, k = 0, \dots, r-1$. Így $W = I + QW$. Ekvivalens átalakítások útján

$$
(I - Q)W = I \qquad \Longrightarrow \qquad W = (I - Q)^{-1}.
$$

$\square$

5.2. Megjegyzés. Ezt felhasználva arra a kérdésre is válaszolhatunk, hogy a Markov-lánc várhatóan hányszor látogatja meg a k átmeneti állapotot, mielőtt elnyelődne. A válasz

$$\sum_{i=0}^{r-1} W_{i,k} P(X_0 = i),$$

és ez nem más, mint a $q(I-Q)^{-1}$ oszlopvektor k-adik koordinátája, ahol q a lánc kezdeti eloszlását jelöli. Az is adódik, hogy a Markov-lánc várhatóan

$$\sum_{k=0}^{r-1} \sum_{i=0}^{r-1} W_{i,k} P(X_0 = i)$$

lépés alatt nyelődik el, és ez nem más, mint a $\langle q, (I-Q)^{-1}\mathbb{1}\rangle$ belsőszorzat, ahol $\mathbb{I}$ a csupa egyesekből álló $(r \times 1)$-es oszlopvektort jelöli. $\square$

A következő tétel is jól alkalmazható az elnyelődési valószínűségek kiszámolására, azaz azoknak a valószínűségeknek a meghatározására, hogy a lánc egy lényegtelen állapotból kiindulva egy adott lényeges osztályt elérjen. (Mivel lényeges osztály zárt halmazt alkot, onnan a lánc már nem távozik, vagyis ott ”elnyelődik”.)

5.3. Tétel. *Legyen* $H \subset I$ *tetszőleges részhalmaz. Ekkor az*

$$y_i = \sum_{k \in I \setminus H} p_{ik} y_k + \sum_{k \in H} p_{ik}, \qquad i \in I \tag{5.2}$$

egyenletrendszernek létezik minimális nemnegatív megoldása, és az $y_i = f^*_{iH}$, $i \in I$, *ahol*

$$f^*_{iH} := \mathbb{P}(\xi_n \in H \quad \textit{valamely} \quad n \geqslant 1\textit{-re} \,|\, \xi_0 = i), \quad i \in I.$$

5.4. Feladat. Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy homogén Markov-lánc, melynek fázistere $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ és átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Legyen $H := \{0, 1\}$ és az 5.3. Tételt felhasználva határozzuk meg az $f^*_{i,H}$, $i = 0, 1, 2, 4$, elnyelődési valószínűségeket!

Megoldás. Az (5.2) egyenletrendszer az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned}
y_0 &= p_{0,2}y_2 + p_{0,3}y_3 + p_{0,4}y_4 + p_{0,0} + p_{0,1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,\\
y_1 &= p_{1,2}y_2 + p_{1,3}y_3 + p_{1,4}y_4 + p_{1,0} + p_{1,1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,\\
y_2 &= p_{2,2}y_2 + p_{2,3}y_3 + p_{2,4}y_4 + p_{2,0} + p_{2,1} = \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3,\\
y_3 &= p_{3,2}y_2 + p_{3,3}y_3 + p_{3,4}y_4 + p_{3,0} + p_{3,1} = \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3,\\
y_4 &= p_{4,2}y_2 + p_{4,3}y_3 + p_{4,4}y_4 + p_{4,0} + p_{4,1} = \frac{1}{2}y_4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Így

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ t\\ t\\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ezért az (5.2) egyenletrendszer minimális nemnegatív megoldása

$$\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^*_{0,H}\\ f^*_{1,H}\\ f^*_{2,H}\\ f^*_{3,H}\\ f^*_{4,H} \end{pmatrix}.$$

□

5.5. Feladat. Legyen $\{X_n : n \geqslant 0\}$ egy véges állapotterű irreducibilis Markov-lánc, jelölje $\{0, 1, \ldots, N\}$ a fázisterét.

(i) Mennyi a valószínűsége, hogy a Markov-lánc i-ből indulva eljut j-be, ahol $i, j \in \{0, 1, \ldots, N\}$?

(ii) Legyen minden $i = 0, 1, \ldots, N$ esetén

$$x_i := P\Big(\text{a Markov-lánc hamarabb jut el } N\text{-be, mint 0-ba} \,\Big|\, X_0 = i\Big),$$

azaz

$$x_i = P\Big(\exists\, n \geqslant 0 : X_n = N \text{ és } X_k \neq 0, \text{ ha } 0 \leqslant k \leqslant n-1 \,\Big|\, X_0 = i\Big).$$

Vezessünk le egy olyan egyenletrendszert, melynek $x_1, \ldots, x_N$ megoldása.

(iii) Tegyük fel, hogy $\sum_{j=0}^{N} j p_{i,j} = i$, minden $i = 1, \ldots, N-1$ esetén. Mutassuk meg, hogy ekkor $x_i = i/N$, $i = 0, \ldots, N$ megoldása a (ii)-ben levezetett egyenletrendszernek.

Megoldás.

(i) Mivel a Markov-lánc irreducibilis és véges állapotterű kapjuk, hogy minden állapot visszatérő, azaz $f_{i,i}^* = 1$, $i = 0, \ldots, N$. És egy előadásbeli tétel miatt az is teljesül, hogy $f_{i,j}^* = 1$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Azaz a válasz 1.

(ii) Nyilván $x_0 = 0$ és $x_N = 1$. Feltételt véve az első lépés kimenetele szerint kapjuk, hogy minden $i = 1, \ldots, N-1$ esetén

$$\begin{aligned}
x_i &= \sum_{j=0}^{N} P(\exists\, n \geqslant 0 : X_n = N \text{ és } X_k \neq 0,\ \text{ha } 0 \leqslant k \leqslant n-1, X_1 = j \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{j=0}^{N} P(\exists\, n \geqslant 0 : X_n = N \text{ és } X_k \neq 0,\ \text{ha } 0 \leqslant k \leqslant n-1 \mid X_1 = j, X_0 = i) P(X_1 = j \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{j=0}^{N} P(\exists\, n \geqslant 0 : X_n = N \text{ és } X_k \neq 0,\ \text{ha } 0 \leqslant k \leqslant n-1 \mid X_1 = j) P(X_1 = j \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{j=0}^{N} x_j p_{i,j} = \sum_{j=1}^{N-1} x_j p_{i,j} + p_{i,N}.
\end{aligned}$$

(iii) Azt kell megmutatni, hogy minden $i = 1, \ldots, N-1$ esetén

$$\frac{i}{N} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{j}{N} p_{i,j} + p_{i,N},$$

amely következik a feltételekből, hiszen

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{j}{N} p_{i,j} + p_{i,N} = \sum_{j=0}^{N} \frac{j}{N} p_{i,j} = \frac{1}{N} i.$$

□

5.6. Feladat. Petinek 2 forintja van és nagyon sürgősen (legalább) 10 forintra kell növelnie a vagyonát. Lehetősége van a következő játékot játszani, feldobnak egy szabályos érmét, ha az fej, akkor elveszíti az általa önként megválasztott tétet, ha írás, akkor visszakapja a tétjét és pluszban még ugyanannyit kap. Peti a következő stratégia szerint játszik. Addig, amíg 5 forintja vagy ennél kevesebbje van, felrakja az összes pénzét, ha már 5 forintnál többje van, úgy annyit rak fel, amennyivel pénzét kiegészítve már pontosan 10 forintja lenne. Legyen $X_0 = 2$ és minden $n \geqslant 1$ esetén jelölje X_n az n-edik dobás után Peti vagyonát.

(i) Mutassuk meg, hogy Peti $1/5$ valószínűséggel eléri a célját!

(ii) Várhatóan hány lépés alatt hagyja abba Peti a játékot (azaz veszti el minden pénzét vagy éri el a 10 forintos határt)? (Lehet neki szerencsés esetben 10 forintnál többje is!)

Megoldás. Látható, hogy $\{X_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc, melynek fázistere $\{0, 2, 4, 6, 8, 12, 14\}$. Ekkor $\{0\}$, $\{12\}$, $\{14\}$ visszatérő, elnyelő osztályok, míg $\{2, 4, 6, 8\}$ átmeneti osztály. Mivel minden átmeneti állapotban 1-valószínűséggel csak véges sokat van a lánc, és véges sok átmeneti állapot van jelen esetben, kapjuk, hogy 1-valószínűséggel véges időtartamon belül Peti vagy tönkremegy vagy eléri a célját.

(i): Legyen $i = 0, 1, \ldots, 10$ esetén

$$p_i := P(\exists\, n \geqslant 0 : X_n \geqslant 10 \,|\, X_0 = i).$$

Nyilván $p_0 = 0$ és $p_{10} = 1$. Nekünk a p_2 valószínűséget kell kiszámolni. Ha $X_0 = 2$, akkor minden pénzét felrakja Peti, így $X_1 = 0$ vagy $X_1 = 4$ $1/2$, ill. $1/2$ valószínűséggel. Az első lépés kimenetelére alkalmazva a teljes valószínűség tételét

$$\begin{aligned} p_2 &= P(\exists\, n \geqslant 0 : X_n \geqslant 10 \,|\, X_1 = 4, X_0 = 2) P(X_1 = 4 \,|\, X_0 = 2) \\ &\quad + P(\exists\, n \geqslant 0 : X_n \geqslant 10 \,|\, X_1 = 0, X_0 = 2) P(X_1 = 0 \,|\, X_0 = 2) \\ &= \frac{1}{2} p_4 + \frac{1}{2} 0 = \frac{1}{2} p_4, \end{aligned}$$

ahol a Markov-tulajdonságot is felhasználtuk. Hasonlóan, ha 4 forintja van kezdetben (azaz $X_0 = 4$), úgy felrakja minden pénzét, így vagy 8 vagy 0 forintja lesz $1/2$, ill. $1/2$ valószínűséggel, ezért

$$p_4 = \frac{1}{2} p_8.$$

Ha 8 forintja van kezdetben, akkor csak 2 forintot tesz fel, így $1/2$ valószínűséggel 6 forintja, ill. $1/2$ valószínűséggel 10 forintja lesz. Ezért

$$p_8 = \frac{1}{2} p_6 + \frac{1}{2}.$$

Hasonlóan

$$p_6 = \frac{1}{2} p_2 + \frac{1}{2}.$$

Ezért

$$p_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} = \frac{1}{16}p_2 + \frac{1}{16} + \frac{1}{8},$$

így $p_2 = 1/5$.

(ii) Legyen

$$T := \inf\{n \geqslant 0 : X_n = 0 \quad \text{vagy} \quad X_n \geqslant 10\}$$

és minden $i = 0, \ldots, 10$ esetén legyen

$$k_i := \mathbb{E}(T \,|\, X_0 = i).$$

Nyilván $k_0 = 0$. Nekünk k_2-re van szükségünk.

Ha kezdetben 2 forintja van (azaz $X_0 = 2$), akkor minden pénzét felrakja az első lépésben, és $1/2$ valószínűséggel 4 forintja, ill. $1/2$ valószínűséggel 0 forintja lesz. Ezért

$$
\begin{aligned}
k_2 = \mathbb{E}(T \mid X_0 = 2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(T = k \mid X_0 = 2) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(T = k \mid X_0 = 2) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(T = k \mid X_1 = 4, X_0 = 2)P(X_1 = 4 \mid X_0 = 2) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(T = k \mid X_1 = 0, X_0 = 2)P(X_1 = 0 \mid X_0 = 2).
\end{aligned}
$$

Mivel

$$
\mathbb{P}(T = k \mid X_1 = 0, X_0 = 2) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = 1, \\ 0 & \text{ha } k \geqslant 2, \end{cases}
$$

és $\mathbb{P}(T = 1 \mid X_1 = 4, X_0 = 2) = 0$, kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
k_2 &= \sum_{k=2}^{\infty} k\mathbb{P}(T = k \mid X_1 = 4, X_0 = 2)\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\mathbb{P}(T = k+1 \mid X_1 = 4, X_0 = 2)\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(T = k+1 \mid X_1 = 4, X_0 = 2)\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = k+1 \mid X_1 = 4, X_0 = 2)\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \mathbb{E}(T \mid X_0 = 4)\frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

ahol felhasználtuk a Markov-tulajdonságot és azt is, hogy Peti 1-valószínűséggel véges időtartamon belül tönkremegy vagy eléri a célját (és így $\mathbb{P}(T = \infty \mid X_0 = i) = 0$, $i = 0, \ldots, 10$). Ezért

$$
k_2 = (1 + k_4)\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}k_4.
$$

Hasonlóan

$$
\begin{aligned}
k_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + k_8) = 1 + \frac{1}{2}k_8, \\
k_8 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + k_6) = 1 + \frac{1}{2}k_6, \\
k_6 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + k_2) = 1 + \frac{1}{2}k_2.
\end{aligned}
$$

Így

$$
\begin{aligned}
k_2 &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}k_2\right)\right)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}k_2,
\end{aligned}
$$

így $k_2 = 2$. □

5.7. Feladat. Legyen $\{X_n : n \geqslant 0\}$ egy Markov-lánc, melynek fázistere $\{0, 1, \ldots, 8\}$ és átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0 & 0.1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(i) Mi a valószínűsége, hogy 2 lépés alatt a Markov-lánc a 3 állapotból eljut a 6 állapotba?

(ii) Mi a valószínűsége, hogy 4 lépés alatt a Markov-lánc a 7 állapotból eljut a 2 állapotba?

(iii) A lényeges és lényegtelen osztályokat meghatározva hozzuk az átmeneti mátrixot kanonikus alakra!

(iv) Melyek a visszatérő és melyek a nem visszatérő osztályok?

(v) Adjunk közelítő becslést a $P(X_{24} = 8 \,|\, X_0 = 1)$ valószínűségre!

(vi) Az átmenetvalószínűségi mátrix kanonikus alakját tekintve az összes zárt osztályt egy-egy (elnyelő) állapottal helyettesítve (azaz egy elnyelő láncot csinálva) írjuk fel az új lánc átmenetvalószínűségi mátrixát!

(vii) Az (v) és (vi) részeket felhasználva adjunk közelítő becslést a $P(X_{61} = 8 \,|\, X_0 = 0)$ valószínűségre!

Megoldás.

(i) A $p^{(2)}_{3,6} = P(X_2 = 6 \,|\, X_0 = 3)$ valószínűséget kell kiszámolni. Ekkor

$$p^{(2)}_{3,6} = \sum_{i=0}^{8} p_{3,i}p_{i,6} = p_{3,2}p_{2,6} + p_{3,3}p_{3,6} = 0.2 \cdot 1 + 0.8 \cdot 0 = 0.2.$$

(ii) A $p^{(4)}_{7,2}$ valószínűséget kell kiszámolni. A 7 állapotból csak a 4 vagy a 7 állapotba lehet eljutni, és a 4 állapotból is csak a 4 vagy a 7 állapotba lehet eljutni, így a keresett valószínűség 0.

(iii) és (iv) Az $\{1,8\}$, $\{4,7\}$, $\{3,6,2\}$ zárt, lényeges, visszatérő osztályok, az $\{0\}$, $\{5\}$ lényegtelen, nem visszatérő osztályok. Az átmenetvalószínűségi mátrix kanonikus alakja

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 8 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \\ 0 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 8 & 3 & 6 & 2 & 4 & 7 & 0 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(v) Mivel $\{1,8\}$ egy visszatérő, aperiódikus, lényeges osztály, az 4.1. Megjegyzés alapján ergodicitásának belátásához azt kell megnézni, hogy az

$$\begin{aligned} u_1 &= 0.1u_1 + 1u_8, \\ u_2 &= 0.9u_1 + 0u_8 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek van-e az $u_1 > 0$, $u_8 > 0$ feltételt teljesítő (u_1, u_8) megoldása. (Az $|u_1| + |u_8| < +\infty$ feltétel automatikusan teljesül.) Ennek egy megoldása például $u_1 = 1$, $u_8 = 0.9$, így $(1, 0.9)$ a pozitivitási feltételt teljesítő megoldás, tehát az $\{1,8\}$ osztály ergodikus. (Felhasználva, hogy egy véges, lényeges, aperiódikus osztály mindig ergodikus, közvetlenül is adódik az $\{1,8\}$ osztály ergodicitása.) Ezért

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{1+0.9} = \frac{10}{19}, \\ \pi_8 &= \frac{0.9}{1.9} = \frac{9}{19}. \end{aligned}$$

Egy előadásbeli tétel miatt

$$\lim_{n\to\infty} p_{1,8}^{(n)} = \frac{1}{m_{8,8}} = \pi_8,$$

ezért $9/19$ jó becslése lehet $p_{1,8}^{(24)}$-nek.

(vi) Az új lánc átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Heurisztikusan az $\{1,8\}$, $\{3,6,2\}$, $\{4,7\}$, $\{0\}$, és $\{5\}$ osztályok lesznek az új állapotok.) Például $(P')_{4,1} = 0.3$, mert annak a valószínűségét kell meghatározni, hogy a $\{0\}$ osztályból az $\{1,8\}$ osztályba jutunk 1 lépéssel, ez pedig az eredeti átmenetvalószínűségi mátrix alapján $0.2+0.1=0.3$.

(vii) Kiszámoljuk először az $\{1,8\}$ osztályban történő elnyelődés valószínűségét, feltéve, hogy 0-ból indulunk. Az „első lépés analízisben” (5 Fejezet) leírtakat alkalmazzuk. Az (v) és (vi) részben már előállítottuk az új (elnyelő) Markov-láncot. Felírjuk most P'-t ún. kanonikus alakban

$$P' = \begin{pmatrix} Q & R \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ \{0\} \\ \{5\} \\ \{1,8\} \\ \{3,6,2\} \\ \{4,7\} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \{0\} & \{5\} & \{1,8\} & \{3,6,2\} & \{4,7\} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Az első lépés analízis módszerében használt jelölésekkel élve $N=5$, $r=2$ és a 2 elnyelő állapotba való elnyelődés valószínűségét kell kiszámítani, feltéve, hogy a 0 állapotból indulunk. Az elmélet szerint ez az $U=(I_{2\times2}-Q)^{-1}R$ mátrix $(1,1)$ eleme. Itt

$$I_{2\times2}-Q = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

így

$$(I_{2\times2}-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 10/9 & 1/9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ezért

$$(I_{2\times2}-Q)^{-1}R = \begin{pmatrix} 10/9 & 1/9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3+1/30 & 1/9+4/90 & 4/9+1/30 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Így annak a valószínűsége, hogy az eredeti Markov-láncot tekintve a 0 állapotból kiindulva elérünk az $\{1,8\}$ osztályba (és így ott is maradunk) $U_{1,1}=1/3+1/30=11/30$.

Mivel az (v) részben már kiszámoltuk az $\{1,8\}$ osztály számára a stacionárius valószínűségeket, kapjuk, hogy a $p_{0,8}^{(61)}$ valószínűségre jó becslés $11/30\cdot 9/19 = 33/190$. □

5.8. Feladat. [Szevasztyanov–Csisztyakov–Zubkov [9], 5.1.19 Feladat] Legyen $\{X_n : n\geqslant 0\}$ egy Markov-lánc, melynek fázistere $\{1,2,3,4,5,6\}$ és átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3/12 & 2/12 & 1/12 & 3/12 & 1/12 & 2/12 \\ 1/12 & 1/12 & 3/12 & 1/12 & 4/12 & 2/12 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Legyen a Markov-lánc $n = 0$ időpontbeli eloszlása (azaz kezdeti eloszlása)

$$P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \frac{1}{2}, \qquad P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = P(X_0 = 5) = P(X_0 = 6) = 0.$$

Határozzuk meg

(i) a lényegtelen állapotokat,

(ii) a lényegtelen állapotok halmazából való kikerülésig eltelt idő várható értékét,

(iii) a $\{3, 4\}$ és az $\{5, 6\}$ osztályba kerülés valószínűségét, feltéve, hogy a kezdőállapot $i \in \{1, 2\}$,

(iv) a $\pi_k := \lim_{n\to\infty} P(X_n = k)$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ határeloszlást.

(v) Van-e ennek a Markov-láncnak stacionárius eloszlása? Feltéve, hogy igen, egyértelmű-e a stacionárius eloszlás?

Megoldás.

(i) Az 1 és 2 lényegtelen állapotok és ketten alkotják az $\{1, 2\}$ lényegtelen osztályt.

(ii) A $\{3, 4\}$ és az $\{5, 6\}$ osztályokat egy-egy elnyelő állapottal helyettesítve legyen az új Markov-lánc fázistere $\{1, 2, 3, 4\}$ és átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \;1\; & \;\;2\;\; & \;\;3\;\; & \;\;4\; \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3/12 & 2/12 & 4/12 & 3/12 \\ 1/12 & 1/12 & 4/12 & 6/12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} Q & R \\ O & I \end{pmatrix}.$$

A (ii) kérdésre adott válasz megegyezik az új (elnyelő) Markov-lánc esetén arra a kérdésre adott válasszal, hogy mennyi az elnyelődésig eltelt idő várható értéke. Az „első lépés analízis” eljárásnál (5 Fejezet) tanultuk, hogy ez a várható érték a következőképpen számolható. Legyen $W := (I - Q)^{-1} = (W_{i,j})_{i,j=1,2}$, így a keresett várható érték

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} w_{i,j} P(X_0 = i).$$

Mivel

$$W = \begin{pmatrix} 9/12 & -2/12 \\ -1/12 & 11/12 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11\cdot12}{97} & \frac{2\cdot12}{97} \\ \frac{12}{97} & \frac{12\cdot9}{97} \end{pmatrix},$$

így a keresett várható érték

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} w_{i,j} P(X_0 = i) = \frac{1}{2}\frac{11\cdot12}{97} + \frac{1}{2}\frac{12}{97} + \frac{1}{2}\frac{24}{97} + \frac{1}{2}\frac{12\cdot9}{97} = \frac{138}{97} \approx 1.42268.$$

(iii) Szintén az „első lépés analízis" módszerével dolgozunk. Jelölje $i = 1, 2$, $j = 3, 4$ esetén $u_{i,j}$ annak a valószínűségét, hogy a Markov-lánc i-ből indulva j-ben nyelődik el, az elmélet szerint az $U = (u_{i,j})$ mátrixra

$$U = (I - Q)^{-1}R.$$

Így

$$U = \begin{pmatrix} \frac{11\cdot 12}{97} & \frac{2\cdot 12}{97} \\ \frac{12}{97} & \frac{12\cdot 9}{97} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{12} & \frac{3}{12} \\ \frac{4}{12} & \frac{6}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{52}{97} & \frac{45}{97} \\ \frac{40}{97} & \frac{57}{97} \end{pmatrix}.$$

Ezért annak a valószínűsége, hogy az eredeti Markov-lánc az 1 állapotból indulva a $\{3, 4\}$ lényeges osztályba kerül $52/97$. Annak a valószínűsége, hogy az eredeti Markov-lánc az 1 állapotból indulva az $\{5, 6\}$ lényeges osztályba kerül $45/97$. Annak a valószínűsége, hogy az eredeti Markov-lánc a 2 állapotból indulva a $\{3, 4\}$ lényeges osztályba kerül $40/97$. Annak a valószínűsége, hogy az eredeti Markov-lánc a 2 állapotból indulva az $\{5, 6\}$ lényeges osztályba kerül $57/97$.

(iv) A 2.8. Megjegyzés szerint, ha j nem visszatérő állapot, úgy

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = 0, \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = 0, \quad \forall\, i \in I.$$

Így, mivel visszatérő osztály lényeges (tétel előadásból) kapjuk, hogy az 1 és 2 lényegtelen állapotok nem visszatérőek és ezért

$$\pi_1 = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 1) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} p_{i,1}^{(n)} = 0 \quad \forall\, i \in I,$$
$$\pi_2 = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 2) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} p_{i,2}^{(n)} = 0 \quad \forall\, i \in I.$$

Mivel az $\{3, 4\}$ osztály egy lényeges, aperiódikus osztály, az 4.1. Megjegyzés szerint ergodicitásának belátásához azt kell megnézni, hogy az

$$u_1 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{2}u_2,$$
$$u_2 = \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{2}u_2$$

egyenletrendszernek van-e az $u_1 > 0,\, u_2 > 0$ feltételt kielégítő (u_1, u_2) megoldása. (Az $|u_1| + |u_2| < +\infty$ feltétel automatikusan teljesül.) Ez az egyenletrendszer az $-1/4u_1 + 1/2u_2 = 0$ egyenletre redukálódik, így $u_1 = 1, u_2 = 1/2$ egy, a pozitivitási feltételt teljesítő megoldás. Így a $\{3, 4\}$ osztály ergodikus osztály. (Felhasználva, hogy egy véges, lényeges, aperiódikus osztály mindig ergodikus, közvetlenül is adódik a $\{3, 4\}$ osztály ergodicitása.) Ezért a $\{3, 4\}$ állapotterű és

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

átmenetvalószínűségű Markov-lánc számára

$$\frac{1}{1 + 1/2} = \frac{2}{3} \qquad \text{és} \qquad \frac{1/2}{1 + 1/2} = \frac{1}{3}$$

a stacionárius eloszlás. Így az eredeti Markov-láncra vonatkozóan (tétel előadásból)

$$\lim_{n\to\infty} p_{3,3}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{4,3}^{(n)} = \frac{2}{3},$$
$$\lim_{n\to\infty} p_{3,4}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{4,4}^{(n)} = \frac{1}{3}.$$

A teljes valószínűség tétele szerint, a lánc kezdeti eloszlását figyelembe véve

$$\begin{aligned}\pi_3 &= \lim_{n\to\infty} P(X_n = 3)\\ &= \lim_{n\to\infty} P(X_n = 3 \,|\, X_0 = 1)P(X_0 = 1) + \lim_{n\to\infty} P(X_n = 3 \,|\, X_0 = 2)P(X_0 = 2)\\ &= \frac{1}{2}(R_{1,3} + R_{2,3}),\end{aligned}$$

ahol

$$R_{i,j} := \lim_{n\to\infty} P(X_n = j \,|\, X_0 = i), \qquad i, j = 1, \dots, 6.$$

Az első lépés kimenetele szerint feltételt véve, az 4.35. Feladat megoldásában leírtakhoz hasonlóan

$$R_{1,3} = \frac{3}{12}R_{1,3} + \frac{2}{12}R_{2,3} + \frac{1}{12}R_{3,3} + \frac{3}{12}R_{4,3} + \frac{1}{12}R_{5,3} + \frac{2}{12}R_{6,3},$$
$$R_{2,3} = \frac{1}{12}R_{1,3} + \frac{1}{12}R_{2,3} + \frac{3}{12}R_{3,3} + \frac{1}{12}R_{4,3} + \frac{4}{12}R_{5,3} + \frac{2}{12}R_{6,3}.$$

Mivel $R_{5,3} = R_{6,3} = 0$ és $R_{3,3} = R_{4,3} = 2/3$ kapjuk, hogy

$$\frac{9}{12}R_{1,3} - \frac{1}{6}R_{2,3} = \frac{2}{9},$$
$$-\frac{1}{12}R_{1,3} + \frac{11}{12}R_{2,3} = \frac{2}{9}.$$

Ennek megoldása

$$R_{1,3} = \frac{4\cdot 20}{3\cdot 97}, \qquad R_{2,3} = \frac{24}{81} + \frac{8\cdot 20}{27\cdot 97}.$$

Így

$$\pi_3 = \frac{40}{291} + \frac{12}{81} + \frac{80}{2619} = \frac{92}{291} \approx 0.3161.$$

Másként is megkaphatjuk ezt az eredményt:

$$\begin{aligned}\pi_3 &= \lim_{n\to\infty} P(X_n = 3)\\ &= P(X_0 = 1) \lim_{n\to\infty} P(X_n = 3 \,|\, X_0 = 1) + P(X_0 = 2) \lim_{n\to\infty} P(X_n = 3 \,|\, X_0 = 2).\end{aligned}$$

Heurisztikusan a $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 3 \,|\, X_0 = 1)$ határérték meg kell, hogy egyezzen

$$u_{1,3} \lim_{n\to\infty} P(X_n = 3 \,|\, X_0 = 3)\text{-al},$$

mert $u_{1,3}$-al annak a valószínűségét jelöltük, hogy az (eredeti) lánc az 1 állapotból indulva eljut a $\{3,4\}$ osztályba, és $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 3 \,|\, X_0 = 3)$ pedig megegyezik a $\{3,4\}$ állapotterű és

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

átmenetvalószínűségi mátrixú Markov-lánc esetén a „3 állapothoz tartozó stacionárius eloszlással." Hasonlóan

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 3 \,|\, X_0 = 2) = u_{2,3} \lim_{n\to\infty} P(X_n = 3 \,|\, X_0 = 2).$$

Így

$$\pi_3 = \frac{1}{2}\frac{52}{97}\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{40}{97}\frac{2}{3} = \frac{92}{291}.$$

Hasonlóan kiszámolható, hogy

$$\pi_4 = \frac{46}{291}, \qquad \pi_5 = \pi_6 = \frac{51}{194}.$$

(v) $(u_1, u_2, \ldots, u_6)$ akkor lesz a lánc stacionárius eloszlása, ha $u_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, 6$, $\sum_{i=1}^{6} u_i = 1$, valamint

$$u_j = \sum_{i=1}^{6} u_i p_{i,j}, \qquad j = 1, \ldots, 6.$$

Létezik stacionárius eloszlás, azonban nem egyértelmű. Valóban, ha egy Markov-láncnak vannak lényegtelen osztályai és lényeges osztályai is, és a lényeges osztályok ergodikusak, úgy az ergodikus osztályoknak önmagukban megfelelő, egyértelműen létező stacionárius eloszlásokból fel tudunk építeni az eredeti Markov-láncnak egy stacionárius eloszlást a következő módon. A lényegtelen állapotok „stacionárius valószínűségei" legyenek nullák, az ergodikus állapotok „stacionárius valószínűségeit" pedig az ergodikus osztályok stacionárius eloszlásaiból keverjük ki. Felhasználva, hogy a szóban forgó Markov-lánc esetén $\{1,2\}$ lényegtelen osztály, $\{3,4\}$ ergodikus osztály $(2/3, 1/3)$ stacionárius eloszlással és $\{5,6\}$ ergodikus osztály $(1/2, 1/2)$ stacionárius eloszlással, kapjuk, hogy

$$S_1 := (0, 0, 2/3, 1/3, 0, 0), \qquad S_2 := (0, 0, 0, 0, 1/2, 1/2)$$

stacionárius eloszlásai az $\{X_n : n \geqslant 0\}$ Markov-láncnak. Mivel

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6) = \left(0, 0, \frac{92}{291}, \frac{46}{291}, \frac{51}{194}, \frac{51}{194}\right) = \frac{138}{291} S_1 + \frac{102}{194} S_2,$$

kapjuk, hogy $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6)$ is stacionárius eloszlása a Markov-láncnak.

Megjegyezzük, hogy erre a Markov-láncra a Doeblin-tétel (4.14. Tétel) nem alkalmazható, mert nincs olyan állapot, mely minden állapotból 1 lépéssel pozitív valószínűséggel elérhető, azaz nincs csupa 0-tól különböző elemekből álló oszlop P-ben. □

5.9. Feladat. (Tönkremenési probléma) [Ross [7], Chapter 4, Section 5.1] Tekintsünk egy játékost, aki egy játék minden fordulója során p valószínűséggel nyer 1 forintot, illetve $1-p$ valószínűséggel veszít 1 forintot, ahol $0 < p < 1$. Feltéve, hogy az egymást követő játékok függetlenek és játékosunk kezdeti vagyona i, mi a valószínűsége annak, hogy a játékos vagyona hamarabb ér el egy előre megadott N szintet, mint a 0-t, amikor is tönkremegy a játékos?

Megoldás. Legyen minden $n \geqslant 0$ esetén X_n a játékos vagyona az n-edik játék után. Ha a játékos vagyona eléri az előre megadott N szintet vagy 0-t, azt úgy tekintjük, hogy a rákövetkező fordulók során vagyona már nem változik, azaz N vagy 0 marad. Ekkor $\{X_n, n \geqslant 0\}$ Markov-lánc, melynek állapottere $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ és átmenetvalószínűségei

$$\begin{aligned} &p_{0,0} = p_{N,N} = 1, \\ &p_{i,i+1} = p = 1 - p_{i,i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1. \end{aligned}$$

Ennek a Markov-láncnak 3 osztálya van: $\{0\}$, $\{1, 2, \ldots, N-1\}$ és $\{N\}$. Az első és harmadik osztály visszatérő, a második nem visszatérő (átmeneti). Mivel minden átmeneti állapotban 1 valószínűséggel csak véges sokat van a lánc, és véges sok átmeneti állapot van jelen esetben, kapjuk, hogy 1 valószínűséggel véges időtartamon belül a játékos vagy tönkremegy vagy eléri célját, azaz vagyona N lesz.

Legyen minden $i = 0, 1, \ldots, N$ esetén

$$P_i := P(\exists\, n \geqslant 0 : X_n = N \,|\, X_0 = i),$$

(azaz P_i annak a valószínűsége, hogy a játékos vagyona eléri az N szintet, feltéve, hogy kezdőtőkéje i). Nyilván $P_0 = 0$ és $P_N = 1$. Feltételt véve az első játék kimenetele szerint, minden $i = 1, \ldots, N-1$ esetén

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{P\big(\{\exists\, n \geqslant 0 : X_n = N\} \cap (\{X_1 = i+1\} \cup \{X_1 = i-1\}) \cap \{X_0 = i\}\big)}{P(X_0 = i)} \\ &= P(\exists\, n \geqslant 0 : X_n = N \,|\, X_1 = i+1, X_0 = i) P(X_1 = i+1 \,|\, X_0 = i) \\ &\quad + P(\exists\, n \geqslant 0 : X_n = N \,|\, X_1 = i-1, X_0 = i) P(X_1 = i-1 \,|\, X_0 = i). \end{aligned}$$

A Markov-tulajdonság, homogenitás és P_i definíciója alapján

$$\begin{aligned} P_i &= P(\exists\, n \geqslant 0 : X_n = N \,|\, X_1 = i+1) p_{i,i+1} + P(\exists\, n \geqslant 0 : X_n = N \,|\, X_1 = i-1) p_{i,i-1} \\ &= p_{i,i+1} P_{i+1} + p_{i,i-1} P_{i-1} = p P_{i+1} + q P_{i-1}, \end{aligned}$$

ahol $q := 1 - p$. Mivel $p + q = 1$, kapjuk, hogy $pP_i + qP_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}$, azaz

$$P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, N-1.$$

Mivel $P_0 = 0$, kiírva az egyenleteket $i = 1, 2, \dots, N-1$-re

$$\begin{aligned}
P_2 - P_1 &= \frac{q}{p}(P_1 - P_0) = \frac{q}{p}P_1,\\
P_3 - P_2 &= \frac{q}{p}(P_2 - P_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 P_1,\\
&\vdots\\
P_i - P_{i-1} &= \frac{q}{p}(P_{i-1} - P_{i-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} P_1,\\
&\vdots\\
P_N - P_{N-1} &= \frac{q}{p}(P_{N-1} - P_{N-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} P_1.
\end{aligned}$$

Összeadva az első $(i-1)$ darab egyenletet,

$$P_i - P_1 = P_1\Big[\left(\frac{q}{p}\right)^1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\Big].$$

Ha $p = q$, azaz $p = 1/2$, akkor $P_i = iP_1$, $i = 1, \dots, N$.

Ha $p \neq q$, azaz $p \neq 1/2$, akkor

$$P_i = P_1\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - 1}{\frac{q}{p} - 1}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Azaz

$$P_i = \begin{cases} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\frac{q}{p}}P_1 & \text{ha} \quad p \neq q,\\ \\ iP_1 & \text{ha} \quad p = q. \end{cases}$$

Mivel $P_N = 1$, így ha $p = 1/2$, akkor $1 = P_N = NP_1$, így $P_i = i/N$, $i = 1, \dots, N$. (Megjegyzendő, hogy $i = 0$-ra is jó az előző képlet.)

Ha $p \neq 1/2$, akkor

$$1 = P_N = P_1\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}{\frac{q}{p} - 1},$$

így

$$P_1 = \frac{\frac{q}{p} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1},$$

és ekkor

$$P_i = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, \quad i = 1, \dots, N.$$

(Megjegyzendő, hogy $i = 0$-ra is jó az előző képlet.) Azaz minden $i = 0, 1, \ldots, N$-re

$$P_i = \begin{cases} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} & \text{ha} \quad p \neq 1/2, \\ \frac{i}{N} & \text{ha} \quad p = 1/2. \end{cases} \tag{5.3}$$

Ezzel megkaptuk a keresett valószínűséget.

Vizsgáljuk meg most a $\lim_{N\to\infty} P_i$, $i \in \mathbb{Z}_+$, határértékeket (itt P_i függ N-től, csak ezt a függést nem jelöltük).

Ha $p = 1/2$, akkor

$$\lim_{N\to\infty} P_i = \lim_{N\to\infty} \frac{i}{N} = 0, \qquad i \geqslant 0.$$

Ha $p > 1/2$, akkor $1 - p < 1/2$, így $q/p < 1$, ezért

$$\lim_{N\to\infty} P_i = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i, \qquad i \geqslant 0.$$

Ha $p < 1/2$, akkor $q/p > 1$, ezért

$$\lim_{N\to\infty} P_i = 0, \qquad i \geqslant 0.$$

Az alábbiakban megoldásunkat két különböző módon is interpretáljuk. Legyen $\{Y_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ a nemnegatív egész számok halmazán a 0-ban elnyelő falú bolyongás. Ekkor $p > 1/2$ esetén az $i \in \mathbb{N}$ pontból induló bolyongás $((1-p)/p)^i$ valószínűséggel nyelődik el a 0-ban és

$$P\big(\limsup_{n\to\infty} Y_n = +\infty\big) = 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i.$$

Mivel nem visszatérő állapotok véges halmazában 1 valószínűséggel csak véges sok időpontban lehet a Markov-lánc, kapjuk, hogy

$$P\big(\lim_{n\to\infty} Y_n = +\infty\big) = 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i.$$

Ha pedig $p \leqslant 1/2$, akkor az $i \in \mathbb{Z}_+$ pontból induló bolyongás 1 valószínűséggel elnyelődik a 0-ban.

A tönkremenési probléma nyelvén az $N \to \infty$ esetet úgy interpretálhatjuk, hogy, ha $p \leqslant 1/2$, akkor a játékos 1 valószínűséggel tönkremegy akármilyen (nagy) $i \in \mathbb{Z}_+$ kezdőtőke esetén is. Ha pedig $p > 1/2$, akkor a tönkremenés valószínűsége $i \in \mathbb{N}$ kezdőtőke esetén $((1-p)/p)^i$, és ha nem megy tönkre a játékos, akkor a vagyona akármilyen nagy értéket elér előbb vagy utóbb (ez felel meg $\limsup_{n\to\infty} X_n = +\infty$-nek), sőt $+\infty$-be konvergál (vagyis egy idő után akármilyen nagy érték fölött marad a vagyona). □

Az alábbiakban a tönkremenési probléma két alkalmazását nézzük meg.

5.10. Feladat. [Szűcs Gábor feladatsorából [10]] Tegyük fel, hogy összekuporgattunk 100 dollárt, és elmegyünk egy kaszinóba, melynek 100 dollár az alaptőkéje. A ruletten játszunk, és az a taktikánk, hogy mindig egy zsetont teszünk a piros színre, és ezáltal forgatásonként $18/37$ valószínűséggel nyerünk, illetve $19/37$ valószínűséggel vesztünk egy zsetont.

(i) Mekkora valószínűséggel nyerjük el a kaszinó teljes tőkéjét, ha 10 dolláros zsetonokkal játszunk? Milyen valószínűséggel megyünk csődbe? Mi annak a valószínűsége, hogy a játék sohasem ér véget?

(ii) Mi a helyzet akkor, ha nem 10, hanem 1 dolláros zsetonokkal játszunk?

(iii) Térjünk vissza a 10 dolláros zsetonokhoz. Mekkora tőkét szedjünk össze, hogy legalább 0.5 legyen annak a valószínűsége, hogy elnyerjük a kaszinó összes tőkéjét? A kaszinó tőkéje továbbra is 100 dollár, azaz 10 zseton.

Megoldás. (i): Mivel a kaszinónak 100 dollár az alaptőkéje és 1 zseton 10 dollárt ér, úgy tekinthetjük, hogy a kaszinónak 10 zsetonja van. A feladat a tönkremenési probléma (5.9. Feladat) egy speciális esete: a játékosnak $i = 10$ a kezdőtőkéje (10 zsetonja van), a játék minden fordulójában $p = 18/37$ valószínűséggel nyer 1 zsetont, és ha meghatározzuk, hogy mi a valószínűsége, hogy a játékos vagyona hamarabb éri el az $N = 10 + 10 = 20$ szintet, mint a 0-t (mikor is tönkremenne), úgy ezzel meghatározzuk annak a valószínűségét is, hogy a kaszinó teljes tőkéjét (10 zsetont) elnyeri a játékos. Az 5.9. Feladat alapján ez a valószínűség:

$$\frac{1-\left(\frac{19/37}{18/37}\right)^{10}}{1-\left(\frac{19/37}{18/37}\right)^{20}} \approx 0.368.$$

Szintén az 5.9. Feladat alapján annak a valószínűsége, hogy 10 zseton kezdőtőkével csődbe megy a játékos

$$1-\frac{1-\left(\frac{19/37}{18/37}\right)^{10}}{1-\left(\frac{19/37}{18/37}\right)^{20}} \approx 0.632.$$

Illetve annak a valószínűsége, hogy a játék sohasem ér véget 0.

(ii): Ha 1 dolláros zsetonokkal játszunk, az azt jelenti, hogy mindkét félnek 100 db zsetonja van. Így annak a valószínűsége, hogy a játékos elnyeri a kaszinó teljes tőkéjét:

$$\frac{1-\left(\frac{19/37}{18/37}\right)^{100}}{1-\left(\frac{19/37}{18/37}\right)^{200}} \approx 0.00446.$$

Annak a valószínűsége, hogy 100 zseton kezdőtőkével csődbe megy a játékos

$$1-\frac{1-\left(\frac{19/37}{18/37}\right)^{100}}{1-\left(\frac{19/37}{18/37}\right)^{200}} \approx 0.99553.$$

Illetve annak a valószínűsége, hogy a játék sohasem ér véget 0.

(iii): Tegyük fel, hogy x db zsetonja van a játékosnak, azaz kezdőtőkéje $10x$ dollár. Az előzőek alapján annak kell fennállnia, hogy

$$\begin{aligned}
&\frac{1-\left(\frac{19}{18}\right)^x}{1-\left(\frac{19}{18}\right)^{x+10}} \geqslant 0.5 \quad\Leftrightarrow\quad 1-\left(\frac{19}{18}\right)^x \leqslant 0.5-0.5\left(\frac{19}{18}\right)^x\left(\frac{19}{18}\right)^{10}\\
&\Leftrightarrow\quad 0.5 \leqslant \left(\frac{19}{18}\right)^x\left(1-0.5\left(\frac{19}{18}\right)^{10}\right) \quad\Leftrightarrow\quad 3.53557 \leqslant \left(\frac{19}{18}\right)^x\\
&\Leftrightarrow\quad 1.26287 \leqslant 0.0540672\cdot x \quad\Leftrightarrow\quad 23.3573 \leqslant x.
\end{aligned}$$

Így legalább 24 db zsetonra, azaz $24\cdot 10 = 240$ dollár kezdőtőkére van a játékosnak szüksége. □

5.11. Feladat. Elhelyezünk $m+1$ darab pontot kör alakban, az óramutató járásával megegyező irányban számozva őket rendre a $0,1,2,\dots,m$ számjegyekkel. Egy részecske ezeken a pontokon bolyong oly módon, hogy minden lépésben valamelyik szomszédos pontra ugorhat, p valószínűséggel az óramutató járásával megegyező, $1-p$ valószínűséggel az óramutató járásával ellentétes irányban levő szomszédjára ugorva. A 0 pontból indul a részecske. Mi a valószínűsége, hogy az $1,2,\dots,m$ állapotok mindegyikébe eljutunk mielőtt a 0-ba visszatérnénk?

Megoldás. Jelölje A a kérdéses eseményt, aminek a valószínűségét ki akarjuk számítani. Jelölje X_n a részecske helyzetét az n-edik lépés után, $n\geqslant 1$. Vegyünk feltételt az első lépés kimenetele szerint. A 0-ból indulva egy lépéssel vagy az 1 vagy az m állapotba jutunk. Így

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \mid X_1=1)P(X_1=1) + P(A \mid X_1=m)P(X_1=m)\\
&= pP(A \mid X_1=1) + (1-p)P(A \mid X_1=m).
\end{aligned}$$

Ekkor $\{X_n : n\geqslant 0\}$ Markov-lánc, melynek átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{c} \\ 0\\ 1\\ 2\\ \vdots\\ m-1\\ m \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & m-2 & m-1 & m \end{array}\\
\begin{pmatrix}
0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-p\\
1-p & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & 1-p & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & p & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-p & 0 & p\\
p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-p & 0
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

Vegyük észre, hogy addig, amíg a 0 és az m állapotokat el nem érjük, mindegy, hogy ezekben az állapotokban elnyelődik-e a Markov-lánc vagy nem. Ezért az átmenetvalószínűségi mátrix alakja alapján a $P(A \mid X_1=1)$ valószínűség megegyezik a tönkremenési problémában

(5.9. Feladat) annak a valószínűségével, hogy 1 kezdőtőkével elérjük az m szintet mielőtt tönkremennénk (azaz 0 forintunk lenne). Így

$$P(A \,|\, X_1 = 1) = \begin{cases} \frac{1-\frac{1-p}{p}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^m} & \text{ha} \quad p \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{m} & \text{ha} \quad p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Hasonlóan a $P(A \,|\, X_1 = m)$ valószínűség megegyezik a tönkremenési problémában annak a valószínűségével, hogy 1 kezdőtőkével elérjük az m szintet mielőtt tönkremennénk, azzal a módosítással, hogy i-ből $i+1$-be $1-p$ és i-ből $i-1$-be p valószínűséggel ugorhatunk. (A tönkremenési probléma formális alkalmazásánál az $m, m-1, \ldots, 1$ állapotokat beazonosítjuk rendre az $1, \ldots, m$ állapotokkal.) Így

$$P(A \,|\, X_1 = m) = \begin{cases} \frac{1-\frac{p}{1-p}}{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^m} & \text{ha} \quad p \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{m} & \text{ha} \quad p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Így, ha $p = 1/2$, akkor

$$P(A) = \frac{1}{2}\frac{1}{m} + \frac{1}{2}\frac{1}{m} = \frac{1}{m}.$$

Ha $p \neq 1/2$, akkor

$$\begin{aligned} P(A) &= p\frac{1-\frac{1-p}{p}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^m} + (1-p)\frac{1-\frac{p}{1-p}}{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^m} \\ &= \frac{2p-1}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^m} + \frac{1-2p}{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^m}. \end{aligned}$$

□

5.12. Feladat. (gyógyszerkezelés) Egy adott betegség gyógyítására két új gyógyszert is kifejlesztettek. Annak a valószínűsége, hogy az i-edik ($i = 1, 2$) gyógyszerrel kezelve egy beteget az meggyógyul p_i, $i = 1, 2$. A p_1 és p_2 ún. gyógyulási ráták nem ismertek. Az alább ismertetett eljárással arról szeretnénk dönteni, hogy $p_1 > p_2$ vagy $p_2 > p_1$. A betegekből párokat képzünk, és a párokat egymás után kezeljük oly módon, hogy minden pár esetén az egyik tagnak az 1. gyógyszert, a másik tagnak a 2. gyógyszert adjuk. Megnézzük, hogy kit (vagy kiket) gyógyított meg a neki beadott gyógyszer. A tesztelést akkor hagyjuk abba, mikor az egyik gyógyszer által meggyógyított betegek száma egy előre adott számmal meghaladja a másik gyógyszer által meggyógyított betegek számát. Formálisan legyen

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{ha a } j\text{-edik párban az 1. gyógyszerrel kezelt beteg meggyógyul,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

és

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{ha a } j\text{-edik párban a 2. gyógyszerrel kezelt beteg meggyógyul,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen $M > 0$ az előre rögzített szám. A tesztelés N pár kezelése után fejeződik be, ahol N az első olyan n érték, melyre

$$X_1 + \cdots + X_n - (Y_1 + \cdots + Y_n) = M \quad \text{vagy} \quad X_1 + \cdots + X_n - (Y_1 + \cdots + Y_n) = -M.$$

Az első esetben azt fogadjuk el, hogy $p_1 > p_2$, a második esetben pedig azt, hogy $p_2 > p_1$. Kérdéses, hogy mennyire jó ez a teszt. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy rosszul döntünk, azaz mi a valószínűsége, hogy adott p_1 és p_2 esetén, ahol $p_1 > p_2$, tesztünk arra az eredményre vezet, hogy $p_2 > p_1$?

Megoldás. Minden egyes pár kezelése után az 1., ill. a 2. gyógyszer által meggyógyított betegek számának különbsége vagy 1-el nő vagy nem változik meg vagy 1-el csökken. Annak a valószínűsége, hogy 1-el nő megyegyezik annak a valószínűségével, hogy egy adott pár esetén az 1. gyógyszer gyógyít, a 2. gyógyszer nem gyógyít, azaz $p_1(1-p_2)$. Hasonlóan annak a valószínűsége, hogy 1-el csökken $p_2(1-p_1)$. Az összeg akkor nem változik, ha az adott párnak vagy mindkét tagja meggyógyul vagy egyik sem, azaz $p_1p_2 + (1-p_1)(1-p_2)$. Ha csak azokat a párokat tekintjük, amikor az előbb leírt kumulatív különbség változik (azaz 1-el nő, vagy 1-el csökken), akkor ezen feltétel mellett annak a (feltételes) valószínűsége, hogy a különbség 1-el nő (a feltételes valószínűség definíciója alapján)

$$p := \frac{p_1(1-p_2)}{p_1(1-p_2) + (1-p_1)p_2}.$$

Precízen ezt a következőképpen indokolhatjuk meg. Legyen

$$\tau_1 := \min\big\{k : k \in \mathbb{N},\, X_k - Y_k \neq 0\big\}.$$

Definiáljuk ezután a τ_n, $n \in \mathbb{N}$, megállási szabályokat n-szerinti teljes indukcióval a következő módon. Ha τ_n-et már definiáltuk, akkor

$$\tau_{n+1} := \min\big\{k : k > \tau_n,\, X_k - Y_k \neq 0\big\}.$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén τ_n megállási időpont az $\mathcal{F}_k := \sigma(X_l, Y_l, 1 \leqslant l \leqslant k)$, $k \in \mathbb{N}$, σ-algebrák növekvő rendszerére nézve. Továbbá, $P(\tau_n < +\infty) = 1$, és $\tau_n \leqslant \tau_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, valamint a $\tau_1, \tau_k - \tau_{k-1}$, $k = 2, 3, \ldots,$ valószínűségi változók függetlenek, azonos eloszlásúak és

$$P(\tau_1 = n) = (1 - p_1p_2 - (1-p_1)(1-p_2))(p_1p_2 + (1-p_1)(1-p_2))^{n-1}, \qquad n \geqslant 1.$$

Legyen továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$Z_n := X_1 + \cdots + X_n - (Y_1 + \cdots + Y_n).$$

Ekkor $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc, melynek egylépéses átmenetvalószínűségei

$$p_{i,i+1} = p_1(1-p_2), \quad p_{i,i-1} = p_2(1-p_1), \quad p_{i,i} = p_1p_2 + (1-p_1)(1-p_2).$$

Ha csak azokat a párokat tekintjük, amikor az említett kumulatív különbség nem változik, akkor a $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-láncnak a $\{Z_{\tau_n} : n \in \mathbb{N}\}$ részsorozatát tekintjük. Ismert, hogy $\{Z_{\tau_n} : n \in \mathbb{N}\}$ is homogén Markov-lánc (lásd, pl., Shiryaev [8], 568. old). Ez utóbbi tény azon múlik, hogy egy Markov-lánc teljesíti az erős Markov-tulajdonságot is. Az alábbiakban meghatározzuk a $\{Z_{\tau_n} : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc egylépéses átmenetvalószínűségeit:

$$
\begin{aligned}
&P(Z_{\tau_2} = i+1 \,|\, Z_{\tau_1} = i) = P(X_{\tau_2} - Y_{\tau_2} = 1, X_{\tau_2 - 1} - Y_{\tau_2 - 1} = 0, \dots, X_{\tau_1+1} - Y_{\tau_1+1} = 0) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(X_{\tau_2} - Y_{\tau_2} = 1, X_{\tau_2 - 1} - Y_{\tau_2 - 1} = 0, \dots, X_{\tau_1+1} - Y_{\tau_1+1} = 0 \,|\, \tau_1 = n) P(\tau_1 = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau_1 = n) \sum_{k=1}^{\infty} P(X_{n+k} - Y_{n+k} = 1, X_{n+k-1} - Y_{n+k-1} = 0, \dots, X_{n+1} - Y_{n+1} = 0) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p_1 p_2 - (1-p_1)(1-p_2))(p_1 p_2 + (1-p_1)(1-p_2))^{n-1} \\
&\qquad \times \sum_{k=1}^{\infty} p_1(1-p_2)(p_1 p_2 + (1-p_1)(1-p_2))^{k-1} \\
&= \frac{1 - p_1 p_2 - (1-p_1)(1-p_2)}{1 - p_1 p_2 - (1-p_1)(1-p_2)} \frac{p_1(1-p_2)}{1 - p_1 p_2 - (1-p_1)(1-p_2)} \\
&= \frac{p_1(1-p_2)}{1 - p_1 p_2 - (1-p_1)(1-p_2)} = \frac{p_1(1-p_2)}{p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)}.
\end{aligned}
$$

Hasonlóan,

$$
P(Z_{\tau_2} = i+1 \,|\, Z_{\tau_1} = i) = \frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)}.
$$

Ez utóbbi egyenlőség más szavakkal: annak a feltételes valószínűsége, hogy a fenti kumulatív különbség 1-el csökken, feltéve, hogy 1-el nő vagy 1-el csökken

$$
1 - p = \frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2) + (1-p_1)p_2}.
$$

Tekintsünk egy olyan játékost, aki 0 kezdőtőkével rendelkezik és egy olyan játékot játszik, melynek minden fordulójában p valószínűséggel 1 forintot nyer és $(1-p)$ valószínűséggel 1 forintot veszít. Így annak a valószínűsége, hogy tesztünk a $p_2 > p_1$ eredményt adja megegyezik annak a valószínűségével, hogy játékosunk hamarabb éri el a $-M$ szintet, mint az M szintet. Ez utóbbi pedig megegyezik annak a valószínűségével, hogy játékosunk M kezdőtőkével hamarabb megy tönkre (azaz lesz 0 forintja), mint, hogy $2M$ forintja lenne. Ezt a valószínűséget (pontosabban a komplementer esemény valószínűségét) pedig a tönkremenési problémában már kiszámítottuk (5.9. Feladat). Legyen tehát az (5.3) képletben

$i = M, N = 2M$, így, ha $p \neq 1/2$ (azaz $p_1 \neq p_2$), akkor

$$P(\{\text{a teszt a } p_2 > p_1 \text{ eredményt adja}\}) = 1 - \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^M}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{2M}} = 1 - \frac{p^{2M} - p^M(1-p)^M}{p^{2M} - (1-p)^{2M}}$$
$$= \frac{(1-p)^M}{p^M + (1-p)^M} = \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{1-p}\right)^M}.$$

Például, ha $p_1 = 0.6$ és $p_2 = 0.4$, akkor $M = 5$ esetén a téves döntés valószínűsége 0.17, $M = 10$ esetén 0.0003. □

5.13. Feladat. Anna és Zsófi felváltva dob egy dobókockával, és a dobott számot mindig hozzáadják az eddig dobott számok összegéhez. Az nyer, akinek a dobása után először lesz az összeg 4-gyel osztható. Ha Anna kezd, mennyi a valószínűsége, hogy nyer? (Ez a KÖMAL B3601-es feladata volt.)

1. Megoldás. (A KÖMAL mintamegoldása). Először is gondoljuk meg, hogy a játék 1 valószínűséggel véget ér. Annak valószínűsége, hogy a játék az első dobás után nem ér véget $p_1 = 5/6$. Ha p_k jelöli annak valószínűségét, hogy a játék még a k-adik dobás után sem ért véget, akkor $p_{k+1} \leqslant (5/6)p_k$, hiszen a 6 lehetséges dobás között mindig van legalább egy olyan, amivel a játék véget ér. Ezért indukcióval $p_k \leqslant (5/6)^k$. Annak valószínűsége pedig, hogy a játék nem ér véget, nem lehet nagyobb egyik p_k értéknél sem, így csakis 0 lehet.

Jelölje tehát p a keresett valószínűséget, ekkor annak valószínűsége, hogy a játékot Zsófi nyeri, éppen $1-p$. Tekintsük még a játéknak azt három változatát is, amikor a játékot az nyeri, akinek a dobása után először fog az összeg i maradékot adni 4-gyel osztva ($i = 1, 2, 3$). Jelölje rendre q, r és s annak valószínűségét, hogy ezt a három játékot Anna nyeri. A megoldás elején alkalmazott gondolatmenet azt is mutatja, hogy Zsófi ezeket a játékokat rendre $1-q, 1-r$ és $1-s$ valószínűséggel fogja megnyerni. Ha az első dobás 4-es, aminek a valószínűsége $1/6$, akkor a játékot Anna nyeri. Ha az első dobás 1-es vagy 5-ös, aminek együttes valószínűsége $1/3$, akkor úgy képzelhetjük, hogy most egy új játék kezdődik, melyben Anna és Zsófi szerepe felcserélődik, és az nyer, akinek a dobása után először lesz 3 a maradék. Ez tehát Anna győzelmének esélyét $1/6$-ról $1/6 + (1/3)(1-s)$-re növeli. Hasonlóképpen gondolkozva akkor is, ha az első dobás 2-es vagy 6-os volt (ezután az $i = 2$ esethez tartozó játék lép életbe), vagy pedig 3-as ($i = 1$ eset), végül a következő összefüggést írhatjuk fel:

$$p = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}(1-s) + \frac{1}{3}(1-r) + \frac{1}{6}(1-q).$$

A fenti gondolatmenet a teljes valószínűség tételre való hivatkozással tehető precízzé. Hasonlóképpen megvizsgálva a játék három további változatát is, az

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(1-s) + \frac{1}{6}(1-r) + \frac{1}{6}(1-q), \\ r &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(1-q) + \frac{1}{6}(1-s) + \frac{1}{6}(1-r), \\ s &= \frac{1}{6} + \frac{1}{3}(1-r) + \frac{1}{3}(1-q) + \frac{1}{6}(1-s) \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ez utóbbi három összefüggésből azt kapjuk, hogy a $q' = 1-q, r' = 1-r$ és $s' = 1-s$ valószínűségek kielégítik az alábbi három egyenletet

$$7q' + r' + 2s' = 4, \qquad 2q' + 7r' + s' = 4, \qquad 2q' + 2r' + 7s' = 5.$$

Ennek egyértelmű megoldása $q' = 37/99, r' = 39/99, s' = 49/99$. Ezt az első összefüggésbe behelyettesítve kapjuk, hogy $p = 52/99$, ennyi tehát a valószínűsége annak, hogy Anna nyeri a játékot.

2. Megoldás. Legyen minden $n \geqslant 1$ és $i = 0,1,2,3$ esetén $X_n := Ai$, ha n-ediknek Anna (A) dobott és az n-edik dobás után az addig dobott számok összege modulo 4 kongruens i-vel, illetve legyen $X_n := Zi$, ha n-ediknek Zsófi (Z) dobott és az n-edik dobás után az addig dobott számok összege modulo 4 kongruens i-vel. Ekkor $\{X_n : n \geqslant 1\}$ egy Markov-lánc, melynek átmenetvalószínűségi mátrixa

$$\begin{array}{c} \\ A0 \\ A1 \\ A2 \\ A3 \\ Z0 \\ Z1 \\ Z2 \\ Z3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} A0 & A1 & A2 & A3 & Z0 & Z1 & Z2 & Z3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 2/6 & 2/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/6 & 2/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/6 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Az $(A0, Z1)$-pozíciójú helyen azért áll például $2/6$, mert ha Anna dobása után a dobásösszeg 4-gyel osztva 0 maradékot ad, akkor Zsófinak 1-et vagy 5-öt kell dobnia ahhoz, hogy a megváltozott dobásösszeg 4-gyel osztva 1 maradékot adjon, és ennek valószínűsége éppen 2/6. Megjegyezzük, hogy a fenti mátrix duplán sztochasztikus.

Azt keressük, hogy mi a valószínűsége annak, hogy a Markov-lánc az A0 állapotban nyelődik el, tudva azt, hogy ha a Markov-lánc az A0 vagy a Z0 állapotba ér, akkor elnyelődik és azt, hogy a kezdeti eloszlása $P(X_1 = Zi) = 0$, $i = 0,1,2,3$ és

$$P(X_1 = A0) = P(X_1 = A3) = \frac{1}{6}, \qquad P(X_1 = A1) = P(X_1 = A2) = \frac{2}{6}.$$

Az $A0$ és $Z0$ állapotokat kell elnyelő állapottá tenni. Az új Markov-lánc átmenetvalószínűségi mátrixa

$$
P' = \begin{array}{c} \\ Z1 \\ Z2 \\ Z3 \\ A1 \\ A2 \\ A3 \\ A0 \\ Z0 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} Z1 & Z2 & Z3 & A1 & A2 & A3 & A0 & Z0 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 & 0 \\
1/6 & 2/6 & 2/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \\
1/6 & 1/6 & 2/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/6 \\
2/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Jelölje Q a fenti P' mátrix balfelső 6×6-os blokkját, R pedig ajobbfelső 6×2-es blokkot. Legyen továbbá $U_{i,k}$ definíció szerint annak a valószínűsége, hogy a Markov-lánc k-ban nyelődik el, feltéve, hogy i-ből indul. Ekkor az ,,első lépés analízisben” (5 Fejezet) leírtaknak megfelelően $U = (I_{6\times 6} - Q)^{-1}R$. Maple-val elvégezve a számolásokat kapjuk, hogy

$$
U = \begin{array}{c} \\ Z1 \\ Z2 \\ Z3 \\ A1 \\ A2 \\ A3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} A0 & Z0 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
50/99 & 49/99 \\
20/33 & 13/33 \\
62/99 & 37/99 \\
49/99 & 50/99 \\
13/33 & 20/33 \\
37/99 & 62/99
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Ezért annak a valószínűsége, hogy A0-ban nyelődik el a Markov-lánc (és nem Z0-ban)

$$
\sum_{i=0}^{3} U_{Ai,A0} P(X_1 = Ai) = \frac{1}{6}\left(1 + 2\frac{49}{99} + 2\frac{13}{33} + \frac{37}{99}\right) = \frac{52}{99}.
$$

Tehát $52/99$ valószínűséggel nyer Anna.

Megjegyezzük, hogy ha csak az A0 állapotot tennénk elnyelővé (és Z0-at nem), akkor $U = (1, 1, \ldots 1)^\top$ lenne, azaz akárhonnan is indulna a lánc 1 valószínűséggel elnyelődne A0-ban. Ez egy általánosabb tény következménye. □

5.14. Feladat. Kiindulunk egy kockának egy csúcsából és minden lépésben ugrunk egyet az adott csúcsból kiinduló három él mentén a szomszédos csúcsok egyikébe, mindegyikbe $\frac{1}{3}$ valószínűséggel és mindig az előző ugrásoktól függetlenül. Tekintsük azt a valószínűségi változót, hogy hányadik ugrásban érünk először a kiindulásival szemközti csúcsba (vagyis amelyik a testátló túlodalán van). Mennyi ezen valószínűségi változó várható értéke?

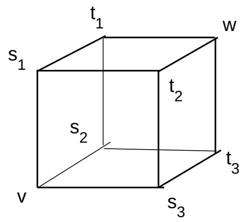
Első megoldás. Jelölje p, illetve q a kocka két tetszőleges csúcspontját és vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$
T_q := \inf\{n \geqslant 1 : X_n = q\},
$$

ahol X_n, $n = 0, 1, 2, \dots$ a kockának az a csúcsa, ahol az n-edik lépésben tartózkodunk ($n = 0$ esetén X_0 legyen a kockának az a csúcsa, ahonnan indulunk), illetve legyen

$$m_{p,q} := \mathbb{E}(T_q \mid X_0 = p).$$

Készítsük el az alábbi ábrát:



Feladatunk $m_{v,w}$ meghatározása. A teljes várható érték tétele alapján

$$\begin{aligned}
m_{v,v} &= \mathbb{E}(T_v \mid X_0 = v)\\
&= \mathbb{E}(T_v \mid X_1 = s_1, X_0 = v)\mathbb{P}(X_1 = s_1 \mid X_0 = v)\\
&\quad + \mathbb{E}(T_v \mid X_1 = s_2, X_0 = v)\mathbb{P}(X_1 = s_2 \mid X_0 = v)\\
&\quad + \mathbb{E}(T_v \mid X_1 = s_3, X_0 = v)\mathbb{P}(X_1 = s_3 \mid X_0 = v)\\
&= (1 + \mathbb{E}(T_v \mid X_0 = s_1))\frac{1}{3} + (1 + \mathbb{E}(T_v \mid X_0 = s_2))\frac{1}{3} + (1 + \mathbb{E}(T_v \mid X_0 = s_3))\frac{1}{3},
\end{aligned}$$

hiszen például

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_v \mid X_1 = s_1, X_0 = v) &= \sum_{k=2}^{\infty} k\mathbb{P}(T_v = k \mid X_1 = s_1, X_0 = v)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\mathbb{P}(T_v = k+1 \mid X_1 = s_1, X_0 = v)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\mathbb{P}(T_v = k \mid X_0 = s_1)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(T_v = k \mid X_0 = s_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_v = k \mid X_0 = s_1)\\
&= \mathbb{E}(T_v \mid X_0 = s_1) + 1 = 1 + m_{s_1,v}.
\end{aligned}$$

Így, a szimmetriát is figyelembe véve

$$m_{v,v} = 1 + \frac{1}{3}(m_{s_1,v} + m_{s_2,v} + m_{s_3,v}) = 1 + \frac{1}{3} \cdot 3m_{s_1,v} = 1 + m_{s_1,v}.$$

Hasonlóan,

$$m_{s_1,v} = 1 \cdot \frac{1}{3} + (1 + m_{t_1,v})\frac{1}{3} + (1 + m_{t_2,v})\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}(m_{t_1,v} + m_{t_2,v}) = 1 + \frac{2}{3}m_{t_1,v},$$

és így $m_{s_1,v} = m_{s_2,v} = m_{s_3,v} = 1 + \frac{2}{3} m_{t_1,v}$. Továbbá,

$$m_{t_1,v} = (1 + m_{s_1,v})\frac{1}{3} + (1 + m_{s_2,v})\frac{1}{3} + (1 + m_{w,v})\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}(2m_{s_1,v} + m_{w,v}),$$

és így $m_{t_2,v} = 1 + \frac{1}{3}(2m_{s_1,v} + m_{w,v})$. Végezetül,

$$m_{w,v} = (1 + m_{t_1,v})\frac{1}{3} + (1 + m_{t_2,v})\frac{1}{3} + (1 + m_{t_3,v})\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} \cdot 3m_{t_1,v} = 1 + m_{t_1,v}.$$

Az alábbi egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned}
m_{v,v} &= 1 + m_{s_1,v}, \\
m_{s_1,v} &= 1 + \frac{2}{3} m_{t_1,v}, \\
m_{t_1,v} &= 1 + \frac{1}{3}(2m_{s_1,v} + m_{w,v}), \\
m_{w,v} &= 1 + m_{t_1,v},
\end{aligned}$$

mely azzal ekvivalens, hogy

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{v,v} \\ m_{s_1,v} \\ m_{t_1,v} \\ m_{w,v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Így

$$\begin{pmatrix} m_{v,v} \\ m_{s_1,v} \\ m_{t_1,v} \\ m_{w,v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & \frac{9}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Mivel $m_{v,w} = m_{w,v}$, kapjuk, hogy $m_{v,w} = 10$.

Második megoldás. Az alábbiakban Lovas Rezső László megoldását közöljük. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$p^{(n)} := \mathbb{P}(X_n = w, X_{n-1} \neq w, \ldots, X_1 \neq w \mid X_0 = v), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Nyilván, $p^{(2k)} = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Továbbá, a szimmetria alapján $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
p^{(2k+1)} &= \mathbb{P}(X_{2k+1} = w, X_{2k} \neq w, \ldots, X_2 \neq w, X_1 = s_1 \mid X_0 = v) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_{2k+1} = w, X_{2k} \neq w, \ldots, X_2 \neq w, X_1 = s_2 \mid X_0 = v) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_{2k+1} = w, X_{2k} \neq w, \ldots, X_2 \neq w, X_1 = s_3 \mid X_0 = v) \\
&= 3\mathbb{P}(X_{2k+1} = w, X_{2k} \neq w, \ldots, X_2 \neq w, X_1 = s_1 \mid X_0 = v) \\
&= 3\mathbb{P}(X_{2k+1} = w, X_{2k} \neq w, \ldots, X_2 \neq w \mid X_1 = s_1, X_0 = v)\mathbb{P}(X_1 = s_1 \mid X_0 = v) \\
&= 3\mathbb{P}(X_{2k+1} = w, X_{2k} \neq w, \ldots, X_2 \neq w \mid X_1 = s_1, X_0 = v) \cdot \frac{1}{3} \\
&= \mathbb{P}(X_{2k+1} = w, X_{2k} \neq w, \ldots, X_2 \neq w \mid X_1 = s_1).
\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $\{X_1 = s_1\} \subset \{X_2 \neq w\}$, kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
p^{(2k+1)} &= \mathbb{P}(X_{2k+1} = w, X_{2k} \neq w, \dots, X_4 \neq w, X_3 = s_1 \,|\, X_1 = s_1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_{2k+1} = w, X_{2k} \neq w, \dots, X_4 \neq w, X_3 = s_2 \,|\, X_1 = s_1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_{2k+1} = w, X_{2k} \neq w, \dots, X_4 \neq w, X_3 = s_3 \,|\, X_1 = s_1) \\
&= \mathbb{P}(X_{2k+1} = w, X_{2k} \neq w, \dots, X_4 \neq w \,|\, X_3 = s_1, X_1 = s_1)\mathbb{P}(X_3 = s_1 \,|\, X_1 = s_1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_{2k+1} = w, X_{2k} \neq w, \dots, X_4 \neq w \,|\, X_3 = s_2, X_1 = s_1)\mathbb{P}(X_3 = s_2 \,|\, X_1 = s_1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_{2k+1} = w, X_{2k} \neq w, \dots, X_4 \neq w \,|\, X_3 = s_3, X_1 = s_1)\mathbb{P}(X_3 = s_3 \,|\, X_1 = s_1) \\
&= \mathbb{P}(X_{2k+1} = w, X_{2k} \neq w, \dots, X_4 \neq w \,|\, X_3 = s_1)\frac{3}{9} \\
&\quad + \mathbb{P}(X_{2k+1} = w, X_{2k} \neq w, \dots, X_4 \neq w \,|\, X_3 = s_2)\frac{2}{9} \\
&\quad + \mathbb{P}(X_{2k+1} = w, X_{2k} \neq w, \dots, X_4 \neq w \,|\, X_3 = s_3)\frac{2}{9}.
\end{aligned}
$$

Felhasználva újra a szimmetriát, kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
p^{(2k+1)} &= \mathbb{P}(X_{2k+1} = w, X_{2k} \neq w, \dots, X_4 \neq w \,|\, X_3 = s_1)\frac{7}{9} = \cdots \\
&= \mathbb{P}(X_{2k+1} = w \,|\, X_{2k-1} = s_1)\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1} = \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N},
\end{aligned}
$$

ahol az utolsó előtti lépés abból következik, hogy az $1 \to 3 \to 5 \to \cdots \to 2k-3 \to 2k-1$ út $k-1$ lépésből áll, az utolsó lépés pedig abból, hogy két olyan út vezet s_1-ből w-be, mely 2 lépéses. Így a szóban forgó várható érték:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)p^{(2k+1)} &= \sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1} = \frac{2}{9}\left(\sum_{k=1}^{\infty}2k\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}\right) \\
&= \frac{2}{9}\left(2\left(\frac{1}{1-x}\right)'\Big|_{x=\frac{7}{9}} + \frac{1}{1-\frac{7}{9}}\right) \\
&= \frac{2}{9}\left(2\frac{1}{(1-x)^2}\Big|_{x=\frac{7}{9}} + \frac{9}{2}\right) = 10.
\end{aligned}
$$

□

5.15. Feladat. Egy $3 \times 3 \times 3$-as kockarács egyik sarokkockájába egy egeret teszünk, a középsőbe pedig egy darab sajtot. Az egér bolyong a sajtot keresve: minden lépésben véletlenszerűen lép át valamelyik szomszédos kockába (amelyikkel van közös lapja). Várhatóan hány lépésben találja meg a sajtot? (Ez a KÖMAL B4131-es feladata volt.)

Első megoldás. A rács négyféle típusú kockából áll: 8 db sarokkockából (s típus), 12 db olyanból, amelyik él közepén helyezkedik el (e típus), 6 db olyanból, amelyik lap közepén helyezkedik el (l típus), és végül a középső kockából (k típus). Ha az egér a k típusú kockába ér, akkor megtalálja a sajtot, melyet úgy tekintünk, hogy az összes ezutáni lépésben a középső, k típusú kockában marad. Minden $n \in \mathbb{Z}_+$ esetén vezessük be az alábbi valószínűségi változót:

$$X_n := \begin{cases} s & \text{ha az } n\text{-edik lépés után az egér } s \text{ típusú kockában van,} \\ e & \text{ha az } n\text{-edik lépés után az egér } e \text{ típusú kockában van,} \\ l & \text{ha az } n\text{-edik lépés után az egér } l \text{ típusú kockában van,} \\ k & \text{ha az } n\text{-edik lépés után az egér } k \text{ típusú kockában van.} \end{cases}$$

Mivel az egér kezdetben sarokkockában van, $X_0 = s$. Továbbá, $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ Markov-lánc, melynek fázistere $\{s, e, l, k\}$. Könnyen átgondolható, hogy egy s típusú kockának 3 db e típusú szomszédja, egy e típusú kockának 2 db s típusú és 2 db l típusú szomszédja, míg egy l típusú kockának 4 db e típusú és 1 db k típusú szomszédja van. Így az $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ Markov-lánc átmenetvalószínűségi mátrixa

$$\mathbb{P} := \begin{array}{c} \\ s \\ e \\ l \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s & e & l & k \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Először megmutatjuk, hogy az s állapotból indulva 1-valószínűséggel eljutunk (és így el is nyelődünk) a k elnyelő állapotban. Alkalmazva az 5.3. Tételt a $H := \{k\}$ választással, kapjuk, hogy az

$$\begin{aligned} y_s &= p_{ss}y_s + p_{se}y_e + p_{sl}y_l + p_{sk} = y_e, \\ y_e &= p_{es}y_s + p_{ee}y_e + p_{el}y_l + p_{ek} = \frac{1}{2}y_s + \frac{1}{2}y_l, \\ y_l &= p_{ls}y_s + p_{le}y_e + p_{ll}y_l + p_{lk} = \frac{4}{5}y_e + \frac{1}{5}, \\ y_k &= p_{ks}y_s + p_{ke}y_e + p_{kl}y_l + p_{kk} = 1, \end{aligned}$$

egyenletrendszernek van minimális, nemnegatív megoldása, mely nem más, mint rendre az s, e, l, illetve k állapotokból az k elnyelő állapotba való eljutás (elnyelődés) valószínűsége. Az egyenletrendszer egyetlen megoldása, mely egyben a minimális, nemnegatív megoldás is:

$$\begin{pmatrix} y_s \\ y_e \\ y_l \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

így bármely állapotból indulva 1 valószínűséggel elnyelődünk a k állapotban.

A $\sum_{n=1}^{\infty} n f_{sk}^{(n)}$ összeget kell meghatároznunk, ahol

$$f_{sk}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = k, X_{n-1} \neq k, \ldots, X_2 \neq k, X_1 \neq k \mid X_0 = s), \qquad n \geqslant 1.$$

A Markov-tulajdonság alapján, minden $n \geqslant 2$ esetén

$$\begin{aligned}
f_{sk}^{(n)} &= \mathbb{P}(X_n = k, X_{n-1} \neq k, \ldots, X_2 \neq k, X_1 = s \,|\, X_0 = s) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_n = k, X_{n-1} \neq k, \ldots, X_2 \neq k, X_1 = e \,|\, X_0 = s) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_n = k, X_{n-1} \neq k, \ldots, X_2 \neq k, X_1 = l \,|\, X_0 = s) \\
&= f_{sk}^{(n-1)} p_{ss} + f_{ek}^{(n-1)} p_{se} + f_{lk}^{(n-1)} p_{sl} = f_{ek}^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

Hasonlóan,

$$\begin{aligned}
f_{ek}^{(n)} &= f_{sk}^{(n-1)} p_{es} + f_{ek}^{(n-1)} p_{el} + f_{lk}^{(n-1)} p_{el} = \frac{1}{2} f_{sk}^{(n-1)} + \frac{1}{2} f_{lk}^{(n-1)}, \qquad n \geqslant 2, \\
f_{lk}^{(n)} &= f_{sk}^{(n-1)} p_{ls} + f_{ek}^{(n-1)} p_{le} + f_{lk}^{(n-1)} p_{ll} = \frac{4}{5} f_{ek}^{(n-1)}, \qquad n \geqslant 2.
\end{aligned}$$

Így

$$f_{ek}^{(n)} = \frac{1}{2} f_{ek}^{(n-2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} f_{ek}^{(n-2)} = \frac{9}{10} f_{ek}^{(n-2)}, \qquad n \geqslant 3.$$

Mivel $f_{ek}^{(1)} = 0$ és

$$f_{ek}^{(2)} = \frac{1}{2} f_{sk}^{(1)} + \frac{1}{2} f_{lk}^{(1)} = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10},$$

kapjuk, hogy

$$f_{ek}^{(n)} = \left(\frac{9}{10}\right)^k f_{ek}^{(1)} = 0, \qquad n = 2k+1, \quad k \geqslant 0,$$

illetve

$$f_{ek}^{(n)} = \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} f_{ek}^{(2)} = \frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}, \qquad n = 2k, \quad k \geqslant 1.$$

Ezért

$$f_{sk}^{(n)} = f_{ek}^{(n-1)} = \begin{cases} \frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} & \text{ha } n = 2k+1, \quad k \geqslant 1, \\ 0 & \text{ha } n = 2k, \quad k \geqslant 1, \end{cases}$$

illetve (triviális módon) $f_{sk}^{(1)} = 0$. Így

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n f_{sk}^{(n)} &= \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) \frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k) \cdot 0 \\
&= \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} + \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{5} \frac{1}{\left(1 - \frac{9}{10}\right)^2} + \frac{1}{10} \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = \frac{1}{5} \cdot 100 + 1 = 21.
\end{aligned}$$

A következőkben kiegészítésképpen explicite meghatározzuk a $\mathbb{P}(X_n = k \,|\, X_0 = s)$ n-lépéses átmenetvalószínűségeket. Felhasználva, hogy a Kolmogorov-Chapman egyenletek alapján az n-lépéses átmenetvalószínűségi mátrix az egylépéses átmenetvalószínűségi mátrix

n-edik hatványa, a $\mathbb{P}^n$ mátrix (s,k)-elemét kell meghatároznunk. Egyszerű számolás mutatja, hogy a $\mathbb{P}$ mátrix páronként különböző sajátértékei

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \lambda_4 = -\frac{3}{\sqrt{10}},$$

illetve egy-egy ezekhez tarozó sajátvektor

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3\sqrt{10}}{8} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{3\sqrt{10}}{8} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

így a $\mathbb{P}$ mátrix diagonalizálható és

$$S^{-1}\mathbb{P}S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} := D,$$

ahol

$$S := \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3\sqrt{10}}{8} & -\frac{3\sqrt{10}}{8} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} := \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} & 0 & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{2\sqrt{10}}{15} & \frac{2}{9} & -\frac{2(3+\sqrt{10})\sqrt{10}}{45} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2\sqrt{10}}{15} & \frac{2}{9} & -\frac{2(-3+\sqrt{10})\sqrt{10}}{45} \end{pmatrix}.$$

Így

$$\mathbb{P}^n = (SDS^{-1})^n = SD^nS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{5}{4}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^n & \frac{5}{4}\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^n \\ 0 & 1 & \frac{9}{8}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^{n-1} & \frac{9}{8}\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^{n-1} \\ 0 & 1 & \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^n & \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ezért

$$\begin{aligned} p_{sk}^{(n)} &= 1 + \frac{5}{4}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^n \cdot \frac{-2(3+\sqrt{10})\sqrt{10}}{45} + \frac{5}{4}\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^n \cdot \frac{-2(-3+\sqrt{10})\sqrt{10}}{45} \\ &= 1 - \frac{5\sqrt{10}}{90}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^n \Big(3 + \sqrt{10} + (-1)^n(-3+\sqrt{10})\Big) \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{10}{9}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^n & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 1 - \frac{\sqrt{10}}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^n & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases} \end{aligned}$$

Látjuk, hogy (természetes módon) a $p_{sk}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, n-lépéses átmenetvalószínűségek nem egyeznek meg az $f_{sk}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, valószínűségekkel.

Második megoldás. Az 5.2. Megjegyzés alapján, a Markov-lánc a k (egyetlen) elnyelő állapotban várhatóan

$$\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_0 = s) & \mathbb{P}(X_0 = e) & \mathbb{P}(X_0 = l)\end{pmatrix} (I_{3\times 3} - Q)^{-1} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

lépés alatt nyelődik el, ahol $I_{3\times 3}$ a (3×3)-as egységmátrix, illetve a $\mathbb{P}$ mátrix (5.1) felírása alapján

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 4/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

(A konkrét példában $I_{3\times 3} - Q$ invertálható, így alkalmazható az 5.2. Megjegyzés.) Mivel $\mathbb{P}(X_0 = s) = 1$ és

$$(I_{3\times 3} - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 5 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix},$$

kapjuk, hopgy a Markov-lánc várhatóan

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 5 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 10 & 5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 6 + 5 + 10 = 21$$

lépés alatt nyelődik el a k (egyetlen) elnyelő állapotban. □

5.16. Feladat. (átlagos visszatérési idők) Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy véges állapotterű, irreducibilis Markov-lánc. Jelölje $P = (p_{i,j})_{i,j\in I}$ az átmenetvalószínűségi mátrixát, $M = (m_{i,j})_{i,j\in I}$ pedig az átlagos visszatérési időkből álló mátrixot. (Itt $m_{ij} := \mathbb{E}(\tau_j \mid X_0 = i)$, $i, j \in I$, ahol τ_j, $j \in I$, a 4.2. Megjegyzésben definiált.) Mutassuk meg, hogy

$$m_{i,j} = 1 + \sum_{k\neq j} p_{i,k} m_{k,j}, \qquad i, j \in I.$$

Megoldás. Legyen minden $n \geqslant 1$-re és $i, j \in I$-re

$$f_{i,j}^{(n)} = P(X_n = j, X_t \neq j, 1 \leqslant t \leqslant n-1 \mid X_0 = i),$$

(az i állapotból a j állapotba való első elérés valószínűsége) és $f_{i,j}^{(0)} := 0$. Legyen továbbá

$$f_{i,j}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}^{(n)},$$

(azaz az i-ből j-be való eljutás valószínűsége). Mivel egy véges állapotterű, irreducibilis Markov-lánc visszatérő, egy előadásbeli tétel alapján $f^*_{i,j} = 1$, $i, j \in I$. Ekkor

$$\begin{aligned}
m_{i,j} &= \sum_{n=0}^{\infty} n f_{i,j}^{(n)} && m_{i,j} \text{ definíciója és az állapottér végessége miatt} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n P(X_n = j, X_t \neq j, 1 \leqslant t \leqslant n-1 \,|\, X_0 = i) && f_{i,j}^{(n)} \text{ definíciója miatt} \\
&= p_{i,j} + \sum_{n=2}^{\infty} n \sum_{k \neq j} P(X_n = j, X_t \neq j, 2 \leqslant t \leqslant n-1, X_1 = k \,|\, X_0 = i) && n = 1 \text{ és } n > 1 \\
&= p_{i,j} + \sum_{n=2}^{\infty} n \sum_{k \neq j} P(X_n = j, X_t \neq j, 2 \leqslant t \leqslant n-1 \,|\, X_1 = k) P(X_1 = k \,|\, X_0 = i) \\
&= p_{i,j} + \sum_{n=2}^{\infty} n \sum_{k \neq j} P(X_n = j, X_t \neq j, 2 \leqslant t \leqslant n-1 \,|\, X_1 = k) p_{i,k},
\end{aligned}$$

és így

$$\begin{aligned}
m_{i,j} &= p_{i,j} + \sum_{n=2}^{\infty} n \sum_{k \neq j} f_{k,j}^{(n-1)} p_{i,k} && f_{i,j}^{(n)} \text{ definíciója miatt} \\
&= p_{i,j} + \sum_{k \neq j} \sum_{n=2}^{\infty} n f_{k,j}^{(n-1)} p_{i,k} && \text{a } \textstyle\sum\text{-k átrendezése} \\
&= p_{i,j} + \sum_{k \neq j} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) f_{k,j}^{(n)} p_{i,k} && \text{változó eltolás.}
\end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned}
m_{i,j} &= p_{i,j} + \sum_{k \neq j} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{k,j}^{(n)} p_{i,k} + \sum_{k \neq j} \sum_{n=1}^{\infty} f_{k,j}^{(n)} p_{i,k} \\
&= p_{i,j} + \sum_{k \neq j} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{k,j}^{(n)} p_{i,k} + \sum_{k \neq j} f^*_{k,j} p_{i,k} && f^*_{k,j} \text{ definíciója miatt} \\
&= p_{i,j} + \sum_{k \neq j} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{k,j}^{(n)} p_{i,k} + \sum_{k \neq j} p_{i,k} && \text{a visszatérőség miatt } f^*_{k,j} = 1 \\
&= \sum_{k \neq j} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{k,j}^{(n)} p_{i,k} + \sum_{k \in I} p_{i,k} = \sum_{k \neq j} m_{k,j} p_{i,k} + 1.
\end{aligned}$$

Heurisztikusan rögtön adódik a megoldás, mert az i-ből j-be való átlagos első eljutási idő tekinthető úgy, hogy vagy egy lépésben i-ből j-be lépünk, vagy először kilépünk valamilyen $k \neq j$ állapotba $p_{i,k}$ valószínűséggel (ez 1 lépés), majd a k-ból j-be való átlagos első eljutási idő $m_{k,j}$ és ezt kell $p_{i,k}$-kal súlyozni, majd k összes lehetséges értékére szummázni. □

5.17. Feladat. Tekintsünk egy olyan érmét, mely p valószínűséggel esik a fej, $1-p$ valószínűséggel esik az írás oldalára. Várhatóan hányszor kell feldobni ezt az érmét, hogy az FI minta először megjelenjen? Várhatóan hányszor kell feldobni ezt az érmét, hogy az FF minta először megjelenjen? Először oldjuk meg a feladatot szabályos érmével.

Megoldás. Legyen az érme először szabályos, azaz $p = 1/2$. Legyen

$$\tau_{FI} := \begin{cases} n & \text{ha az } FI \text{ minta először az } n\text{-edik dobásra jelentkezik,} \\ +\infty & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tau_{FI}) &= \mathbb{E}(\tau_{FI}\,|\,\text{az első két dobás } FI)P(FI) + \mathbb{E}(\tau_{FI}\,|\,\text{az első két dobás } FF)P(FF) \\
&\quad + \mathbb{E}(\tau_{FI}\,|\,\text{az első két dobás } IF)P(IF) + \mathbb{E}(\tau_{FI}\,|\,\text{az első két dobás } II)P(II) \\
&= 2\frac{1}{4} + (2 + m_{FF,FI})\frac{1}{4} + (2 + m_{IF,FI})\frac{1}{4} + (2 + m_{II,FI})\frac{1}{4},
\end{aligned}$$

ahol $m_{i,j}$, $i,j \in \{FF, FI, IF, II\}$ a következő átmenetvalószínűségű Markov-lánc várakozási idői

$$\begin{array}{c} \\ FF \\ FI \\ IF \\ II \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} FF & FI & IF & II \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(Ez egy duplán sztochasztikus mátrix.) A szóban forgó Markov-lánc véges állapotterű, irreducibilis, így ergodikus és létezik egyértelmű stacionárius eloszlása. Ezt a stacionárius eloszlást az alábbi egyenletrendszer megoldásaként kapjuk

$$\begin{aligned}
\pi_{FF} &= \frac{1}{2}\pi_{FF} + \frac{1}{2}\pi_{IF}, \\
\pi_{FI} &= \frac{1}{2}\pi_{FF} + \frac{1}{2}\pi_{IF}, \\
\pi_{IF} &= \frac{1}{2}\pi_{FI} + \frac{1}{2}\pi_{II}, \\
\pi_{II} &= \frac{1}{2}\pi_{FI} + \frac{1}{2}\pi_{II}, \\
\pi_{FF} + \pi_{FI} &+ \pi_{IF} + \pi_{II} = 1.
\end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$\pi_{FF} = \pi_{FI} = \pi_{IF} = \pi_{II} = \frac{1}{4}.$$

Az, hogy ez a megoldása a szóban forgó egyenletrendszernek, felhasználva, hogy az átmenetvalószínűségi mátrix duplán sztochasztikus, az 4.24. Feladat alapján azonnal következik.

Mivel a Markov-lánc véges állapotterű, irreducibilis, az 5.16. Feladat szerint

$$m_{i,j} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{i,k} m_{k,j}, \qquad i,j \in \{FF, FI, IF, II\}.$$

Az egyszerűbb írásmód kedvéért vezessük be az $FF = 1$, $FI = 2$, $IF = 3$ és $II = 4$ jelöléseket. Nekünk $m_{1,2}$, $m_{3,2}$ és $m_{4,2}$ értékekre van szükségünk. Felírva az előző egyenletrendszert

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= 1 + \sum_{k\neq 2} p_{1,k} m_{k,2} = 1 + \frac{1}{2} m_{1,2}, \\ m_{3,2} &= 1 + \sum_{k\neq 2} p_{3,k} m_{k,2} = 1 + \frac{1}{2} m_{1,2}, \\ m_{4,2} &= 1 + \sum_{k\neq 2} p_{4,k} m_{k,2} = 1 + \frac{1}{2} m_{3,2} + \frac{1}{2} m_{4,2}. \end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$m_{1,2} = 2, \qquad m_{3,2} = 2, \qquad m_{4,2} = 4.$$

Így

$$\mathbb{E}(\tau_{FI}) = \frac{1}{2} + (2+2)\frac{1}{4} + (2+2)\frac{1}{4} + (2+4)\frac{1}{4} = 4.$$

Abban az esetben, ha az érme nem szabályos a Markov-lánc átmenetvalószínűségi mátrixa

$$\begin{array}{c} \\ FF \\ FI \\ IF \\ II \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} FF & FI & IF & II \end{array} \\ \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ebben az esetben a várakozási időkre vonatkozó egyenletrendszer

$$\begin{aligned} &m_{1,2} = 1 + p \cdot m_{1,2}, \qquad m_{3,2} = 1 + p \cdot m_{1,2}, \\ &m_{4,2} = 1 + p \cdot m_{3,2} + (1-p) m_{4,2}. \end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$m_{1,2} = \frac{1}{1-p}, \quad m_{3,2} = \frac{1}{1-p}, \quad m_{4,2} = \frac{1}{p(1-p)}.$$

Így kiszámolható, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tau_{FI}) &= 2p(1-p) + \Big(2 + \frac{1}{1-p}\Big)p^2 + \Big(2 + \frac{1}{1-p}\Big)p(1-p) + \Big(2 + \frac{1}{p(1-p)}\Big)(1-p)^2 \\ &= \frac{1}{p(1-p)}. \end{aligned}$$

Meghatározzuk most, hogy szabályos érme esetén mennyi időt kell átlagosan várni míg az első FF megjelenik. Legyen

$$\tau_{FF} := \begin{cases} n & \text{ha az } FF \text{ minta először az } n\text{-edik dobásra jelentkezik}, \\ +\infty & \text{egyébként}. \end{cases}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tau_{FF}) &= \mathbb{E}(\tau_{FF}\,|\,\text{az első két dobás } FF)P(FF) + \mathbb{E}(\tau_{FF}\,|\,\text{az első két dobás } FI)P(FI)\\ &\quad + \mathbb{E}(\tau_{FF}\,|\,\text{az első két dobás } IF)P(IF) + \mathbb{E}(\tau_{FF}\,|\,\text{az első két dobás } II)P(II)\\ &= 2\frac{1}{4} + (2+m_{FI,FF})\frac{1}{4} + (2+m_{IF,FF})\frac{1}{4} + (2+m_{II,FF})\frac{1}{4},\end{aligned}$$

ahol $m_{i,j}$, $i,j\in\{FF,FI,IF,II\}$ a következő átmenetvalószínűségű Markov-lánc várakozási idői

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} FF & FI & IF & II \end{array}\\ \begin{array}{c} FF\\ FI\\ IF\\ II \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Felhasználva a korábbi jelöléseket nekünk az $m_{2,1}$ $m_{3,1}$ és $m_{4,1}$ mennyiségekre van szükségünk. Felírva a várakozási időkre vonatkozó egyenletrendszert

$$\begin{aligned} m_{2,1} &= 1 + \sum_{k\neq 1} p_{2,k}m_{k,1} = 1 + \frac{1}{2}m_{3,1} + \frac{1}{2}m_{4,1},\\ m_{3,1} &= 1 + \sum_{k\neq 1} p_{3,k}m_{k,1} = 1 + \frac{1}{2}m_{2,1},\\ m_{4,1} &= 1 + \sum_{k\neq 1} p_{4,k}m_{k,1} = 1 + \frac{1}{2}m_{3,1} + \frac{1}{2}m_{4,1}. \end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$m_{3,1} = 4, \qquad m_{2,1} = m_{4,1} = 6.$$

Így

$$\mathbb{E}(\tau_{FF}) = \frac{1}{2} + (2+6)\frac{1}{4} + (2+4)\frac{1}{4} + (2+6)\frac{1}{4} = 6.$$

□

5.18. Példa. (Minták várakozási ideje) Legyen Z egy diszkrét valószínűségi változó, melynek értékkészlete a Σ véges halmaz. Legyenek $Z_1, Z_2, \dots$ független, Z-vel azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy adott véges sok, a Σ-halmazból felépített $A_1,\dots,A_K$ (véges) minta. Minden $j=1,\dots,K$ esetén jelölje τ_{A_j} az A_j mintának a $Z_1, Z_2, \dots$ sorozatban az első bekövetkezéséig eltelt időt (várakozási időt). Tekintsük a $\tau := \min\{\tau_{A_1},\dots,\tau_{A_k}\}$ valószínűségi változót, mely a $Z_1, Z_2, \dots$ sorozatban az addig eltelt idő míg az $A_1,\dots,A_K$ minták közül valamelyik bekövetkezik. Célunk $\mathbb{E}\tau$ és $\mathbb{P}(\tau=\tau_{A_j})$, $j=1,\dots,K$ meghatározása. A következőkben csak a $K=1$ esettel foglalkozunk, mikor is egyetlen mintánk van. Legyen $A=a_1\cdots a_m$ a minta, ahol $a_1,\dots,a_m\in\Sigma$ olyanok, hogy $\mathbb{P}(Z=a_i)>0$, $i=1,\dots,m$. Ekkor $\tau=\tau_A$ és $\mathbb{E}\tau_A$-t kell meghatároznunk. A standard megoldást Li adta meg [5] cikkében. A következőkben az ő gondolatmenetét ismertetjük, az ottani bizonyításokat a Pozdnyakov és Kulldorf [4] cikkben levő egyszerűsített formában tárgyalva. Először egy példát tekintünk, aztán tárgyaljuk az általános esetet.

Tekintsünk egy kockát, mely három értéket x, y és z vehet fel rendre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ és $\frac{1}{6}$ valószínűséggel. Dobáljuk ezt a kockát egymás után egymástól függetlenül. Legyen továbbá $A = xzx$ (azaz $m = 3$). Célunk $\mathbb{E}\tau_A$ meghatározása. Tekintsünk egy játékost, aki a kocka első feldobása előtt 1 Ft-ot tesz arra, hogy a kockadobás eredménye az A minta első betűje, azaz x lesz. Ha x a dobás eredménye, úgy a játékos visszakap $\frac{1}{\mathbb{P}(Z=x)} = \frac{1}{1/2} = 2$ Ft-ot (beleértve a kezdeti tétjét is), és ezt a 2 Ft-ot felteszi arra, hogy a második kockadobás az A minta második betűje, azaz z lesz. Ha az első dobás eredménye nem x, úgy elveszíti 1 Ft-ját, és abbahagyja a játékot. Ha a második dobás eredménye z, úgy a játékos visszakap $\frac{2}{\mathbb{P}(Z=z)} = \frac{2}{1/6} = 12$ Ft-ot (beleértve a 2 Ft-os tétjét is), és ezt a 12 Ft-ot felteszi arra, hogy a harmadik kockadobás az A minta harmadik betűje, azaz x lesz. Ha a második kockadobás eredménye nem z, úgy a játékos elveszíti 2 Ft-ját, és abbahagyja a játékot. Ha a harmadik kockadobás eredménye x, úgy a játékos visszakap $\frac{12}{\mathbb{P}(Z=x)} = \frac{12}{1/2} = 24$ Ft-ot (beleértve a 12 Ft-os tétjét is), és véget ér a játék. Ha a harmadik kockadobás eredménye nem x, úgy a játékos elveszíti 12 Ft-ját, és abbahagyja a játékot. Ha a játékos valamikor veszít, úgy a bank nettó nyeresége 1 Ft, ugyanis, ha az első dobásnál veszít, úgy 1 Ft, ha a második dobásnál veszít, akkor $2 - 1 = 1$ Ft, ha pedig a harmadik dobásnál veszít, úgy $12 - 1 - 10 = 1$ Ft a bank nettó nyeresége. Ha a játékos (végig) nyer, úgy a bank nettó nyeresége $1 - 24 = -23$ Ft (vagy másképpen számolva $-(1 + 10 + 12) = -23$ Ft). Tegyük most fel, hogy minden kockadobás előtt egy újabb játékos csatlakozik a játékhoz, és egy új játékos ugyanúgy játszik, ahogy az első játékos stratégiáját ismertettük. Ha például a kockadobás-sorozat: $(y, x, x, z, y, x, x, z, x)$, úgy

az 1. játékos az 1. dobás után hagyja abba a játékot,
a 2. játékos a 3. dobás után hagyja abba a játékot,
a 3. játékos az 5. dobás után hagyja abba a játékot,
a 4. játékos a 4. dobás után hagyja abba a játékot,
az 5. játékos az 5. dobás után hagyja abba a játékot,
a 6. játékos a 7. dobás után hagyja abba a játékot,
a 7. játékos a 9. dobás után hagyja abba a játékot (ő nyer),
a 8. játékos a 8. dobás után hagyja abba a játékot,
a 9. játékos a 9. dobás után hagyja abba a játékot.

A 9. dobással megjelenik az $A = xzx$ minta, véget vetve a játéknak, és a 7. játékos kap az előzőek alapján 24 Ft-ot. A 7. játékoson kívül egyedül a 9. játékos, aki még kap pénzt, ő 2 Ft-ot kap. Ebből látható, hogy tekintve egy tetszőleges hosszúságú, tetszőleges kockadobás-sorozatot, mely xzx-re végződik, az utolsó játékos 2 Ft-ot, az utolsó előtti előtti pedig 24 Ft-ot kap. Így játék végéig a játékosok összesen $24 + 2 = 26$ Ft-ot kapnak, és ezért az összes játékos együttes nettó nyeresége $26 - \tau_A$ Ft. Azért kell levonni τ_A-t, mert τ_A lépésszám alatt ér véget a játék, és egy játékos a belépéskor 1 Ft-os tétellel kezd. Úgy gondolhatjuk, hogy ezen nettó nyereség várható értéke nulla lesz (ezt az általános eset tárgyalásánál majd precízzé tesszük), így $\mathbb{E}(26-\tau_A)=0$. Ezért $\mathbb{E}\tau_A=26$.

Térjünk mosr rá az általános (de $K=1$) eset tárgyalására. Tegyük fel, hogy miden $n=1,2,\dots$ időpont előtt egy-egy új játékos kezdi meg (ugyanazt) a következőkben ismertetett játékot. Az n-edik időpont előtt bekapcsolodó játékos 1 Ft-ot tesz arra, hogy $Z_n=a_1$ lesz. Ha $Z_n=a_1$, úgy $\frac{1}{\mathbb{P}(Z=a_1)}$ Ft-ot kap vissza (beleértve tétjét is). Ha $Z_n\neq a_1$, úgy abbahagyja a játékot (és a pénzét elveszíti). Ha $Z_n=a_1$ volt, úgy összes vagyonát, azaz $\frac{1}{\mathbb{P}(Z=a_1)}$ Ft-ot, felrakja arra, hogy $Z_{n+1}=a_2$ lesz. Ha $Z_{n+1}=a_2$, úgy $\frac{1}{\mathbb{P}(Z=a_1)}\frac{1}{\mathbb{P}(Z=a_2)}$ Ft-ot kap vissza. Ha $Z_{n+1}\neq a_2$, úgy abbahagyja a játékot (és elveszti pénzét). Ha $Z_{n+1}=a_2$ volt, úgy összes vagyonát, azaz $\frac{1}{\mathbb{P}(Z=a_1)}\frac{1}{\mathbb{P}(Z=a_2)}$ Ft-ot felrakja arra, hogy $Z_{n+2}=a_3$. És így tovább, végigmenve az $A=a_1\cdots a_m$ minta összes betűjén. Abban az esetben, ha az adott játékos nyer és vége szakad a játéknak nyereményével távozik. A játék akkor ér véget, mikor legelőször bekövetkezik az $A=a_1\cdots a_m$ minta. Ekkor valaki biztosan nyer $\frac{1}{\prod_{i=1}^m\mathbb{P}(Z=a_i)}$ Ft-t, és lehet, hogy még mások is nyernek (kevesebbet).

Minden $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen X_n a bank nettó nyeresége az n-edik játék után. Legyen továbbá $X_0:=0$. Megmutatjuk, hogy $(X_n)_{n\geqslant 0}$ martingál és τ_A olyan megállítási pillanat $(X_n)_{n\geqslant 0}$-ra nézve, hogy $\mathbb{E}\tau_A<\infty$. Felhasználva τ_A definícióját kapjuk, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\{\tau_A\leqslant n\}\in\sigma(X_0,\dots,X_n)$, azaz τ_A megállítási pillanat $(X_n)_{n\geqslant 0}$-ra nézve. A martingálsághoz azt kell belátni, hogy

$$\mathbb{E}(X_{n+1}\,|\,X_0,X_1,\dots,X_n)=X_n,\qquad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{5.4}$$

Ha n olyan, hogy az n időpontban véget ér a játék, úgy $X_n, X_{n+1},\dots$ ugyanazok (a nettó nyereség már nem változik). Így ekkor (5.4) triviális módon teljesül. Legyen most n olyan, hogy az n időpontban nem ér véget a játék. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}\,|\,X_0,\dots,X_n)&=\mathbb{E}(X_n\,|\,X_0,\dots,X_n)+\mathbb{E}(X_{n+1}-X_n\,|\,X_0,\dots,X_n)\\&=X_n+\mathbb{E}(X_{n+1}-X_n\,|\,X_0,\dots,X_n)\end{aligned}$$

miatt azt kell belátnunk, hogy $\mathbb{E}(X_{n+1}-X_n\,|\,X_0,\dots,X_n)=0$. A játék akkor nem ér véget az n időpontban, ha az $(n-(m-1))$-edik, $(n-m)$-edik, $(n-(m+1))$-edik, ..., 1. időpontok előtt bekapcsolódott játékosok már mind abbahagyták a játékot úgy, hogy nem nyertek. Így az $X_{n+1}-X_n$ nettó nyereség változás az n-edik, $(n-1)$-edik, ..., $(n-(m-2))$-edik időpontok előtt bekapcsolódott játékosokra számolt nettó nyereség változásokból tevődik össze, jelölje ezeket rendre $N_n,N_{n-1},\dots,N_{n-(m-2)}$. Így

$$\mathbb{E}(X_{n+1}-X_n\,|\,X_0,\dots,X_n)=\sum_{k=0}^{m-2}\mathbb{E}(N_{n-k}\,|\,X_0,\dots,X_n).$$

Tetszőleges $k=0,1,\dots,m-2$ esetén

$$\mathbb{E}(N_{n-k}\,|\,X_0,\dots,X_n)=\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(N_{n-k}\,|\,X_0,\dots,X_n,V_{n-k}^n)\,|\,X_0,\dots,X_n\big),$$

ahol V^n_{n-k} az $(n-k)$-adik időpont előtt bekapcsolódott játékos vagyona az n. játék után. Bevezetve az

$$S := \Big\{\text{az } (n-k)\text{-adik időpont előtt bekapcsolódott játékos az } (n+1)\text{-edik játékban nyer}\Big\}$$

jelölést, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_{n-k}\,|\,X_0,\ldots,X_n,V^n_{n-k}) &= -\left(\frac{V^n_{n-k}}{\mathbb{P}(S)} - V^n_{n-k}\right)\mathbb{P}(S) + V^n_{n-k}(1-\mathbb{P}(S))\\ &= -V^n_{n-k} + V^n_{n-k}\mathbb{P}(S) + V^n_{n-k} - V^n_{n-k}\mathbb{P}(S) = 0.\end{aligned}$$

Így $\mathbb{E}(N_{n-k}\,|\,X_0,\ldots,X_n) = 0$, $k = 0,1,\ldots,m-2$, és ezért $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n\,|\,X_0,\ldots,X_n) = 0$.

Az alábbiakban azt látjuk be, hogy $\mathbb{E}\tau_A < \infty$. Megmutatjuk, hogy $\tau_A \leqslant m(T+1)$, ahol

$$T := \min\{k \geqslant 0 : Z_{mk+1}\cdots Z_{m(k+1)} = A\}.$$

Valóban, ha például, $T = n$, úgy a dobássorozatot felbonthatjuk n db m-hosszúságú blokkra, hogy az első $(n-1)$ db blokk egyike sem egyezik meg A-val, az utolsó blokk viszont igen, és így $\tau_A \leqslant m(n+1) = m(T+1)$. Végiggondoljuk, hogy T geometriai eloszlású:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=0) &= \prod_{i=1}^m \mathbb{P}(Z = a_i) := p,\\ \mathbb{P}(T=n) &= (1-p)^n p, \quad n \geqslant 1.\end{aligned}$$

Így $\mathbb{P}(T=n) = (1-p)^n p$, $\quad n \geqslant 0$, és $\mathbb{E}T = \frac{1}{p}$. Ezért

$$\mathbb{E}\tau_A \leqslant \mathbb{E}(m(T+1)) = m\mathbb{E}(T+1) = m\left(\frac{1}{p}+1\right) < \infty.$$

A Doob-féle megállítási tételt fogjuk alkalmazni az $(X_n)_{n\geqslant 0}$ martingálra és a τ_A megállítási időpontra. A teljesség kedvéért megfogalmazzuk a tételt (lásd, pl. Williams [11, 100. old]): legyen T egy megállítási időpont az $(X_n)_{n\geqslant 0}$ martingálra vonatkozóan, hogy $\mathbb{E}T < \infty$ és tegyük fel, hogy létezik olyan $K > 0$, hogy $|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| \leqslant K$ $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}$-m.m. $\omega \in \Omega$. Ekkor $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$.

A Doob-tétel alkalmazásához be kell még látnunk, hogy a szóan forgó martingál növekményei 1-valószínűséggel korlátosak (ugyanazzal a K-val). Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legfeljebb m játékos van még játékban, és egy játékos lehetséges veszteségének/nyereségének maximális értéke $\prod_{j=1}^m \frac{1}{\mathbb{P}(Z=a_j)}$, illetve, ha egy játékos veszít, úgy a bank rávonatkozó nettó nyeresége 1 Ft. Így

$$-m\prod_{j=1}^m \frac{1}{\mathbb{P}(Z=a_j)} \leqslant X_n - X_{n-1} \leqslant m, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Így a Doob-féle megállítási tétel alapján $\mathbb{E}(X_{\tau_A}) = \mathbb{E}X_0 = 0$.

A következőkben X_{τ_A}-t írjuk fel τ_A segítségével. Tetszőleges $A = a_1 \cdots a_m$ és $B = b_1 \cdots b_k$ esetén legyen

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} \frac{1}{\mathbb{P}(Z=b_j)} & \text{ha } 1 \leqslant i \leqslant m, \ 1 \leqslant j \leqslant k, \text{ és } a_i = b_j, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen továbbá,

$$A * B := \delta_{1,1}\delta_{2,2} \cdots \delta_{m,m} + \delta_{2,1}\delta_{3,2} \cdots \delta_{m,m-1} + \cdots + \delta_{m,1},$$

mely A-nak és B-nek valamiféle átfedési mérőszámaként fogható fel. Ekkor

$$X_{\tau_A} = \tau_A - A * A,$$

hiszen τ_A az összes játékos által a τ_A időpontig berakott pénz és $A*A$ a néhány szerencsés által nyert vagyon. (A korábban részletesen tárgyalt példában: $A*A = 2\cdot6\cdot2+0\cdot0+2 = 26$.) Így a Doob-tétel miatt $0 = \mathbb{E}X_{\tau_A} = \mathbb{E}\tau_A - A * A$, és ezért $\mathbb{E}\tau_A = A * A$. $\square$

6. Időmegfordítható Markov-láncok

Az alábbi gondolatmenetet motivációnak tekinthetjük az időmegfordíthatóság definiálásához. Tekintsünk egy irreducibilis, aperiódikus, ergodikus Markov-láncot. Jelölje $P = (p_{i,j})_{i,j\in I}$ az átmenetvalószínűségi mátrixát és $\{\pi_i, i \in I\}$ az egyértelműen létező stacionárius eloszlását. Vizsgálódjunk most időben visszafelé és nem előrefelé. Határozzuk meg a

$$\lim_{m\to\infty} P(X_m = j \,|\, X_{m+1} = i) \qquad \text{határértéket!}$$

Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} P(X_m = j \,|\, X_{m+1} = i) &= \lim_{m\to\infty} \frac{P(X_m = j, X_{m+1} = i)}{P(X_{m+1} = i)} \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{P(X_{m+1} = i \,|\, X_m = j)P(X_m = j)}{P(X_{m+1} = i)} = \frac{\pi_j p_{j,i}}{\pi_i} =: q_{i,j}, \end{aligned}$$

mivel $\lim_{m\to\infty} P(X_m = k) = \pi_k$, $k \in I$ (az utóbbi határérték létezéséhez van szükség az aperiódikusságra). Megmutatjuk, hogy tetszőleges $i, j, i_2, \dots, i_k \in I$ állapotok esetén

$$\lim_{m\to\infty} P(X_m = j \,|\, X_{m+1} = i, X_{m+2} = i_2, \dots, X_{m+k} = i_k) = q_{i,j}.$$

Ezt interpretálhatjuk úgy, hogy hosszú távú működés után egy ergodikus, aperiódikus, irreducibilis Markov-lánc megfordítottja is Markov-lánc, melynek átmenetvalószínűségi mátrixa $Q = (q_{i,j})_{i,j\in I}$. Mivel

$$\begin{aligned} &P(X_m = j \,|\, X_{m+1} = i, X_{m+2} = i_2, \dots, X_{m+k} = i_k) \\ &\quad= \frac{P(X_m = j, X_{m+1} = i, X_{m+2} = i_2, \dots, X_{m+k} = i_k)}{P(X_{m+1} = i, X_{m+2} = i_2, \dots, X_{m+k} = i_k)} \\ &\quad= \frac{P(X_m = j)P(X_{m+k} = i_k, \dots, X_{m+1} = i \,|\, X_m = j)}{P(X_{m+1} = i)P(X_{m+2} = i_2, \dots, X_{m+k} = i_k \,|\, X_{m+1} = i)} \\ &\quad= \frac{P(X_m = j)P(X_{m+1} = i \,|\, X_m = j)P(X_{m+k} = i_k, \dots, X_{m+2} = i_2 \,|\, X_{m+1} = i, X_m = j)}{P(X_{m+1} = i)P(X_{m+2} = i_2, \dots, X_{m+k} = i_k \,|\, X_{m+1} = i)}, \end{aligned}$$

így a Markov-lánc definíciója alapján

$$P(X_m = j \mid X_{m+1} = i, X_{m+2} = i_2, \ldots, X_{m+k} = i_k) = \frac{P(X_m = j)P(X_{m+1} = i \mid X_m = j)}{P(X_{m+1} = i)}.$$

Ezért

$$\lim_{m\to\infty} P(X_m = j \mid X_{m+1} = i, X_{m+2} = i_2, \ldots, X_{m+k} = i_k) = \frac{\pi_j p_{j,i}}{\pi_i} = q_{i,j}.$$

Az 4.4. Megjegyzés alapján, ha tekintünk egy irreducibilis, ergodikus Markov-láncot, melynek kezdeti eloszlása az egyértelműen létező stacionárius eloszlás, akkor az előző számolások $\lim_{m\to\infty}$ nélkül is igazak.

6.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy irreducibilis, ergodikus Markov-lánc* **időmegfordítható** *(time reversible), ha* $q_{i,j} = p_{i,j}$, $\forall\, i, j \in I$, *azaz*

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i}, \qquad \forall\, i, j \in I. \tag{6.1}$$

Az (6.1) összefüggés úgy is megfogalmazható, hogy tetszőleges $i, j \in I$ állapotok esetén igaz az, hogy hosszú távon a Markov-lánc átlagosan az idő ugyanannyiad (nevezetesen $\pi_i p_{i,j}$-ed) részében megy az i állapotból a j állapotba, mint fordítva.

6.2. Megjegyzés. Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy irreducibilis, ergodikus Markov-lánc, $P = (p_{i,j})_{i,j\in I}$ átmenetvalószínűségi mátrixszal. Ha találunk olyan $\{x_i, i \in I\}$ nemnegatív 1-összegű számokat, melyek kielégítik az $x_i p_{i,j} = x_j p_{j,i}$, $i, j \in I$ összefüggést (azaz az (6.1) összefüggést), akkor a Markov-lánc időmegfordítható és $\pi_i = x_i$, $i \in I$ az egyértelműen létező stacionárius eloszlás. Ugyanis, összegezve i-re az (6.1) összefüggésben

$$\sum_{i\in I} x_i p_{i,j} = x_j \sum_{i\in I} p_{j,i} = x_j,$$
$$\sum_{i\in I} x_i = 1.$$

Mivel jelen esetben a $\{\pi_i, i \in I\}$ stacionárius eloszlás egyértelmű pozitív megoldása a fenti egyenletrendszernek, kapjuk, hogy $x_i = \pi_i$, $i \in I$. □

Tudjuk, hogy egy irreducibilis Markov-lánc, ha ergodikus, akkor egyértelműen létezik stacionárius eloszlása, illetve ha nem ergodikus, akkor nem létezik stacionárius eloszlása. Emiatt a gyakorlati feladatok megoldása során ha egy Markov-láncról kimutatjuk, hogy irreducibilis és az (6.1) egyenletrendszernek van pozitív megoldása, akkor az az egyértelműen létező stacionárius eloszlás és a Markov-lánc időmegfordítható, ergodikus (ha nem lenne ergodikus, úgy nem lehetne stacionárius eloszlása). Megfogalmazhatjuk tehát a következő állítást, ami megtalálható például Grimmett és Stirzaker [3] 133. oldalán.

6.3. Állítás. *Legyen* $\{X_n : n \geqslant 0\}$ *egy irreducibilis Markov-lánc* I *fázistérrel és tegyük fel, hogy léteznek olyan* π_i, $i \in I$ *számok, hogy* $0 \leqslant \pi_i \leqslant 1$, $i \in I$, $\sum_{i\in I} \pi_i = 1$, *és* $\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i}$, $i, j \in I$. *Ekkor a Markov-lánc időmegfordítható, ergodikus és* $\{\pi_i : i \in I\}$ *a stacionárius eloszlása.*

6.4. Feladat. Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy Markov-lánc, melynek fázistere $\{1, 2, 3\}$ és átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy az $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc időmegfordítható!

Megoldás. Ez a Markov-lánc irreducibilis, aperiódikus és véges állapotterű. Így ergodikus és az egyértelműen létező stacionárius eloszlását a következő egyenletrendszer (pozitív) megoldásaként kapjuk

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3, \\
\pi_2 &= \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3, \\
\pi_3 &= \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3, \\
\pi_1 &+ \pi_2 + \pi_3 = 1.
\end{aligned}$$

A megoldás $\pi_1 = 1/5$ és $\pi_2 = \pi_3 = 2/5$.

Az időmegfordíthatósághoz azt kell leellenőrizni, hogy

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i}, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Ha $i = j$, akkor triviálisan igaz a dolog. Szimmetria miatt elég az $(1, 2)$, $(1, 3)$ és a $(2, 3)$ eseteket megvizsgálni. Ezek

$$\begin{aligned}
\pi_1 p_{1,2} &= \frac{1}{5}\frac{1}{2} = \frac{1}{10} = \frac{2}{5}\frac{1}{4} = \pi_2 p_{2,1}, \\
\pi_1 p_{1,3} &= \frac{1}{5}\frac{1}{2} = \frac{1}{10} = \frac{2}{5}\frac{1}{4} = \pi_3 p_{3,1}, \\
\pi_2 p_{2,3} &= \frac{2}{5}\frac{1}{4} = \frac{1}{10} = \frac{2}{5}\frac{1}{4} = \pi_3 p_{3,2}.
\end{aligned}$$

Tehát teljesülnek a megkívánt egyenlőségek, azaz időmegfordítható a Markov-lánc. □

6.5. Feladat. [Ross [7], Chapter 4, Example 7a] Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy Markov-lánc, melynek fázistere $\{0, 1, \ldots, M\}$ és átmenetvalószínűségei

$$\begin{aligned}
p_{i,i+1} &= \alpha_i = 1 - p_{i,i-1}, \quad i = 1, \ldots, M-1, \\
p_{0,1} &= \alpha_0 = 1 - p_{0,0}, \quad p_{M,M} = \alpha_M = 1 - p_{M,M-1},
\end{aligned}$$

ahol $\alpha_i \in (0, 1)$, $i = 0, 1, \ldots, M$. Mutassuk meg, hogy a Markov-lánc időmegfordítható és határozzuk meg a stacionárius eloszlását!

Megoldás. Ez a Markov-lánc irreducibilis, aperiódikus, így az 6.2. Megjegyzés alapján adódik, hogy ha az (6.1) összefüggésnek találunk pozitív megoldását úgy az lesz az egyértelmű stacionárius eloszlás és a Markov-lánc időmegfordítható. Azt, hogy a Markov-lánc időmegfordítható az alábbi heurisztikus gondolatmenet is mutatja. Legyen $i \in \{1, \dots, M-1\}$. Vizsgáljuk az i-ből $i+1$-be, ill. $i+1$-ből i-be való átmenetek számát, legyen az előbbi $y_{i,i+1}$, az utóbbi pedig $y_{i+1,i}$. (A szóban forgó Markov-lánc az i állapotból csak a két szomszédos állapot valamelyikébe ugorhat.) Mivel két egymást követő i-ből $i+1$-be átmenet között biztosan van 1 darab $i+1$-ből i-be átmenet (és fordítva is) $y_{i,i+1}$ és $y_{i+1,i}$ között maximum 1 lehet a különbség. Így az i-ből $i+1$-be, illetve $i+1$-ből i-be történő átmenetek relatív gyakoriságainak különbsége 0-hoz tart. Azaz hosszú távon a Markov-lánc átlagosan az idő ugyanannyiad részében megy az i állapotból az $i+1$ állapotba, mint fordítva. Az $i=0$ illetve $i=M$ állapotok esete hasonlóan tárgyalható. Így a (szavakban megfogalmazott) időmegfordíthatóság adódik.

Írjuk fel az (6.1) összefüggést $i = 0, \dots, M-1$ és $j = i+1$ választásokkal, így

$$
\begin{aligned}
\pi_0\alpha_0 &= \pi_1(1-\alpha_1),\\
\pi_1\alpha_1 &= \pi_2(1-\alpha_2),\\
&\vdots\\
\pi_i\alpha_i &= \pi_{i+1}(1-\alpha_{i+1}),\\
&\vdots\\
\pi_{M-1}\alpha_{M-1} &= \pi_M(1-\alpha_M).
\end{aligned}
$$

Ezt megoldva kapjuk, hogy

$$\pi_1 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\pi_0, \quad \pi_2 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\pi_1 = \frac{\alpha_0\alpha_1}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}\pi_0, \quad \dots,$$

általában pedig

$$\pi_i = \frac{\alpha_0\cdots\alpha_{i-1}}{(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_i)}\pi_0, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Mivel $\sum_{i=0}^M \pi_i = 1$,

$$\pi_0\left[1 + \sum_{j=1}^M \frac{\alpha_0\cdots\alpha_{j-1}}{(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_j)}\right] = 1,$$

így minden $i = 1, \dots, M$-re

$$\pi_i = \frac{\alpha_0\cdots\alpha_{i-1}}{(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_i)}\left[1 + \sum_{j=1}^M \frac{\alpha_0\cdots\alpha_{j-1}}{(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_j)}\right]^{-1}.$$

Speciálisan, ha $\alpha_i = \alpha$, $i = 0, \dots, M$, akkor

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{j=1}^M \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^j\right]^{-1} = \left(\frac{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{M+1} - 1}{\frac{\alpha}{1-\alpha} - 1}\right)^{-1} = \frac{1-\beta}{1-\beta^{M+1}},$$

ahol $\beta = \alpha/(1-\alpha)$ és így

$$\pi_i = \frac{\beta^i(1-\beta)}{1-\beta^{M+1}}, \qquad i = 0, 1, \ldots, M.$$

□

Az alábbiakban az előző feladat speciális eseteként tárgyaljuk az ún. Ehrenfest-féle urnamodellt. P. és T. Ehrenfest (két fizikus) az alábbi modellt dolgozta ki molekulák mozgásának vizsgálatára.

6.6. Feladat. (Ehrenfest-féle urnamodell) Tegyük fel, hogy M molekulát elhelyeztünk két urnában. Kiválasztunk véletlenszerűen egy molekulát (a két urna és az urnában levő molekulák közül is véletlenszerűen választva) és átrakjuk a másik urnába. Ezt az eljárást ismételve jelölje X_n az n-edik lépés után az első urnában levő molekulák számát. Ekkor $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc, ugyanis minden lépésben az összes molekula közül választunk véletlenszerűen egyet. Létezik-e stacionárius eloszlása a szóban forgó Markov-láncnak és ha igen mi az?

Megoldás. Ezen Markov-lánc fázistere $\{0, 1, \ldots, M\}$ és átmenetvalószínűségei

$$p_{i,i+1} = \frac{M-i}{M} = 1 - p_{i,i-1}, \qquad i = 1, \ldots, M-1,$$
$$p_{0,1} = 1 = 1 - p_{0,0}, \qquad p_{M,M} = 0 = 1 - p_{M,M-1},$$

hiszen amikor az első urnában i darab molekula van, akkor a második urnában $M-i$ darab van és ahhoz, hogy a következő lépésben az első urnában $i+1$ darab legyen a második urnából kell választani egyet. Így ez a Markov-lánc speciális esete az előző példabelinek $\alpha_i = (M-i)/M$, $i = 0, 1, \ldots, M$-el. Tehát ez a Markov-lánc irreducibilis, aperiódikus, ergodikus, időmegfordítható és stacionárius eloszlása $\pi_0, \ldots, \pi_M$,

$$\pi_0 = \left(1 + \sum_{j=1}^{M} \frac{\alpha_0 \cdots \alpha_{j-1}}{(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_j)}\right)^{-1} = \left(1 + \sum_{j=1}^{M} \frac{\frac{M}{M}\frac{M-1}{M}\cdots\frac{M-j+1}{M}}{\frac{1}{M}\cdots\frac{j}{M}}\right)^{-1}$$
$$= \left(1 + \sum_{j=1}^{M} \frac{M(M-1)\cdots(M-j+1)}{j!}\right)^{-1} = \left(1 + \sum_{j=1}^{M} \binom{M}{j}\right)^{-1} = 2^{-M} = \left(\frac{1}{2}\right)^{M},$$

ahol az utolsó előtti lépésben a binomiális tételt használtuk. Így minden $i = 0, 1, \ldots, M$-re

$$\pi_i = \frac{\alpha_0 \cdots \alpha_{i-1}}{(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_i)}\left(\frac{1}{2}\right)^{M} = \frac{M(M-1)\cdots(M-i+1)}{1\cdots i}\left(\frac{1}{2}\right)^{M} = \binom{M}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{M}.$$

Így a stacionárius eloszlás M-ed rendű, $1/2$-ed paraméterű binomiális eloszlás.

Belátható az is, hogy hosszú távon az M molekula mindegyikének helyzete egymástól független, és mindegyikük $1/2$, $1/2$ valószínűséggel lehet az első ill. a második urnában. □

6.7. Feladat. Helyezzünk el véletlenszerűen m darab fehér és m darab fekete golyót két urnában oly módon, hogy mindkét urna m darab golyót tartalmazzon. Minden egyes alkalommal egy-egy golyót kiválasztunk (véletlenszerűen és egymástól függetlenül) mindkét urnából és megcseréljük őket. Legyen X_n az n-edik csere után az első urnában levő fehér golyók száma.

(i) Mutassuk meg, hogy $\{X_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc, és határozzuk meg az átmenetvalószínűségi mátrixát!

(ii) Határozzuk meg a stacionárius eloszlását, feltéve, ha létezik!

(iii) Mutassuk meg, hogy $\{X_n : n \geqslant 0\}$ időmegfordítható Markov-lánc!

Megoldás. Az $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc állapottere $\{0, 1, \ldots, m\}$ és irreducibilis, aperiódikus a Markov-lánc.

(i) Könnyen kapjuk, hogy

$$p_{0,1} = 1, \quad p_{m,m-1} = 1, \quad p_{0,0} = 0, \quad p_{m,m} = 0.$$

Ha $i = 1, \ldots, m-1$, úgy $p_{i,i+1}$ megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első urnából feketét, a másodikból pedig fehéret választunk tudva azt, hogy az első urnában i darab fehér (így $m-i$ darab fekete), és a második urnában $m-i$ darab fehér (és így i darab fekete) van, összesen ugyanis m darab fehér van. Ezért

$$p_{i,i+1} = \frac{m-i}{m}\frac{m-i}{m} = \frac{(m-i)^2}{m^2}, \qquad i = 0, \ldots, m-1.$$

Hasonlóan $p_{i,i-1}$ megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első urnából fehéret, a másodikból pedig feketét választunk, tudva azt, hogy az első urnában i darab fehér (így $m-i$ darab fekete), és a második urnában $m-i$ darab fehér (és így i darab fekete) van. Ezért

$$p_{i,i-1} = \frac{i}{m}\frac{i}{m} = \frac{i^2}{m^2}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Analóg módon

$$p_{i,i} = \frac{2i(m-i)}{m^2}, \qquad i = 0, \ldots, m.$$

Összefoglalva

$$p_{i,i+1} = \frac{(m-i)^2}{m^2}, \qquad p_{i,i-1} = \frac{i^2}{m^2}, \qquad p_{i,i} = \frac{2i(m-i)}{m^2}, \quad i = 0, \ldots, m \quad \text{ahol értelmes.}$$

(ii) Mivel a Markov-lánc irreducibilis, aperiódikus, véges állapotterű, kapjuk, hogy ergodikus és az egyértelműen létező stacionárius eloszlást a következő egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{m} p_{i,j}\pi_i, \qquad j = 0, \ldots, m,$$
$$\pi_0 + \cdots + \pi_m = 1.$$

Ezen egyenletrendszer megoldását heurisztikusan megsejtjük, s utána megmutatjuk, hogy tényleg az a megoldás. Úgy gondoljuk, hogy igen hosszú távon annak a valószínűsége, hogy az első urnában i darab ($i = 0, 1, \ldots, m$) fehér golyó van egyenlő annak a valószínűségével, hogy $2m$ golyó közül (melyből m fehér, m fekete) m darabot kiválasztva i darab fehér van, azaz az a sejtésünk, hogy

$$\pi_i = \frac{\binom{m}{i}\binom{m}{m-i}}{\binom{2m}{m}} = \frac{\binom{m}{i}^2}{\binom{2m}{m}}, \qquad i = 0, 1, \ldots, m.$$

Azaz a stacionárius eloszlás hipergeometrikus eloszlás $2m, m$ és m paraméterekkel. Most megmutatjuk, hogy tényleg ez a stacionárius eloszlás.

Ha $j = 0$, akkor

$$\sum_{i=0}^{m} p_{i,0} \frac{\binom{m}{i}^2}{\binom{2m}{m}} = p_{1,0} \frac{\binom{m}{1}^2}{\binom{2m}{m}} = \frac{1}{m^2} \frac{m^2}{\binom{2m}{m}} = \frac{1}{\binom{2m}{m}} = \frac{\binom{m}{0}^2}{\binom{2m}{m}},$$

ezért a $j = 0$ eset rendben van.

Ha $j = 1$, akkor

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m} p_{i,1} \frac{\binom{m}{i}^2}{\binom{2m}{m}} &= p_{0,1} \frac{\binom{m}{0}^2}{\binom{2m}{m}} + p_{1,1} \frac{\binom{m}{1}^2}{\binom{2m}{m}} + p_{2,1} \frac{\binom{m}{2}^2}{\binom{2m}{m}} = \frac{1}{\binom{2m}{m}} + \frac{2(m-1)}{m^2} \frac{m^2}{\binom{2m}{m}} + \frac{2^2}{m^2} \frac{\binom{m}{2}^2}{\binom{2m}{m}} \\
&= \frac{1}{\binom{2m}{m}} \left(1 + 2(m-1) + \frac{4}{m^2} \frac{m^2(m-1)^2}{4} \right) = \frac{1}{\binom{2m}{m}} \left(2m - 1 + m^2 - 2m + 1 \right) \\
&= \frac{m^2}{\binom{2m}{m}} = \frac{\binom{m}{1}^2}{\binom{2m}{m}},
\end{aligned}$$

így a $j = 1$ eset is stimmel. A $j = 2, 3, \ldots, m-1$ esetben

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m} p_{i,j} \pi_i &= p_{j-1,j} \pi_{j-1} + p_{j,j} \pi_j + p_{j+1,j} \pi_{j+1} \\
&= \frac{(m-j+1)^2}{m^2} \frac{\binom{m}{j-1}^2}{\binom{2m}{m}} + \frac{2j(m-j)}{m^2} \frac{\binom{m}{j}^2}{\binom{2m}{m}} + \frac{(j+1)^2}{m^2} \frac{\binom{m}{j+1}^2}{\binom{2m}{m}} \\
&= \frac{(m!)^2}{m^2 \binom{2m}{m}} \left(\frac{(m-j+1)^2}{((j-1)!(m-j+1)!)^2} + \frac{2j(m-j)}{(j!(m-j)!)^2} + \frac{(j+1)^2}{((j+1)!(m-j-1)!)^2} \right) \\
&= \frac{\binom{m}{j}^2}{\binom{2m}{m}}.
\end{aligned}$$

A $j = m$ esetben is stimmel a dolog. Az is adódik, hogy

$$\sum_{j=0}^{m} \pi_j = \frac{1}{\binom{2m}{m}} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j}^2 = \frac{1}{\binom{2m}{m}} \binom{2m}{m} = 1.$$

(iii) Ahhoz, hogy az $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc időmegfordítható azt kell ellenőrizni, hogy $\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i}$, $i, j = 0, 1, \ldots, m$ esetén. Csak a $j = i + 1$ eset érdekes (egyébként $0 = 0$), azaz azt kell leellenőrizni, hogy

$$\frac{\binom{m}{i}^2}{\binom{2m}{m}} \frac{(m-i)^2}{m^2} = \frac{\binom{m}{i+1}^2}{\binom{2m}{m}} \frac{(i+1)^2}{m^2} \quad \text{igaz-e?}$$

Ekvivalens átalakításokat végrehajtva ez akkor és csak akkor igaz, ha

$$\binom{m}{i}(m-i) = \binom{m}{i+1}(i+1),$$

azaz

$$\frac{m!}{i!(m-i-1)!} = \frac{m!}{i!(m-i-1)!},$$

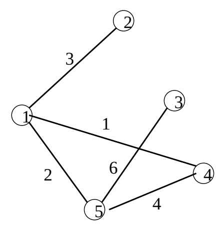
így igaz a dolog. □

6.8. Feladat. (Összefüggő súlyozott gráf) [Ross [7], Chapter 4, Example 7b] Tekintsünk egy tetszőleges összefüggő gráfot, melynek minden (i, j) éléhez hozzá van rendelve egy $w_{i,j}$ pozitív szám. Tekintsünk továbbá egy békát, mely ezen összefüggő gráf csúcspontjain ugrál oly módon, hogy ha egy adott időpontban az i csúcspontban van, akkor annak a valószínűsége, hogy a j csúcspontba ugrik

$$p_{i,j} = \frac{w_{i,j}}{\sum_{j \in I} w_{i,j}},$$

ahol $w_{i,j} := 0$, ha (i, j) nem él. (Itt I a gráf csúcspontjaiból álló halmaz.)

Tekintsük például az alábbi összefüggő gráfot:



Itt $p_{1,2} = 3/(3 + 1 + 2) = 1/2$. Legyen minden $n \geqslant 1$ esetén $X_n = i$, ha az n-edik időpontban a béka az i csúcspontban van. Mutassuk meg, hogy $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ időmegfordítható Markov-lánc és határozzuk meg stacionárius eloszlását!

Megoldás. Az összefüggőség miatt ez a Markov-lánc irreducibilis. Valóban, az összefüggőség alapján a gráf bármely két pontja között van út, azaz ha x és y a gráf csúcspontjai, úgy létezik csúcspontoknak olyan $v_0, \ldots, v_k$ és éleknek olyan $e_1, \ldots, e_k$ sorozata, hogy $v_0 = x$, $v_k = y$, e_l két végpontja v_{l-1} és v_l, $l = 1, \ldots, k$, továbbá a pontok között nincs ismétlődés (és ekkor az élek között sincs). Mivel minden olyan i és j csúcspontra, melyekre (i, j)

él, fennáll, hogy $w_{i,j} > 0$, kapjuk, hogy a szóban forgó Markov-lánc esetén minden állapot elérhető minden állapotból, azaz a Markov-lánc irreducibilis. Így az 6.3. Állítás alapján azt kell megnézni, hogy a

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i} \quad i,j \in I,$$
$$\sum_{i\in I} \pi_i = 1$$

egyenletrendszernek van-e pozitív megoldása. Az nem igaz általában, hogy ez a Markov-lánc aperiódikus lenne. Abban az esetben például, ha egy 5-pontú csillag gráf adott, akkor 2 a periódus. Felhasználva a $p_{i,j}$-re vonatkozó képletet kapjuk, hogy

$$\pi_i \frac{w_{i,j}}{\sum_{j\in I} w_{i,j}} = \pi_j \frac{w_{j,i}}{\sum_{i\in I} w_{j,i}},$$

és mivel $w_{i,j} = w_{j,i}$ adódik, hogy

$$\frac{\pi_i}{\sum_{j\in I} w_{i,j}} = \frac{\pi_j}{\sum_{i\in I} w_{j,i}}.$$

Ez pedig azzal ekvivalens, hogy létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$\frac{\pi_i}{\sum_{j\in I} w_{i,j}} = c, \qquad \forall\, i \in I.$$

Mivel $\sum_{i\in I} \pi_i = 1$, így $c \sum_{i\in I} \sum_{j\in I} w_{i,j} = 1$ miatt

$$\pi_i = \frac{\sum_{j\in I} w_{i,j}}{\sum_{i\in I} \sum_{j\in I} w_{i,j}}.$$

A példában megadott gráfra

$$\pi_1 = \frac{6}{32}, \quad \pi_2 = \frac{3}{32}, \quad \pi_3 = \frac{6}{32}, \quad \pi_4 = \frac{5}{32}, \quad \pi_5 = \frac{12}{32}.$$

□

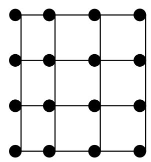
6.9. Megjegyzés. Egy $\{0, 1, \ldots, M\}$ állapotterű Markov-láncra az (6.1) egyenletrendszer általában nem oldható meg. A megoldhatósághoz szükséges feltétel, hogy tetszőleges i, j, k állapotokra fennálljon, hogy

$$p_{i,k} p_{k,j} p_{j,i} = p_{i,j} p_{j,k} p_{k,j},$$

lásd, pl., Ross [7], 178. oldal. □

6.10. Feladat. [Durrett [2], 65. old.] Tekintsünk egy 4×4-es „sakktáblát.” Egy bolha a bal felső mezőről indulva úgy bolyong, hogy minden lépésben az általa éppen elfoglalt mező egyik szomszédjára ugrik, a lehetséges mezők közül egyenlő valószínűséggel választva. Határozzuk meg, hogy hosszú távon az idő hányad részében van a bolha az egyes mezőkön!

Megoldás. Ezt a feladatot az 6.8. Feladat (összefüggő súlyozott gráf) módszerével oldjuk meg. Gráfunk csúcspontjai legyenek a 4×4-es ,,sakktábla" mezői, két csúcspontot akkor kötünk össze éllel, ha a bolha az egyikről a másikra (egy lépéssel) át tud ugrani. Így a következő összefüggő gráfot kapjuk:



Minden élhez az 1 súlyt rendeljük hozzá, továbbá minden $n \geqslant 1$ esetén legyen X_n az a csúcspont, ahol a bolha az n-edik ugrás után tartózkodik és X_0 a kezdő bal felső mezőnek megfelelő csúcspont. Ekkor $\{X_n : n \geqslant 0\}$ időmegfordítható Markov-lánc, és egy adott csúcsponthoz a stacionárius eloszlás azt a súlyt rendeli, melyet úgy kapunk, hogy az adott csúcspontból kiinduló élek számát elosztjuk a gráfban található élek összes számának kétszeresével. Az egyes csúcspontokban az adott csúcsból kiinduló élek számát feltüntetve a következő táblázat adódik:

2	3	3	2
3	4	4	3
3	4	4	3
2	3	3	2

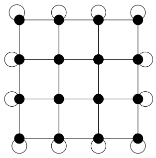
Ezért az élek összes számának kétszerese $4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 48$. Így az egyes csúcspontokban a stacionárius eloszlás által a hozzárendelt valószínűségeket feltüntetve a következő táblázatot kapjuk:

1/24	1/16	1/16	1/24
1/16	1/12	1/12	1/16
1/16	1/12	1/12	1/16
1/24	1/16	1/16	1/24

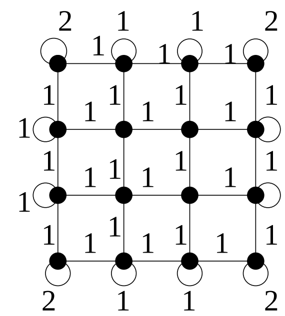
Az egyes csúcspontokban levő számok megadják, hogy az adott csúcspontban a bolha az idő hányad részében tartózkodik. □

6.11. Feladat. [Durrett [2], 65. old.] Tekintsünk egy 4×4-es ,,sakktáblát." Egy bolha a bal felső mezőről indulva úgy bolyong, hogy minden lépésben a négy lehetséges irány közül egyenlő valószínűséggel választ egyet és ha van abban az irányban az általa éppen elfoglalt mezővel szomszédos mező, úgy odaugrik, ha nincs úgy helyben marad. Határozzuk meg, hogy hosszú távon az idő hányad részében van a bolha az egyes mezőkön!

Megoldás. Ezt a feladatot az 6.8. Feladat (összefüggő súlyozott gráf) módszerével oldjuk meg. Gráfunk csúcspontjai legyenek a 4×4-es ,,sakktábla" mezői, két csúcspontot akkor kötünk össze éllel, ha a bolha az egyikről a másikra (egy lépéssel) át tud ugrani. Így a következő összefüggő gráfot kapjuk



Azaz a (4×4)-es ,,sakktáblát" reprezentáló négyzet oldalán levő csúcspontokhoz egy-egy hurokél is tartozik. Akkor kapjuk a feladatban megfogalmazott bolyongást, ha az élekhez a következő súlyokat rendeljük



Ugyanis, így például annak a valószínűsége, hogy az $(1,1)$ csúcspontból az $(1,2)$ csúcspontba ugrunk $1/(2+1+1) = 1/4$, annak, hogy $(1,1)$-ből $(1,1)$-be ugrunk $2/(2+1+1) = 1/2$, stb. Ekkor minden csúcspont esetén a csúcspontból kiinduló élekhez rendelt súlyok összege 4. Így minden egyes csúcspont esetén az általános esetre vonatkozó

$$\pi_i = \frac{\sum_{j\in I} w_{i,j}}{\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} w_{i,j}}$$

képlet a következő alakot ölti

$$\pi_i = \frac{4}{\sum_{i\in I} 4} = \frac{4}{16\cdot 4} = \frac{1}{16},$$

hiszen 16 csúcspont van. Így a stacionárius eloszlás a csúcspontokon vett egyenletes eloszlás. □

6.12. Feladat. (Queen's random walk) Reprezentáljuk a sakktáblát $\mathbb{Z}^2$-nek az $\{(i,j) : 1 \leqslant i,j \leqslant 8\}$ részhalmazaként. (A királynő tetszőleges számú mezőt léphet vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan egy lépés alatt.) A királynő az $(1,1)$ csúcspontból indulva úgy mozog, hogy minden lépésben a számára lehetséges mezők közül egyenlő valószínűséggel választ egyet és odaugrik.

(i) Az idő hányad részében tartózkodik az egyes mezőkön?

(ii) Várhatóan hány lépés alatt jut vissza a kiindulási $(1,1)$ pontba?

Megoldás. Ezt a feladatot az 6.8. Feladat (összefüggő súlyozott gráf) módszerével oldjuk meg. Gráfunk csúcspontjai legyenek a sakktábla mezői, két csúcspontot akkor kötünk össze éllel, ha a királynő az egyikről a másikra (egy lépéssel) át tud ugrani. Minden élhez az 1 súlyt rendeljük hozzá, továbbá minden $n \geqslant 1$ esetén legyen X_n az a csúcspont, ahol a királynő az n-edik ugrás után tartózkodik és X_0 a kezdő bal felső mezőnek megfelelő csúcspont. Ekkor $\{X_n : n \geqslant 0\}$ időmegfordítható Markov-lánc, és egy adott csúcsponthoz a stacionárius eloszlás azt a súlyt rendeli, melyet úgy kapunk, hogy az adott csúcspontból kiinduló élek számát elosztjuk a gráfban található élek összes számának kétszeresével. Az egyes csúcspontokban az adott csúcsból kiinduló élek számát feltüntetve a következő táblázat adódik:

21	21	21	21	21	21	21	21
21	23	23	23	23	23	23	21
21	23	25	25	25	25	23	21
21	23	25	27	27	25	23	21
21	23	25	27	27	25	23	21
21	23	25	25	25	25	23	21
21	23	23	23	23	23	23	21
21	21	21	21	21	21	21	21

Ezt egyszerűen úgy foglalhatjuk össze, hogy a négyzet oldalától k, $(k = 0,1,2,3)$ távolságra levő csúcspontokból kiinduló élek száma $21 + 2k$. Így az élek összes számának kétszerese

$$21(16 + 2 \cdot 6) + 23(12 + 2 \cdot 4) + 25(8 + 4) + 27 \cdot 4 = 1456.$$

Ezért a négyzet oldalától k távolságra levő csúcspontokhoz a stacionárius eloszlás által hozzárendelt valószínűség

$$\frac{21 + 2k}{1456}, \qquad k = 0,1,2,3.$$

Ezzel az (i) kérdésre válaszoltunk.

A (ii) kérdésre a válasz

$$\frac{1456}{21 + 2 \cdot 0} = \frac{1456}{21} = 69.3333.$$

□

6.13. Feladat. (Knight's random walk) Reprezentáljuk a sakktáblát $\mathbb{Z}^2$-nek az $\{(i,j) : 1 \leqslant i,j \leqslant 8\}$ részhalmazaként. (Egy ló az (i,j) mezőről 8 lehetséges helyre: $(i+2,j+1)$, $(i+2,j-1)$, $(i+1,j+2)$, $(i+1,j-2)$, $(i-1,j+2)$, $(i-1,j-2)$, $(i-2,j+1)$ és $(i-2,j-1)$ ugorhat, feltéve, ha ezek rajta vannak a sakktáblán.) Egy ló az $(1,1)$ csúcspontból indulva úgy mozog, hogy minden lépésben a számára lehetséges mezők közül egyenlő valószínűséggel választ egyet és odaugrik.

(i) Az idő hányad részében tartózkodik az egyes mezőkön?

(ii) Várhatóan hány lépés alatt jut vissza a kiindulási $(1,1)$ pontba?

Megoldás. Ezt a feladatot az 6.8. Feladat (összefüggő súlyozott gráf) módszerével oldjuk meg. Gráfunk csúcspontjai legyenek a sakktábla mezői, két csúcspontot akkor kötünk össze éllel, ha a ló az egyikről a másikra (egy lépéssel) át tud ugrani. Minden élhez az 1 súlyt rendeljük hozzá, továbbá minden $n \geqslant 1$ esetén legyen X_n az a csúcspont, ahol a ló az n-edik ugrás után tartózkodik és X_0 a kezdő bal felső mezőnek megfelelő csúcspont. Ekkor $\{X_n : n \geqslant 0\}$ időmegfordítható Markov-lánc, és egy adott csúcsponthoz a stacionárius eloszlás azt a súlyt rendeli, melyet úgy kapunk, hogy az adott csúcspontból kiinduló élek számát elosztjuk a gráfban található élek összes számának kétszeresével. Az egyes csúcspontokban az adott csúcsból kiinduló élek számát feltüntetve a következő táblázat adódik:

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

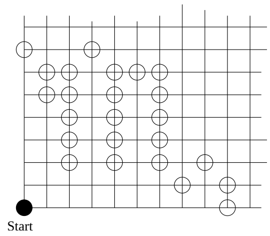
Ezért az élek összes számának kétszerese

$$4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8 = 336.$$

Így az egyes csúcspontokban a stacionárius eloszlás által a hozzá rendelt valószínűségeket feltüntetve az előző táblázat $1/336$-szeresét kapjuk. Ezzel az (i) kérdésre válaszoltunk.

A (ii) kérdésre a válasz $\frac{336}{2} = 168$. $\square$

6.14. Feladat. Tekintsünk egy részecskét, mely a sík nemnegatív egész koordinátájú pontjain bolyong oly módon, hogy a $(0,0)$-ból indul ki és minden lépésben valamelyik lehetséges irányban (lefelé, felfelé, jobbra, balra) egy egységet mozdul el, a lehetséges irányok közül mindig egyenlő valószínűséggel választva. Feltételezzük, hogy az egymást követő lépések függetlenek. Feltételezzük, hogy a részecske úgy bolyong, hogy az alábbi ábrán ◯-el jelölt pontokba nem léphet (azaz ezek számára nem lehetséges irányok, ha éppen olyan helyen van, hogy oda is léphetne). Természetesen a részecske az x tengely alá, illetve az y tengely elé sem léphet. Az ábra:



(i) Hosszú távon az idő hányad részében van az $A = (1, 3)$ pontban?

(ii) Hosszú távon az idő hányad részében van az $O = (0, 0)$ pontban?

(iii) Tegyük fel, hogy a részecske az $A = (1, 3)$ pontból indul ki. Várhatóan hány lépés múlva tér vissza oda?

Megoldás. Ezt a feladatot az 6.8. Feladat (összefüggő súlyozott gráf) módszerével oldjuk meg. Gráfunk csúcspontjai a részecske által elérhető pontok halmaza, két csúcspontot akkor kötünk össze éllel, ha a részecske az egyikről a másikra (egy lépéssel) át tud ugrani. Így egy összefüggő gráfot kapunk. Minden élhez az 1 súlyt rendeljük. Ekkor $\{X_n : n \geqslant 0\}$ időmegfordítható Markov-lánc lesz és egy adott csúcsponthoz a stacionárius eloszlás azt a súlyt rendeli, melyet úgy kapunk, hogy az adott csúcspontból kiinduló élek számát elosztjuk a gráfban található élek összes számának kétszeresével. Az adott gráfban 34 csúcspont van, 3 olyan csúcspont van, melyből 4 él vezet ki, 14 olyan csúcspont van, amelyből 3 él vezet ki, 13 olyan csúcspont van, melyből 2 él vezet ki és 4 olyan csúcspont, melyből 1 él vezet ki. Így az összes élek számának kétszerese $3 \cdot 4 + 14 \cdot 3 + 13 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 84$.

(i) Mivel az A pontból 3 él vezet ki, így $\pi_A = 3/84$.

(ii) Mivel a $(0, 0)$ pontból 2 él indul ki, így $\pi_{(0,0)} = 2/84$.

(iii) Ez a Markov-lánc irreducibilis és 2-periódusú. Az $m_{A,A}$ mennyiségre kérdeznek rá. Mivel $m_{A,A} = 1/\pi_A$, ezért a válasz $84/3$. □

7. Markov döntési folyamatok

A következőkben Ross [7, Chapter 4, Section 8] fejezetét dolgozzuk fel.

Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy sztochasztikus folyamat az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, melynek fázistere $I = \{1, 2, \ldots, M\}$. Minden egyes időpillanatban, miután megfigyeltük ezt a sztochasztikus folyamatot, választanunk kell egy döntést egy A döntéshalmazból, melyről feltételezzük, hogy véges.

Ha a folyamat az n időpillanatban az i állapotban van és az a döntést választottuk, akkor feltételezzük, hogy a folyamat a j állapotba $p_{i,j}(a)$ valószínűséggel megy át. Ha a_n-nel jelöljük az n-edik időpillanatban választott döntést, akkor a fenti dolog matematikailag azt jelenti, hogy

$$P(X_{n+1} = j \,|\, X_0, a_0, X_1, a_1, \dots, X_n = i, a_n = a) = p_{i,j}(a),$$

azaz az átmenetvalószínűségek csak a jelenlegi állapottól és az utána meghozott döntéstől függenek (és persze a következő állapottól).

Döntési stratégián (policy) egy, a döntéseink meghozatalára vonatkozó szabályt értünk. Csak olyan döntési stratégiákra szorítkozunk, melyek során egy n időpillanatban meghozott döntés csak a folyamat adott időpontbeli állapotától függ (és nem függ a korábbi állapotoktól és döntésektől). Megengedünk azonban ún. véletlenített stratégiákat is, azaz mikor egy adott időpontbeli döntésünket valamilyen valószínűség eloszlás szerint választjuk ki az összes lehetséges döntések halmazából.

Valós számok egy $\beta := \{\beta_i(a), a \in A, i = 1, \dots, M\}$ halmazát véletlen döntési stratégiának nevezzük, ha

$$0 \leqslant \beta_i(a) \leqslant 1, \quad \forall\, i = 1, \dots, M, \ \ \forall\, a \in A, \qquad \sum_{a \in A} \beta_i(a) = 1, \qquad \forall\, i = 1, \dots, M.$$

($\beta_i(a)$-t úgy interpretáljuk, hogy ha a folyamat az i állapotban van, akkor az a döntést $\beta_i(a)$ valószínűséggel választjuk.)

Rögzítsünk a továbbiakban egy β döntési stratégiát. Vezessük be a $\mathbb{P}_\beta = (\mathbb{P}_\beta)_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, M$, $M \times M$-es mátrixot, ahol

$$(\mathbb{P}_\beta)_{i,j} := \sum_{a \in A} p_{i,j}(a)\beta_i(a), \quad i, j = 1, \dots, M.$$

Ekkor $\mathbb{P}_\beta$ egy sztochasztikus mátrix. Valóban, minden $i = 1, \dots, M$ esetén

$$\sum_{j=1}^{M} (\mathbb{P}_\beta)_{i,j} = \sum_{a \in A} \left(\sum_{j=1}^{M} p_{i,j}(a) \right) \beta_i(a) = \sum_{a \in A} \beta_i(a) = 1,$$

és $(\mathbb{P}_\beta)_{i,j} \geqslant 0$, $i, j = 1, \dots, M$. Így tetszőleges μ_i, $i = 1, \dots, M$, kezdeti eloszlás esetén létezik olyan $(\Omega_\beta, \mathcal{A}_\beta, P_\beta)$ valószínűségi mező és ezen egy olyan $\{Y_n : n \geqslant 0\}$ homogén Markov-lánc, melynek $\{1, \dots, M\}$ a fázistere, μ_i, $i = 1, \dots, M$, a kezdeti eloszlása, azaz $P_\beta(Y_0 = i) = \mu_i$, $i = 1, \dots, M$, és egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa $\mathbb{P}_\beta$, azaz

$$P_\beta(Y_{n+1} = j \,|\, Y_n = i) = (\mathbb{P}_\beta)_{i,j} = \sum_{a \in A} p_{i,j}(a)\beta_i(a), \qquad n \in \mathbb{N}, \quad i, j = 1, \dots, M.$$

Biztosítható az is, hogy

$$P_\beta(d_n = a \,|\, Y_n = i) = \beta_i(a), \qquad n \in \mathbb{N}, \ \ i \in I, \ \ a \in A,$$

teljesüljön. Itt d_n jelöli az n-edik időpillanatban választott döntést, d_n is az $(\Omega_\beta, \mathcal{A}_\beta, P_\beta)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó.

Feltételezzük, hogy tetszőleges β döntési stratégia esetén a kapott $\{Y_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc irreducibilis, aperiódikus és ergodikus. (Ezen feltétel ellenőrzése persze a konkrét példákban nem mindig egyszerű.) Jelölje $\{\pi_i^\beta, i \in I\}$ ezen Markov-lánc egyértelműen létező stacionárius eloszlását (amikor a β döntési stratégia van érvényben), azaz

$$\pi_i^\beta = \lim_{n\to\infty} P_\beta(Y_n = i), \qquad i \in I,$$

és legyen

$$\pi_{i,a}^\beta := \lim_{n\to\infty} P_\beta(Y_n = i, d_n = a), \qquad i \in I,\ a \in A.$$

Ekkor tetszőleges $i \in I$, $a \in A$, esetén

$$\beta_i(a) = \frac{P_\beta(d_n = a, Y_n = i)}{P(Y_n = i)} = \frac{P_\beta(d_n = a, Y_n = i)}{\sum_{a\in A} P_\beta(d_n = a, Y_n = i)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Így felhasználva, hogy A véges halmaz,

$$(7.1) \qquad \beta_i(a) = \frac{\lim_{n\to\infty} P_\beta(d_n = a, Y_n = i)}{\sum_{a\in A} \lim_{n\to\infty} P_\beta(d_n = a, Y_n = i)} = \frac{\pi_{i,a}^\beta}{\sum_{a\in A} \pi_{i,a}^\beta}, \qquad i \in I,\ a \in A.$$

Megmutathatók továbbá a következők. A $\pi^\beta = (\pi_{i,a}^\beta)$, $i \in I$, $a \in A$ vektorra fennáll, hogy

(i) $\pi_{i,a}^\beta \geqslant 0$, $\forall\, i \in I$, $\forall\, a \in A$,

(ii) $\sum_{i\in I} \sum_{a\in A} \pi_{i,a}^\beta = 1$,

(iii) $\sum_{a\in A} \pi_{j,a}^\beta = \sum_{i\in I} \sum_{a\in A} \pi_{i,a}^\beta p_{i,j}(a)$, $\forall\, j \in I$.

Igaz a megfordítás is, ha egy $\pi = (\pi_{i,a})$, $i \in I$, $a \in A$ vektor eleget tesz az (i), (ii) és (iii) feltételeknek, akkor létezik olyan β döntési stratégia, hogy

$$\pi_{i,a} = \lim_{n\to\infty} P_\beta(Y_n = i, d_n = a), \qquad i \in I,\ a \in A.$$

És ekkor β választható

$$\beta_i(a) = \frac{\pi_{i,a}}{\sum_{a\in A} \pi_{i,a}} \qquad i \in I,\ a \in A,$$

alakban.

Gyakorlati problémák szempontjából fontos az ún. **optimális döntési stratégiák** kiválasztása. Tegyük fel, hogy ha az $\{X_n : n \geqslant 0\}$ sztochasztikus folyamat az i állapotban van és az a döntést választjuk, akkor $R(i, a)$ díjat kell fizetnünk. Így $R(X_i, a_i)$ jelenti az i időpontban fizetendő díjat. Fontos lehet, hogy egy adott β stratégia mellett egy időegység alatt várhatóan mennyit kell fizetnünk, pontosabban a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\beta \left[\frac{\sum_{i=1}^n R(Y_i, a_i)}{n} \right]$$

mennyiségre vagyunk kíváncsiak. Felhasználva $\pi_{i,a}^{\beta}$ definícióját, és hogy I, ill. A véges halmazok

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_\beta[R(Y_n,a_n)] &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i\in I}\sum_{a\in A}R(i,a)P_\beta(Y_n=i,d_n=a)\\ &= \sum_{i\in I}\sum_{a\in A}R(i,a)\lim_{n\to\infty}P_\beta(Y_n=i,d_n=a)=\sum_{i\in I}\sum_{a\in A}\pi_{i,a}^{\beta}R(i,a).\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy ha y_n, $n\in\mathbb{N}$, egy konvergens valós számsorozat, akkor a számtani közepekből képzett sorozat

$$S_n := \frac{y_1+\cdots+y_n}{n}, \quad n\in\mathbb{N},$$

is konvergens és $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}y_n$, kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_\beta\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}R(Y_i,a_i)}{n}\right]=\sum_{i\in I}\sum_{a\in A}\pi_{i,a}^{\beta}R(i,a).$$

Határozzuk meg azt a β^* döntési stratégiát, melyre az időegység alatt várhatóan fizetett pénz maximális (minimális). Ez egy klasszikus lineáris programozási feladat megoldását jelenti:

$$\sum_{i\in I}\sum_{a\in A}\pi_{i,a}R(i,a)\to \text{maximum (minimum)}$$

feltételek:

$$\begin{aligned}&\pi_{i,a}\geqslant 0 \qquad \forall\, i\in I, a\in A,\\ &\sum_{i\in I}\sum_{a\in A}\pi_{i,a}=1,\\ &\sum_{a\in A}\pi_{j,a}=\sum_{i\in I}\sum_{a\in A}\pi_{i,a}p_{i,j}(a), \qquad \forall\, j\in I.\end{aligned}$$

Ha $\pi^*=(\pi_{i,a}^*)$, $i\in I$, $a\in A$, jelöli ezen lineáris programozási feladat megoldását, úgy az optimális döntési stratégia β^*

$$\beta_i^*(a)=\frac{\pi_{i,a}^*}{\sum_{a\in A}\pi_{i,a}^*}, \qquad i\in I,\ a\in A.$$

7.1. Megjegyzés. (i) Megmutatható, hogy a π^* optimális megoldás rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden $i\in I$ esetén pontosan egy darab $\pi_{i,a}^*$ nem nulla. Ami azt vonja maga után, hogy az optimális döntési stratégia nem randomizált, azaz ha a folyamat az i állapotban van, akkor a stratégia determinisztikusan megmondja hogyan kell döntenünk.

(ii) Ez a lineáris programozási feladatos megközelítési mód igen hasznos, lehetőséget ad korlátozó feltételek figyelembevételére is. Tegyük fel, hogy egy olyan optimális döntési stratégiát keresünk, melynek alkalmazása során a folyamat nem tartózkodhat az 1-es állapotban az időnek 100α-nál nagyobb százalékában hosszú távon $(0<\alpha<1)$. Ekkor is a fenti lineáris programozási feladatot kell megoldani, kiegészítve a feltételek sorát az

$$\sum_{a\in A}\pi_{1,a}\leqslant\alpha \qquad \text{feltétellel.}$$

□

7.2. Feladat. Péter egy város két (diszjunkt) zónájában taxizik, legyenek ezek A és B. Egy A zónában felvett utas 0.6 valószínűséggel utazik A zónabeli végállomásra, és 0.4 valószínűséggel B zónabeli végállomásra. Egy B zónában felvett utas 0.7 valószínűséggel utazik B zónabeli végállomásra, és 0.3 valószínűséggel A zónabeli végállomásra. (Feltételezzük, hogy ha az utas végállomása abban a zónában van, ahol a taxis felveszi, akkor a taxis út közben nem megy át a másik zónába, illetve, ha a másik zónában van, úgy csak egyszer történik az út során zónaváltás.) Feltételezzük azt is, hogy ha a taxis egy utast elvisz egy zónába (az utas végállomására), ott az kiszáll és a taxis ekkor csak az adott zónából érkező hívásokra vevő, azaz csak az adott zónából veszi fel a következő utast. Egy olyan fuvarért mely teljesen az A zónában van 6 forintot, egy olyanért ami teljesen a B zónában van 8 forintot, és egy olyanért, mely mindkét zónát érinti 12 forintot számol fel. Átlagosan mennyi a taxis bevétele 1 fuvaron?

Megoldás. Minden $n \geqslant 1$ esetén legyen $X_n = A$, ha az n-edik fuvart az A zónában veszi fel a taxis, és $X_n = B$, ha a B zónában. Ekkor az $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ sztochasztikus folyamat fázistere $\{A, B\}$. A feladatot a Markov döntési folyamatok elméletét használva oldjuk meg ún. véletlen döntési stratégiát használva. Az a feltétel, hogy a taxis mindig csak abból a zónából érkező hívásokra reagál, melyben az utolsó utasát kirakta szükséges ahhoz, hogy a Markov döntési folyamatok elméletét alkalmazni tudjuk. Legyen döntéseink véges halmaza $\{D_A, D_B\}$, ahol D_A ill. D_B jelöli a taxiba beszálló utas azon döntését, hogy A ill. B zónabeli végállomásra utazik. A Markov döntési folyamatoknál bevezetett jelöléseket használva

$$\begin{aligned}
p_{A,A}(D_A) &= P(X_{n+1} = A \mid X_n = A, a_n = D_A) = 1, \qquad p_{A,A}(D_B) = 0,\\
p_{A,B}(D_A) &= P(X_{n+1} = B \mid X_n = A, a_n = D_A) = 0, \qquad p_{A,B}(D_B) = 1,\\
p_{B,B}(D_A) &= P(X_{n+1} = B \mid X_n = B, a_n = D_A) = 0, \qquad p_{B,B}(D_B) = 1,\\
p_{B,A}(D_B) &= P(X_{n+1} = A \mid X_n = B, a_n = D_B) = 0, \qquad p_{B,A}(D_A) = 1.
\end{aligned}$$

Vezessük be a β döntési stratégiát a következő módon:

$$\beta = \Big\{\beta_A(D_A), \beta_A(D_B), \beta_B(D_A), \beta_B(D_B)\Big\},$$

ahol

$$\begin{aligned}
\beta_A(D_A) &= 0.6, \qquad \beta_B(D_A) = 0.3,\\
\beta_A(D_B) &= 0.4, \qquad \beta_B(D_B) = 0.7.
\end{aligned}$$

(Például $\beta_A(D_A) = 0.6$, mert ha egy utast a taxis felvesz az A zónában, akkor ő 0.6 valószínűséggel utazik A zónabeli célállomásra.)

Ekkor az elmélet alapján létezik olyan $(\Omega_\beta, \mathcal{A}_\beta, P_\beta)$ valószínűségi mező, ezen olyan $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ homogén Markov-lánc, melynek fázistere $\{A, B\}$ és egylépéses átmenetvalószínűségei:

$$\begin{aligned}
P_\beta(Y_{n+1} = A \,|\, Y_n = A) &= p_{A,A}(D_A)\beta_A(D_A) + p_{A,A}(D_B)\beta_A(D_B) = 0.6 + 0 = 0.6,\\
P_\beta(Y_{n+1} = B \,|\, Y_n = A) &= p_{A,B}(D_A)\beta_A(D_A) + p_{A,B}(D_B)\beta_A(D_B) = 0 + 0.4 = 0.4,
\end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\begin{aligned}
P_\beta(Y_{n+1} = A \,|\, Y_n = B) &= 0.3,\\
P_\beta(Y_{n+1} = B \,|\, Y_n = B) &= 0.7.
\end{aligned}$$

Az $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa:

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} A & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Fennáll továbbá az is, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
P_\beta(d_n = D_A \,|\, Y_n = A) &= 0.6, & P_\beta(d_n = D_B \,|\, Y_n = A) &= 0.4,\\
P_\beta(d_n = D_A \,|\, Y_n = B) &= 0.3, & P_\beta(d_n = D_B \,|\, Y_n = B) &= 0.7.
\end{aligned}$$

Az $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc irreducibilis, aperiódikus és véges állapotterű, ezért ergodikus és az egyértelműen létező stacionárius eloszlását a következő egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\begin{aligned}
\pi_A^\beta &= 0.6\pi_A^\beta + 0.3\pi_B^\beta,\\
\pi_B^\beta &= 0.4\pi_A^\beta + 0.7\pi_B^\beta,\\
\pi_A^\beta &+ \pi_B^\beta = 1.
\end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$\pi_A^\beta = \frac{3}{7}, \qquad \pi_B^\beta = \frac{4}{7}.$$

Az általános elméletnek megfelelően vezessük be a π_{A,D_A}^β, π_{A,D_B}^β, π_{B,D_A}^β és π_{B,D_B}^β mennyiségeket, ahol például

$$\pi_{A,D_A}^\beta = \lim_{n\to\infty} P_\beta(Y_n = A, d_n = D_A).$$

Felhasználva (7.1)-t kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
0.6 = \beta_A(D_A) &= \frac{\pi_{A,D_A}^\beta}{\pi_{A,D_A}^\beta + \pi_{A,D_B}^\beta} = \frac{\pi_{A,D_A}^\beta}{\pi_A^\beta} = \frac{7}{3}\pi_{A,D_A}^\beta,\\
0.4 = \beta_A(D_B) &= \frac{\pi_{A,D_B}^\beta}{\pi_{A,D_A}^\beta + \pi_{A,D_B}^\beta} = \frac{\pi_{A,D_B}^\beta}{\pi_A^\beta} = \frac{7}{3}\pi_{A,D_B}^\beta,\\
0.7 = \beta_B(D_B) &= \frac{\pi_{B,D_B}^\beta}{\pi_{B,D_A}^\beta + \pi_{B,D_B}^\beta} = \frac{\pi_{B,D_B}^\beta}{\pi_B^\beta} = \frac{7}{4}\pi_{B,D_B}^\beta,\\
0.3 = \beta_B(D_A) &= \frac{\pi_{B,D_A}^\beta}{\pi_{B,D_A}^\beta + \pi_{B,D_B}^\beta} = \frac{\pi_{B,D_A}^\beta}{\pi_B^\beta} = \frac{7}{4}\pi_{B,D_A}^\beta.
\end{aligned}$$

Ezért

$$\pi^{\beta}_{A,D_A} = \frac{1.8}{7}, \qquad \pi^{\beta}_{A,D_B} = \frac{1.2}{7},$$
$$\pi^{\beta}_{B,D_B} = \frac{2.8}{7}, \qquad \pi^{\beta}_{B,D_A} = \frac{1.2}{7}.$$

Így a taxis egy fuvarra vonatkoztatott átlagos bevételének várható értéke az általános elmélet szerint

$$\sum_{i\in\{A,B\}} \sum_{a\in\{D_A,D_B\}} \pi^{\beta}_{i,a} R(i,a),$$

ahol

$$R(A,D_A) = 6, \qquad R(A,D_B) = 12, \qquad R(B,D_B) = 8, \qquad R(B,D_A) = 12.$$

Ezért az egy fuvarra vonatkoztatott átlagos bevétel várható értéke:

$$\frac{1.8}{7}6 + \frac{1.2}{7}12 + \frac{2.8}{7}8 + \frac{1.2}{7}12 = \frac{62}{7}.$$

Ezt az eredményt heurisztikusan is megkaphatjuk. Jelölje X az átlagos 1 fuvarra eső profitot. Ekkor feltéve, hogy az A zónában vagyunk

$$\mathbb{E}(X \mid A) = 6 \cdot 0.6 + 12 \cdot 0.4 = 8.4,$$

és feltéve, hogy a B zónában vagyunk

$$\mathbb{E}(X \mid B) = 12 \cdot 0.3 + 8 \cdot 0.7 = 9.2.$$

Felhasználva, hogy a stacionárius eloszlás alapján hosszú távon átlagosan az idő $3/7$-ed részében vagyunk A-ban és $4/7$-ed részében B-ben, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}X = \frac{3}{7}\mathbb{E}(X \mid A) + \frac{4}{7}\mathbb{E}(X \mid B) = \frac{62}{7}.$$

□

7.3. Feladat. Évi három különféle sampont használ, hónaponta váltogatva őket, jelöljük ezeket A, B és C-vel. Évi következő hónapi választását mindig csak az adott hónapban használt sampon határozza meg az alábbi átmenetvalószínűségi mátrix szerint

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Az A sampon 2 forintba, a B sampon 3 forintba, a C sampon 4 forintba kerül. Hosszú távon várhatóan mennyit költ Évi átlagosan egy hónap alatt samponra?

1. Megoldás. Ez a feladat az ún. Markov döntési folyamatok elméletéhez kapcsolódik. Jelölje X_n az Évi által az n-edik hónapban használt sampont. Ekkor $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc, melynek fázistere $\{A, B, C\}$, egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa pedig P.

Ekkor a samponért egy adott hónapban fizetett díj felfogható úgy, hogy minden esetben miután már ismerjük X_n-et döntenünk kell, hogy 2-es, 3-as vagy 4-es döntést hozunk meg, és ezek díjai rendre 2 Ft, 3 Ft, 4 Ft. A döntési szabály pedig a következő,

ha $X_n = A$, akkor (1-valószínűséggel) a 2-es döntést hozzuk meg,
ha $X_n = B$, akkor (1-valószínűséggel) a 3-es döntést hozzuk meg,
ha $X_n = C$, akkor (1-valószínűséggel) a 4-es döntést hozzuk meg.

Formálisabban

$$\begin{aligned} &\beta_A(2) = 1, &&\beta_B(3) = 1, &&\beta_C(4) = 1,\\ &\beta_A(3) = 0, &&\beta_B(2) = 0, &&\beta_C(2) = 0,\\ &\beta_A(4) = 0, &&\beta_B(4) = 0, &&\beta_C(3) = 0, \end{aligned}$$

és

$$R(A, 2) = 2, \qquad R(B, 3) = 3, \qquad R(C, 4) = 4,$$

a többi $R(i, j)$ pedig 0. Az elmélet szerint a

$$\sum_{i\in\{A,B,C\}} \sum_{a\in\{2,3,4\}} \pi_{i,a} R(i, a)$$

mennyiséget kell kiszámolni, ez pedig arra redukálódik, hogy

$$\pi_A R(A, 2) + \pi_B R(B, 3) + \pi_C R(C, 4) = 2\pi_A + 3\pi_B + 4\pi_C,$$

ahol π_A, π_B, π_C a lánc stacionárius eloszlása. (Ez heurisztikusan is érthető!) A stacionárius eloszlást pedig a következő egyenletrendszer megoldása adja

$$\begin{aligned} \pi_A &= 0.1\pi_A + 0.2\pi_B + 0.1\pi_C,\\ \pi_B &= 0.2\pi_A + 0.4\pi_B + 0.3\pi_C,\\ \pi_C &= 0.7\pi_A + 0.4\pi_B + 0.6\pi_C,\\ \pi_A &+ \pi_B + \pi_C = 1. \end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$\pi_A = \frac{12}{91}, \qquad \pi_B = \frac{29}{91}, \qquad \pi_C = \frac{50}{91},$$

és így a kérdésre a válasz

$$2\pi_A + 3\pi_B + 4\pi_C = \frac{311}{91} \approx 3,417.$$

2. Megoldás. Ez a megoldás Ispány Mártontól származik. A feladatban az

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(2P(X_k = A) + 3P(X_k = B) + 4P(X_k = C)\Big)$$

kifejezés $n \to \infty$ esetén vett határértékére kérdeznek rá, ahol $\{X_n : n \geqslant 1\}$ egy olyan Markov-lánc, melynek fázistere $\{A, B, C\}$ és egylépéses átmenetvalószínűségi mátrixa P. Felhasználva, hogy $\{X_n : n \geqslant 1\}$ irreducibilis, véges állapotterű, kapjuk, hogy ergodikus és így egyértelműen létezik stacionárus eloszlása, melyet az első megoldásban már meghatároztunk:

$$\pi_A = \frac{12}{91}, \qquad \pi_B = \frac{29}{91}, \qquad \pi_C = \frac{50}{91}.$$

Mivel a Markov-lánc aperiódikus is, az 4.2. Megjegyzés alapján

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = A) = \pi_A, \qquad \lim_{n\to\infty} P(X_n = B) = \pi_B, \qquad \lim_{n\to\infty} P(X_n = C) = \pi_C.$$

Felhasználva, hogy tetszőleges $a_n, n \in \mathbb{N}$, konvergens, valós számsorozat esetén, $(\sum_{k=1}^{n} a_k)/n$ is konvergens ugyanazzal a határértékkel, kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(X_k = A) = \pi_A, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(X_k = B) = \pi_B, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(X_k = C) = \pi_C.$$

Ezért

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(2P(X_k = A) + 3P(X_k = B) + 4P(X_k = C)\Big) = 2\pi_A + 3\pi_B + 4\pi_C.$$

□

8. Markov-láncok és a szimplex algoritmus

A következőkben *Sheldon Ross: A simple heuristic approach to simplex efficiency, European Journal of Operational Research 9, 344–348, (1982)* cikkét dolgozzuk fel.

Legyen A egy adott $m \times n$-es valós mátrix. Legyenek adottak továbbá a $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ vektorok is. Tekintsük a következő lineáris programozási feladatot:

$$\begin{aligned}
&\langle c, x\rangle \to \min\\
&\text{feltételek:}\\
&\quad Ax = b,\\
&\quad x \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $n \gg m \gg 0$. Megmutatható, hogy a fenti lineáris programozási feladat megoldása mindig megválasztható úgy, hogy legalább $n - m$ koordinátája 0, azaz mindig választható az ún. lehetséges tartomány extremális pontjának.

A szimplex algoritmus működésének lényege, hogy a lehetséges tartomány egy extremális pontjából mindig egy olyan újabb extremális pontba ugrik, ahol a célfüggvény értéke kisebb, egészen addig, amíg el nem éri a minimum helyet. Mivel a lehetséges extremális pontok száma $N = \binom{n}{m}$ igen nagy lehet, azt gondolnánk, hogy a szimplex algoritmus sokáig kell, hogy fusson, a gyakorlatban azonban nem ez a helyzet. Az alábbiakban ezt a tényt próbáljuk megérteni úgy, hogy Markov-láncként modellezzük a szimplex algoritmus mozgását a lehetséges extremális pontokon.

Feltételezzük, hogy ha egy adott lépésben a szimplex algoritmus a j-edik legjobb extremális pontban van, akkor a következő lépésben egyenlő valószínűséggel ugrik a $j-1$ legjobb extremális pont akármelyikére. Ezen feltételezés mellett megmutatjuk, hogy az az idő (lépésszám), mely alatt a szimplex algoritmus eljut az N-edik legjobb extremális pontból a legjobb extremális pontba N esetén megközelítőleg normális eloszlású $\log N$ várható értékkel és szórásnégyzettel.

Minden $n \geqslant 0$-ra legyen $X_n = i$, ha az n-edik lépésben a szimplex algoritmus az i-edik legjobb extremális pontban van. Ekkor $\{X_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc, melynek fázistere $\{1, 2, \ldots, N\}$ és az átmenetvalószínűségek

$$p_{1,1} = 1, \qquad p_{i,j} = \frac{1}{i-1}, \quad j = 1, \ldots, i-1, \ \ i > 1.$$

(Az 1-es állapot felel meg a legjobb extremális pontnak és az extremális pontokat jóság szerint csökkenő sorrendben számoztuk.)

Először azt gondoljuk végig, hogy ebben a modellben miért lesz a szimplex algoritmus várható futási ideje megközelítőleg $\log N$. Jelölje τ_1 az 1-es állapot első elérési idejét, azaz

$$\tau_1(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{ha } \ X_0(\omega) = 1, \\ k & \text{ha } \ X_k(\omega) = 1 \text{ és } \ X_t(\omega) \neq 1, \, 1 \leqslant t < k, \\ +\infty & \text{ha } \ X_t(\omega) \neq 1, \, \forall \ \ t \geqslant 1. \end{cases}$$

Jelen esetben $P(\tau_1 < +\infty) = 1$, és az is igaz, hogy $P(\tau_1 \leqslant N-1) = 1$. Célunk az $\mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = N)$ feltételes várható értéket kiszámolni. Ekkor $\mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = 1) = 0$ és minden $i \geqslant 2$-re

$$\mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau_1 = n \,|\, X_0 = i).$$

Ha $n = 1$, akkor

$$P(\tau_1 = n \,|\, X_0 = i) = P(\tau_1 = 1 \,|\, X_0 = i) = P(X_1 = 1 \,|\, X_0 = i) = \frac{1}{i-1}.$$

Ha $n > 1$, akkor feltételt véve az első lépésre

$$
\begin{aligned}
P(\tau_1 = n \,|\, X_0 = i) &= \sum_{j=1}^{N} P(\tau_1 = n, X_1 = j \,|\, X_0 = i) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \frac{P(\tau_1 = n, X_1 = j, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{P(\tau_1 = n, X_1 = j, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} P(\tau_1 = n \,|\, X_1 = j, X_0 = i) P(X_1 = j \,|\, X_0 = i) \\
&= \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} P(\tau_1 = n-1 \,|\, X_0 = j).
\end{aligned}
$$

Így

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = i) &= \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i-1} \sum_{n=2}^{\infty} n \sum_{j=1}^{i-1} P(\tau_1 = n-1 \,|\, X_0 = j) \\
&= \frac{1}{i-1} \Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \sum_{j=1}^{i-1} P(\tau_1 = n \,|\, X_0 = j) \Big) \\
&= \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau_1 = n \,|\, X_0 = j) + \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau_1 = n \,|\, X_0 = j).
\end{aligned}
$$

Mivel $j = 1$ esetén $P(\tau_1 = n \,|\, X_0 = j) = 0$, ha $n > 0$, és $\mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = j)$ definícióját használva

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = i) &= \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = j) + \frac{1}{i-1} \sum_{j=2}^{i-1} \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau_1 = n \,|\, X_0 = j) \\
&= \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = j) + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i-1} \sum_{j=2}^{i-1} 1 = 1 + \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = j).
\end{aligned}
$$

Felhasználva ezt a rekurziót, mivel $\mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = 1) = 0$, kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = 2) &= 1 + \frac{1}{2-1} \mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = 1) = 1, \\
\mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = 3) &= 1 + \frac{1}{3-1} \Big(\mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = 1) + \mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = 2) \Big) = 1 + \frac{1}{2}, \\
\mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = 4) &= 1 + \frac{1}{4-1} \Big(\mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = 1) + \mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = 2) + \mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = 3) \Big) \\
&= 1 + \frac{1}{3}(0 + 1 + 1 + 1/2) = 1 + 1/2 + 1/3.
\end{aligned}
$$

Teljes indukcióval megmutatható, hogy

$$
\mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = i) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j}, \quad i \geqslant 2.
$$

Speciálisan

$$\mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = N) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j}.$$

Megmutatjuk, hogy

$$\log N < \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j} < 1 + \log(N-1), \qquad N > 2.$$

Analízisből tanultuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

(Az $(1 + 1/n)^n$ sorozat monoton növekvően, az $(1 + 1/n)^{n+1}$ sorozat pedig monoton csökkenően tart e-hez.) Logaritmust véve

$$n \log\left(\frac{n+1}{n}\right) < 1 < (n+1) \log\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Így

$$\log\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad \frac{1}{n+1} < \log\left(\frac{n+1}{n}\right), \quad n \geqslant 1.$$

Felírva a fenti összefüggéseket 1-től n-ig, és összeadva őket kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \log\frac{2}{1} + \log\frac{3}{2} + \cdots + \log\frac{n+1}{n} &< 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} &< \log\frac{2}{1} + \log\frac{3}{2} + \cdots + \log\frac{n+1}{n}, \end{aligned}$$

így $\log(ab) = \log a + \log b$ alapján

$$\begin{aligned} \log(n+1) &< 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} &< \log(n+1.) \end{aligned}$$

Ezért

$$\log n < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} < 1 + \log(n-1), \qquad n > 2.$$

Emiatt az $\mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = N)$ várható érték nagy N-re megközelítőleg tényleg $\log N$.

A szimplex algoritmus futási idejének aszimptotikus leírásához érdemes bevezetni τ_1 következő reprezentációját. Mivel a szimplex algoritmus minden lehetséges extremális pontot maximum egyszer érint, érvényes a következő előállítás

$$\tau_1(\omega) = \sum_{j=1}^{N-1} \mathbb{1}_j(\omega),$$

ahol $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $X_0(\omega) = N$ és

$$\mathbb{1}_j(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ha a Markov-lánc belép } j\text{-be,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ha $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $X_0(\omega) \neq N$, akkor $\mathbb{1}_j(\omega) := 0$. Ezen reprezentáció jelentősége az alábbi lemmában rejlik.

8.1. Lemma. *Az előbb definiált* $\mathbb{1}_1, \ldots, \mathbb{1}_{N-1}$ *valószínűségi változók az* $\{X_0 = N\}$ *feltételre nézve függetlenek és*

$$P(\mathbb{1}_j = 1 \,|\, X_0 = N) = \frac{1}{j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N-1.$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy minden $1 \leqslant j \leqslant N-1$ és tetszőleges $x_{j+1}, \ldots, x_{N-1} \in \{0,1\}$ esetén

$$P(\mathbb{1}_j = 1 \,|\, \mathbb{1}_{j+1} = x_{j+1}, \ldots, \mathbb{1}_{N-1} = x_{N-1}, X_0 = N) = \frac{1}{j}.$$

Ha $j = N-1$, akkor a fenti összefüggés arra redukálódik, hogy

$$P(\mathbb{1}_{N-1} = 1 \,|\, X_0 = N) = \frac{1}{N-1},$$

ami a feltételezések miatt nyilván igaz. A továbbiakban legyen $1 \leqslant j \leqslant N-2$ rögzített. Minden olyan $\omega \in \Omega$ esetén, melyre $X_0(\omega) = N$ legyen

$$n(\omega) := \min\{i : i > j,\ \mathbb{1}_i(\omega) = 1\},$$

azaz n a legkisebb j-nél nagyobb olyan állapot, ahová belép a szimplex algoritmus. Így tudjuk, hogy a szimplex algoritmus belép az n állapotba és nem lép be a $(j+1), \ldots, (n-1)$ állapotokba, ezért a következő lépés az $1, 2, \ldots, j$ állapotok valamelyikébe történik. Megmutatjuk, hogy

$$P(\mathbb{1}_j = 1 \,|\, \mathbb{1}_{j+1} = x_{j+1}, \ldots, \mathbb{1}_{N-1} = x_{N-1}, X_0 = N) = \frac{1}{j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N-2. \tag{8.1}$$

A Markov-tulajdonság alapján

$$\begin{aligned}
&P(\mathbb{1}_j = 1 \,|\, \mathbb{1}_{j+1} = x_{j+1}, \ldots, \mathbb{1}_{N-1} = x_{N-1}, X_0 = N) \\
&= P(\mathbb{1}_j = 1 \,|\, \mathbb{1}_{j+1} = 0, \ldots, \mathbb{1}_{n-1} = 0, \mathbb{1}_n = 1, \mathbb{1}_{n+1} = x_{n+1}, \ldots, \mathbb{1}_{N-1} = x_{N-1}, X_0 = N) \\
&= \frac{P(\mathbb{1}_j = 1, \mathbb{1}_{j+1} = 0, \ldots, \mathbb{1}_{n-1} = 0 \,|\, \mathbb{1}_n = 1, \mathbb{1}_{n+1} = x_{n+1}, \ldots, \mathbb{1}_{N-1} = x_{N-1}, X_0 = N)}{P(\mathbb{1}_{j+1} = 0, \ldots, \mathbb{1}_{n-1} = 0 \,|\, \mathbb{1}_n = 1, \mathbb{1}_{n+1} = x_{n+1}, \ldots, \mathbb{1}_{N-1} = x_{N-1}, X_0 = N)} \\
&= \frac{P(\text{a Markov-lánc az } n \text{ állapotból a } j \text{ állapotba jut egy lépéssel})}{P(\text{a Markov-lánc az } n \text{ állapotból az } 1, 2, \ldots, j \text{ állapotok valamelyikébe jut egy lépéssel})}.
\end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned}&P(\text{a Markov-lánc az } n \text{ állapotból a } j \text{ állapotba jut egy lépéssel})\\&= \sum_{k=j+1}^{N} P(X_1 = j \mid X_0 = k) P(X_0 = k) = \sum_{k=j+1}^{N} \frac{1}{k-1} P(X_0 = k),\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}&P(\text{a Markov-lánc az } n \text{ állapotból a } 1,2,\ldots,j \text{ állapotok valamelyikébe jut egy lépéssel})\\&= \sum_{k=j+1}^{N} P(X_1 \in \{1,\ldots,j\} \mid X_0 = k) P(X_0 = k) = \sum_{k=j+1}^{N} \frac{j}{k-1} P(X_0 = k),\end{aligned}$$

kapjuk, hogy

$$\frac{P(\text{a Markov-lánc az } n \text{ állapotból a } j \text{ állapotba jut egy lépéssel})}{P(\text{a Markov-lánc az } n \text{ állapotból az } 1,2,\ldots,j \text{ állapotok valamelyikébe jut egy lépéssel})} = \frac{1}{j}.$$

Így fennáll (8.1).

Mivel az (8.1)-beli feltételes valószínűség nem függ $x_{j+1}, \ldots, x_{N-1}$-től, kapjuk, hogy $\mathbb{1}_j$ és $\mathbb{1}_{j+1}, \ldots, \mathbb{1}_{N-1}$ függetlenek az $\{X_0 = N\}$ feltétel mellett minden $1 \leqslant j \leqslant N-2$ esetén. A pontos indoklás a következő. Megmutatjuk, hogy

$$P(\mathbb{1}_j = 1 \mid X_0 = N) = \frac{1}{j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N-1.$$

Felhasználva (8.1)-t, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}P(\mathbb{1}_j = 1 \mid X_0 = N) &= \sum_{x_{j+1},\ldots,x_{N-1}\in\{0,1\}} P(\mathbb{1}_j = 1, \mathbb{1}_{j+1} = x_{j+1}, \ldots, \mathbb{1}_{N-1} = x_{N-1} \mid X_0 = N)\\&= \sum_{x_{j+1},\ldots,x_{N-1}\in\{0,1\}} P(\mathbb{1}_j = 1 \mid \mathbb{1}_{j+1} = x_{j+1}, \ldots, \mathbb{1}_{N-1} = x_{N-1}, X_0 = N)\\&\qquad\qquad \times P(\mathbb{1}_{j+1} = x_{j+1}, \ldots, \mathbb{1}_{N-1} = x_{N-1} \mid X_0 = N)\\&= \frac{1}{j} \sum_{x_{j+1},\ldots,x_{N-1}\in\{0,1\}} P(\mathbb{1}_{j+1} = x_{j+1}, \ldots, \mathbb{1}_{N-1} = x_{N-1} \mid X_0 = N) = \frac{1}{j}.\end{aligned}$$

Ekkor (8.1) alapján fennáll az is, hogy

$$P(\mathbb{1}_j = x_j \mid \mathbb{1}_{j+1} = x_{j+1}, \ldots, \mathbb{1}_{N-1} = x_{N-1}, X_0 = N) = P(\mathbb{1}_j = x_j \mid X_0 = N),$$

ahol $x_j \in \{0,1\}$. Így a lánc-szabály felhasználásával,

$$\begin{aligned}&P(\mathbb{1}_j = x_j, \mathbb{1}_{j+1} = x_{j+1}, \ldots, \mathbb{1}_{N-1} = x_{N-1} \mid X_0 = N)\\&= P(\mathbb{1}_j = x_j \mid \mathbb{1}_{j+1} = x_{j+1}, \ldots, \mathbb{1}_{N-1} = x_{N-1}, X_0 = N)\\&\quad \times P(\mathbb{1}_{j+1} = x_{j+1} \mid \mathbb{1}_{j+2} = x_{j+2}, \ldots, \mathbb{1}_{N-1} = x_{N-1}, X_0 = N) \cdots P(\mathbb{1}_{N-1} = x_{N-1} \mid X_0 = N)\\&= P(\mathbb{1}_j = x_j \mid X_0 = N) \cdots P(\mathbb{1}_{N-1} = x_{N-1} \mid X_0 = N).\end{aligned}$$

Ebből már az is következik, hogy $\mathbb{1}_1, \dots, \mathbb{1}_{N-1}$ függetlenek az $\{X_0 = N\}$ feltétel mellett és
$$P(\mathbb{1}_j = 1 \,|\, X_0 = N) = \frac{1}{j}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant N-1.$$
□

8.2. Tétel. *A korábbi jelölésekkel*

(i) $\mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = N) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j}$,

(ii) $D^2(\tau_1 \,|\, X_0 = N) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j}\left(1 - \frac{1}{j}\right)$,

(iii)
$$\lim_{N\to\infty} P\left(\frac{\tau_1 - \log N}{\sqrt{\log N}} < x \,\middle|\, X_0 = N\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} \, \mathsf{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Azaz nagy N-re az $X_0 = N$ feltétel mellett τ_1 közelítőleg normális eloszlású $\log N$ *várható értékkel és szórásnégyzettel. (Itt τ_1 is függ N-től.)*

Bizonyítás. Ha $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $X_0(\omega) = N$, úgy
$$\tau_1(\omega) = \sum_{j=1}^{N-1} \mathbb{1}_j(\omega),$$
és az 8.1. Lemma alapján $\mathbb{1}_1, \dots, \mathbb{1}_{N-1}$ függetlenek az $\{X_0 = N\}$ feltétel mellett, továbbá
$$P(\mathbb{1}_j = 1 \,|\, X_0 = N) = \frac{1}{j}, \qquad P(\mathbb{1}_j = 0 \,|\, X_0 = N) = 1 - \frac{1}{j}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant N-1.$$
Így
$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_j \,|\, X_0 = N) = \frac{1}{j}, \qquad D^2(\mathbb{1}_j \,|\, X_0 = N) = \frac{1}{j}\left(1 - \frac{1}{j}\right), \qquad 1 \leqslant j \leqslant N-1,$$
amiből (i) és (ii) következik.

Felhasználva, hogy
$$\log N < \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j} < 1 + \log(N-1), \qquad N > 2,$$
már beláttuk, hogy nagy N esetén $\mathbb{E}(\tau_1 \,|\, X_0 = N)$ megközelítőleg $\log N$. Most végigondoljuk, hogy nagy N esetén $D^2(\tau_1 \,|\, X_0 = N)$ is megközelítőleg $\log N$. Mivel $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$, kapjuk, hogy
$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j} - \frac{\pi^2}{6} < \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j}\left(1 - \frac{1}{j}\right) < \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j}, \qquad N > 2,$$

és így
$$\log N - \frac{\pi^2}{6} < \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j}\left(1 - \frac{1}{j}\right) < 1 + \log(N-1), \qquad N > 2.$$
Ezért kapjuk, hogy nagy N-re $D^2(\tau_1 \,|\, X_0 = N)$ megközelítőleg $\log N$.

A Ljapunov-féle központi határeloszlás tétel szerint (iii)-hez elég azt leellenőrizni, hogy

(8.2) $$\lim_{N\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\sum_{j=1}^{N-1} \mathbb{E}(|\mathbb{1}_j - \frac{1}{j}|^3 \,|\, X_0 = N)}}{\sqrt{\mathbb{D}^2(\tau_1 \,|\, X_0 = N)}} = 0.$$

Mivel
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|\mathbb{1}_j - 1/j|^3 \,|\, X_0 = N) &= \left(1 - \frac{1}{j}\right)^3 P(\mathbb{1}_j = 1 \,|\, X_0 = N) + \left(\frac{1}{j}\right)^3 P(\mathbb{1}_j = 0 \,|\, X_0 = N)\\ &= \frac{1}{j}\left(1 - \frac{1}{j}\right)^3 + \left(\frac{1}{j}\right)^3\left(1 - \frac{1}{j}\right), \qquad 1 \leqslant j \leqslant N-1,\end{aligned}$$
kapjuk, hogy
$$\sum_{j=1}^{N-1} \mathbb{E}\big(|\mathbb{1}_j - 1/j|^3 \,|\, X_0 = N\big) = \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{1}{j}\left(1 - \frac{1}{j}\right)^3 + \left(\frac{1}{j}\right)^3\left(1 - \frac{1}{j}\right)\right).$$

Így
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{\sum_{j=1}^{N-1} \mathbb{E}(|\mathbb{1}_j - \frac{1}{j}|^3 \,|\, X_0 = N)}}{\sqrt{\mathbb{D}^2(\tau_1 \,|\, X_0 = N)}} &\leqslant \frac{\sqrt[3]{\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j}\left(1 - \frac{1}{j}\right) + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j^2}}}{\sqrt{\log N - \pi^2/6}}\\ &\leqslant \frac{\sqrt[3]{1 + \log(N-1) + \pi^2/6}}{\sqrt{\log N - \pi^2/6}}.\end{aligned}$$

Mivel
$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \log(N-1) + \pi^2/6}}{\sqrt{\log N - \pi^2/6}} = \lim_{N\to\infty} \sqrt[6]{\frac{(1 + \log(N-1) + \pi^2/6)^2}{(\log N - \pi^2/6)^3}} = \lim_{N\to\infty} \sqrt[6]{\frac{(\log N)^2}{(\log N)^3}} = 0,$$
kapjuk, hogy fennáll (8.2). □

Látjuk, hogy e tételből is következik, hogy a szimplex algoritmus futási ideje megközelítőleg $\log N$. E tétel alapján például aszimptotikus konfidencia intervallumot lehet szerkeszteni a szimplex algoritmus futási idejére.

Az elkövetkező számolásokban fontos lesz
$$\log N = \log \binom{n}{m} \text{-re}$$

közelítő formulát találni, ha n, m és $n-m$ elég nagyok. A Stirling-formula szerint

$$\begin{aligned}N &= \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \sim \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{\left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}\left(\frac{n-m}{e}\right)^{n-m}\sqrt{2\pi(n-m)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n^{n+1/2}}{m^{m+1/2}(n-m)^{n-m+1/2}}.\end{aligned}$$

Bevezetve a $c := n/m$ jelölést kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\log N &\sim (mc+1/2)\log(mc) - (m(c-1)+1/2)\log(m(c-1)) - (m+1/2)\log m - \frac{1}{2}\log(2\pi) \\ &= -\frac{1}{2}\log(2\pi) + mc(\log m + \log c) + \frac{1}{2}(\log m + \log c) - m(c-1)(\log m + \log(c-1)) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\log m + \log(c-1)) - m\log m - \frac{1}{2}\log m \\ &= -\frac{1}{2}\log(2\pi) + mc\log\left(\frac{c}{c-1}\right) + \frac{1}{2}\log c + m\log(c-1) - \frac{1}{2}\log(c-1) - \frac{1}{2}\log m.\end{aligned}$$

Így

$$\log N \sim m\Big(c\log\left(\frac{c}{c-1}\right) + \log(c-1)\Big) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{c}{c-1}\right) - \frac{1}{2}\log m.$$

Mivel

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\log\left(\frac{x}{x-1}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x/(x-1))}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1} = 1, \\ \lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{x}{x-1}\right) &= \lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x-1}\right) = 0,\end{aligned}$$

kapjuk, hogy ha c elég nagy, akkor

$$\log N \sim m\big(1+\log(c-1)\big) - \frac{1}{2}\log m = m\Big(1+\log\left(\frac{n}{m}-1\right)\Big) - \frac{1}{2}\log m.$$

Ha például $n = 8000$, $m = 1000$, akkor a szükséges iterációk száma közelítőleg normális eloszlású, melynek várható értéke és szórásnégyzete

$$\log\binom{n}{m} \sim 1000(1+\log(8-1)) - \frac{1}{2}\log 1000 = 2945.9 - 3.4 = 2942.44.$$

Így, ha X jelöli a szükséges iterációk számát, akkor

$$\frac{X - 2942.44}{\sqrt{2942.44}}$$

közelítőleg $\mathcal{N}(0,1)$ eloszlású.

Ezt felhasználva válaszolhatunk arra a kérdésre, hogy 95%-os biztonsággal körülbelül milyen határok között van a szükséges iterációk száma? Legyen u olyan, hogy $\Phi(u) -$

$\Phi(-u) = 0.95$, így $u = 1.96$. Ezért a szükséges iterációk száma 95%-os biztonsággal körülbelül a

$$2942.44 \pm 1.96\sqrt{2942.44}$$

határok között van $(2836, 3049)$.

A szimplex algoritmus ezen modell szerinti Markov-láncként való modellezése csak annyit használ ki a szimplex algoritmus működéséből, hogy az egy adott extremális pontból mindig csak jobb extremális pontba lép egyforma valószínűséggel választva a lehetséges jobb extremális pontok közül. Megjegyezzük azt is, hogy ez a modell figyelmen kívül hagyja, hogy a célfüggvény értéke több extremális pontban is lehet ugyanaz az érték.

9. Egyéb példák

A következő példa tanulsága az lehet, hogy az életben nem csak Markov-láncok vannak.

9.1. Feladat. Statisztikai felmérések készültek a 26-os út forgalmáról. Minden gépjárművet teherautónak (T) vagy személygépkocsinak (K) minősítünk. A felmérések szerint átlagban 4 személygépkocsiból 3-at követ teherautó, míg két teherautóból csak 1-et követ személygépkocsi. (Feltételezzük, hogy megfigyeléseink eredménye független attól, hogy melyik napszakban történnek ezek a megfigyelések és a megfigyelés időtartamától is függetlenek. Matematikailag ez az (erős) stacionaritás feltételezését jelenti.)

(i) Rögzítsük a 26-os út egy pontját és jelölje X_n egy előre megadott időpont (a megfigyeléseink kezdete) után az ezen a ponton áthaladó n-edik gépjármű típusát, legyen $X_n = T$, ha ez a gépjármű teherkocsi és $X_n = K$, ha személygépkocsi. Csak a feladat feltételeit figyelembe véve következik-e, hogy $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc?

(ii) Feltételezzük, hogy az (i) részben megkonstruált $\{X_n : n \geqslant 1\}$ sztochasztikus folyamat Markov-lánc. Határozzuk meg átmenetvalószínűségi mátrixát!

(iii) Markov-láncságot feltételezve mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személygépkocsit legalább 3 teherautó követ?

(iv) Markov-láncságot feltételezve, hosszú távon a gépjárművek hányad része teherautó a 26-os úton?

(v) Feltételezzük, hogy $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc és azonosítsuk be a Markov-lánc K állapotát 0-val, T állapotát pedig 1-el. (Azaz az $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc fázisterének nem $\{K, T\}$-t, hanem $\{0, 1\}$-et tekintjük.) Igaz-e, hogy $\{X_n : n \geqslant 1\}$ martingál a hozzá tartozó természetes filtrációra nézve?

(vi) Csak a kezdeti feltételeket tekintve (tehát Markov-láncságot nem feltételezve) lehetséges-e megmondani, hogy hosszú távon a gépjárművek hányad része lesz teherautó a 26-os úton?

Megoldás.

(i) Nem. Az, hogy az $(n+1)$-edik gépjármű micsoda nem csak attól függhet, hogy az n-edik gépjármű micsoda. Gondoljunk például arra, hogy a kamionosok szeretnek konvojban menni (és versenyezni is egymással, Gyula nagy örömére). Ha ez valaki számára csak heurisztikus bizonyítás tekintse a következő ellenpéldát. Tekintsük személyautók és tehergépkocsik következő 10-elemű sorozatát $KTKTKTTTTK$. Tegyük ezt a 10-elemű mintát egymás után végtelen sokszor. Mivel a 10-elemű mintában 4 kocsi és 6 teherautó van, és 3 teherautót követ kocsi, illetve ha ezen 10-elemű mintákat egymás után rakjuk úgy azt is látjuk, hogy a 4 kocsiból 3-at követ teherautó, így teljesül az egyik kirótt feltétel. Az erős stacionaritással még baj van. Ezt a determinisztikus ellenpéldát véletlenítve jutunk egy már ténylegesen jó sztochasztikus ellenpéldához. Véletlenítjük az előbb felírt (10 elemű ciklusból építkező) végtelen lánc kezdőpontját: legyen X_1 az i-edik gépjármű a fenti 10-elemű ciklusban $1/10$ valószínűséggel $(i = 1, \ldots, 10)$, és innen indulunk a fent megkonstruált végtelen sorozatban. Az így kapott $\{X_n : n \geqslant 1\}$ sztochasztikus folyamat erősen stacionárius lesz, azaz $\{X_n : n \geqslant 1\}$ és $\{X_{n+k} : n \geqslant 1\}$ véges dimenziós eloszlásai ugyanazok minden $k \geqslant 1$-re. (Megfelelő mintával sok hasonló ellenpéldát konstruálhatunk. Például $KTKTKTKTKTKTTTTTTTKK$ egy jó 20 elemű minta.)

(ii) Feltételezve, hogy $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc, állapottere $\{K, T\}$ és átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} K & \;\;T \end{array} \\ \begin{array}{c} K \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ugyanis például $P_{K,K} = 1/4$, mert minden 4 kocsiból 3-at teherautó követ, így az esetek 1/4-ed részében jön kocsi.

(iii) A keresett valószínűség megegyezik a

$$P(X_4 = T, X_3 = T, X_2 = T \mid X_1 = K) \quad \text{valószínűséggel,}$$

ugyanis a véletlenszerűen választott kocsiról feltehetjük, hogy az első, a Markov-láncság feltételezése miatt. Így a lánc-szabály és a Markov-tulajdonság miatt

$$\begin{aligned}
&P(X_4 = T, X_3 = T, X_2 = T \mid X_1 = K) \\
&\quad = \frac{P(X_4 = T, X_3 = T, X_2 = T, X_1 = K)}{P(X_1 = K)} \\
&\quad = P(X_4 = T \mid X_3 = T, X_2 = T, X_1 = K) P(X_3 = T \mid X_2 = T, X_1 = K) P(X_2 = T \mid X_1 = K) \\
&\quad = P(X_4 = T \mid X_3 = T) P(X_3 = T \mid X_2 = T) P(X_2 = T \mid X_1 = K) \\
&\quad = P_{T,T} P_{T,T} P_{K,T} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{3}{4} = \frac{3}{16}.
\end{aligned}$$

(iv) Mivel a Markov-lánc irreducibilis, aperiódikus, véges állapotterű, kapjuk, hogy ergodikus és egyértelműen létezik stacionárius eloszlása, és a T állapothoz tartozó stacionárius valószínűséget kell meghatározni. A stacionárius eloszlás a következő egyenletrendszer megoldása

$$\begin{aligned}\pi_K &= \frac{1}{4}\pi_K + \frac{1}{2}\pi_T,\\ \pi_T &= \frac{3}{4}\pi_K + \frac{1}{2}\pi_T,\\ \pi_K + \pi_T &= 1.\end{aligned}$$

Ennek megoldása $\pi_K = 2/5$ és $\pi_T = 3/5$. Így hosszú távon a gépjárművek $3/5$-öd része teherautó.

(v) Legyen $K = 0$, $T = 1$. Tegyük fel, hogy $\{X_n : n \geqslant 1\}$ martingál az $\mathcal{F}_n := \sigma(X_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$, $n \geqslant 1$ filtrációra nézve. Ekkor $\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = X_n$, $n \geqslant 1$. Mivel $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc is, $\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, X_n)$, így $\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, X_n) = X_n$ kell legyen minden $n \geqslant 1$ esetén. Mivel $\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, X_n) = f(X_n)$ egy alkalmas f függvénnyel, ahol

$$\begin{aligned}f(0) &= \mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, X_n = 0),\\ f(1) &= \mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, X_n = 1),\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, X_n = 0) &= 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4},\\ \mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, X_n = 1) &= 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, X_n) = \frac{3}{4}\mathbb{1}_{\{0\}}(X_n) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{1\}}(X_n).$$

Ezért $\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, X_n) = X_n$ nem igaz, így $\{X_n : n \geqslant 1\}$ nem martingál.

Ha az $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc fázisterének $\{K, T\}$-t tekintjük, akkor a fentiekhez hasonlóan megmutatható, hogy nincs olyan $g : \{K, T\} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre $g(K) \neq g(T)$ és $\{g(X_n) : n \geqslant 1\}$ martingál az $\mathcal{F}_n$, $n \geqslant 1$, filtrációra nézve.

(vi) Megmutatjuk, hogy ha nem feltételezzük, hogy $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc, akkor is meg tudjuk mondani, hogy hosszú távon a gépjárművek hányad része kocsi és hányad része teherautó, és ugyanaz jön ki, mintha feltételezzük a Markov-láncságot, azaz 0.4 és 0.6. (A (iii) kérdésre már nem ugyanaz a válasz jönne ki, ha nem feltételezzük a Markov-láncságot.) Legyen n egy elég nagy szám. Tekintsünk n darab egymás utáni gépjárművet, legyen ezek közül pn kocsi és $(1-p)n$ teherautó. A feltételezések miatt azonban az is igaz, hogy az n kocsiból

$$\frac{1}{4}pn + \frac{1}{2}(1-p)n \qquad \text{a kocsik száma megközelítőleg,}$$

és

$$\frac{3}{4}pn + \frac{1}{2}(1-p)n \qquad \text{a teherautók száma megközelítőleg.}$$

Úgy gondoljuk, hogy $n \to \infty$ esetén mind a kocsik számának közelítésénél, mind a teherautók számánának közelítésénél az n-edik hibatag osztva n-el nullához tart, hiszen adataink a megfigyelések átlagaira vonatkoznak. Így $n \to \infty$ esetén

$$np = \frac{1}{4}pn + \frac{1}{2}(1-p)n + o(n),$$

ezért

$$p = \frac{1}{4}p + \frac{1}{2}(1-p).$$

Ezt az egyenletet megoldva, $p = 0.4$, ahogy vártuk. □

9.2. Feladat. [**Szevasztyanov–Csisztyakov–Zubkov [9], 5.1.28 Feladat**] Ányó (egy igazán jó csocsójátékos) egy csocsóverseny után az örömtől megrészegülve véletlenszerűen bolyong a sík egész koordinátájú pontjain. Egységnyi idő alatt valamelyik koordinátatengellyel párhuzamosan egységnyi távolságot tesz meg. Minden egyes szakasz megtétele után Ányó dönt további útjáról: vagy ugyanabban az irányban halad tovább, vagy balra vagy jobbra tér el (a lehetséges irányok mindegyikét $1/3$ valószínűséggel választja, függetlenül a korábbi mozgásától). Jelölje $Z_n = (Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)})$ Ányó tartózkodási helyét az n időpillanatban. Feltételezzük, hogy $Z_0 = (0,0)$ és $Z_1 = (1,0)$. Számítsuk ki az $\mathbb{E}Z_n$ várható értéket!

Megoldás. Jelölje e_1 és e_2 a koordinátatengelyek egységvektorait, és legyen $\xi_n := Z_{n+1} - Z_n$, $n \geqslant 0$. Ekkor $\xi_0 = Z_1 - Z_0 = (1,0) = e_1$ és $Z_n = \xi_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_{n-1}$, így $\mathbb{E}Z_n = \mathbb{E}\xi_0 + \mathbb{E}\xi_1 + \cdots + \mathbb{E}\xi_{n-1}$. Vegyük észre, hogy ξ_n bevezetésének az az értelme, hogy így egy olyan $\{\xi_n : n \geqslant 0\}$ Markov-láncot kapunk, melynek fázistere a véges $\{e_1, e_2, -e_2, -e_1\}$ halmaz és az e_1-ből indul ki. (Valóban Markov-láncot kapunk, mert az, hogy egy adott helyről hova lépünk csak attól függ, hogy most hol vagyunk.) Vegyük észre azt is, hogy $\{Z_n : n \geqslant 0\}$ nem Markov-lánc, hiszen az, hogy egy adott lépés után hová léphetünk nem csak attól függ, hogy hol vagyunk, hanem attól is, hogy honnan érkeztünk oda, azaz az eggyel korábbi múlttól is. A $\{\xi_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ -e_2 \\ -e_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & -e_2 & -e_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ugyanis például $P(\xi_{n+1} = e_1 \,|\, \xi_n = e_1) = 1/3$, mert $\xi_n = e_1$ azt jelenti, hogy az $(n+1)$-edik lépés során az e_1 koordinátatengellyel párhuzamosan ment egy egységet Ányó, így a következő (azaz az $(n+2)$-edik) lépés lehet e_1 irányú (előre), e_2 irányú (balra) vagy $-e_2$ irányú (jobbra), s mivel a lehetőségek közül Ányó egyenlő valószínűséggel választ, a kérdéses valószínűség $1/3$. Írjuk fel P-t $P = (F - G)/3$ alakban, ahol

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tetszőleges $k \geqslant 0$ esetén meghatározzuk az $\mathbb{E}\xi_k$ várható értéket! Mivel $\xi_0 = e_1$, a lánc kezdeti eloszlása $(1,0,0,0)$, így a $k \geqslant 0$ időpontban az ún. abszolút valószínűségek

$$\big(P(\xi_k = e_1) \quad P(\xi_k = e_2) \quad P(\xi_k = -e_2) \quad P(\xi_k = -e_1)\big) = \big(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\big)\, P^k.$$

Így látható, hogy P^k-ra explicit alakot kapva, explicit alakot kapunk a k időpontbeli abszolút valószínűségekre is, és így a várható érték definícióját felhasználva felírhatjuk az $\mathbb{E}\xi_k$ várható értéket. Megmutatjuk, hogy $FG = GF = F$. Valóban

$$FG = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ezért alkalmazhatjuk a binomiális tételt a következő számolás során

$$\begin{aligned}(F-G)^k &= \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} F^{k-m}(-G)^m = (-1)^k G^k + \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \binom{k}{m} F^{k-m} G^m \\ &= (-1)^k G^k + \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \binom{k}{m} F^{k-m},\end{aligned}$$

ugyanis $F^{k-m}G^m = F^{k-m-1}FGG^{m-1} = F^{k-m-1}FG^{m-1} = F^{k-m}G^{m-1} = \cdots = F^{k-m}$. Megmutatjuk, hogy $F^r = 4^{r-1}F$, $r \geqslant 1$, és

$$G^k = \begin{cases} G & \text{ha} \quad k = 2l+1,\ l = 0,1,2,\ldots, \\ I_{4\times 4} & \text{ha} \quad k = 2l,\ l = 0,1,2,\ldots. \end{cases}$$

Mivel $F^1 = F = 4^{1-1}F$, kapjuk, hogy $r = 1$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $F^r = 4^{r-1}F$. Ekkor

$$F^{r+1} = F^r F = 4^{r-1}FF = 4^{r-1}F^2 = 4^{r-1}4F = 4^r F.$$

Az $l = 0$ választással $k = 2\cdot 0 + 1 = 1$ és ekkor $G^k = G^1 = G$ igaz. Tegyük fel, hogy igaz a G^k-ra vonatkozó képlet minden k-nál kisebb vagy egyenlő páratlan számra. Ekkor

$$G^{k+2} = G^{2l+3} = G^k G^2 = GG^2 = G^3 = G.$$

Az $l = 0$ választással $k = 2\cdot 0 = 0$ és ekkor $G^0 = I_{4\times 4}$ igaz. Tegyük fel, hogy igaz a G^k-ra vonatkozó képlet minden k-nál kisebb vagy egyenlő páros számra. Ekkor

$$G^{2l+2} = G^{2l}G^2 = I_{4\times 4}G^2 = G^2 = I_{4\times 4}.$$

Ezért

$$
\begin{aligned}
P^k &= \frac{1}{3^k}(F-G)^k = \frac{1}{3^k}\left((-1)^k G^k + \sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\binom{k}{m}F^{k-m}\right)\\
&= \left(\frac{-1}{3}\right)^k G^k + \frac{1}{3^k}\left(\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\binom{k}{m}4^{k-m-1}\right)F\\
&= \left(\frac{-1}{3}\right)^k G^k + \frac{1}{4\cdot 3^k}\left(\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}(-1)^m 4^{k-m} - (-1)^k\right)F\\
&= \left(\frac{-1}{3}\right)^k G^k + \frac{1}{4\cdot 3^k}\left((4-1)^k - (-1)^k\right)F = \left(\frac{-1}{3}\right)^k G^k + \frac{1}{4\cdot 3^k}\left(3^k - (-1)^k\right)F\\
&= \frac{1}{4}F - \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{3}\right)^k F + \left(\frac{-1}{3}\right)^k G^k.
\end{aligned}
$$

Ha $k = 2l$, $(l = 1, 2, \ldots)$, úgy

$$
\begin{aligned}
P(\xi_k = e_1) = (P^k)_{1,1} &= \frac{1}{4}1 - \frac{1}{4}\frac{1}{3^k}1 + \frac{1}{3^k}1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\cdot 3^{k-1}},\\
P(\xi_k = e_2) = (P^k)_{1,2} &= \frac{1}{4}1 - \frac{1}{4}\frac{1}{3^k}1 + \frac{1}{3^k}0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 3^k},\\
P(\xi_k = -e_2) = (P^k)_{1,3} &= \frac{1}{4}1 - \frac{1}{4}\frac{1}{3^k}1 + \frac{1}{3^k}0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 3^k},\\
P(\xi_k = -e_1) = (P^k)_{1,4} &= \frac{1}{4}1 - \frac{1}{4}\frac{1}{3^k}1 + \frac{1}{3^k}0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 3^k}.
\end{aligned}
$$

Ezért, ha $k = 2l$, $(l = 1, 2, \ldots)$, úgy

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi_k &= e_1\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4\cdot 3^{k-1}}\right) + e_2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 3^k}\right) + (-e_2)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 3^k}\right) + (-e_1)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 3^k}\right)\\
&= e_1\left(\frac{1}{4\cdot 3^{k-1}} + \frac{1}{4\cdot 3^k}\right) = \frac{1}{3^k}e_1.
\end{aligned}
$$

Hasonlóan kijön, hogy ha $k = 2l+1$, $l = 0, 1, \ldots,$ akkor is $\mathbb{E}\xi_k = e_1/3^k$. Így

$$
\mathbb{E}Z_n = \sum_{m=0}^{n-1}\mathbb{E}\xi_m = e_1\left(\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{3^m}\right) = e_1\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)e_1.
$$

Érdekes, hogy $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}Z_n = (3e_1)/2$, így ha végtelen sokáig folytatja a bolyongását Ányó várhatóan nem jut túl messzire az első lépése után, ami e_1. Ez nem túl meglepő, mert a számegyenesen adott szimmetrikus véletlen bolyongás esetén $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}S_n = 0$, így itt el sem mozdul várhatóan.

(A $(0,0)$ pontot nyugodtan tekinthetjük a Fácán nevű szórakozó helynek, mert Ányó gyakran szokott onnan indulni hazafelé és csocsóversenyeket is gyakran rendeznek ott.) □

9.3. Feladat. Péter a büntető dobást gyakorolja egy kosárlabda pályán, egymás után 100-szor dob. Az elsőt bedobja, a másodikat nem. Ezt követően minden egyes dobásnál annak a valószínűsége, hogy az sikeres egyenlő az azt megelőző sikeres dobások arányával. Mi annak a valószínűsége, hogy a 100 dobásból 50 lesz sikeres? (Ez a feladat a 2002. évi Putnam-versenyen szerepelt.)

Megoldás.

1. megoldás. Tegyük fel, hogy Péternek az $1. < i_2. < i_3. < \cdots < i_m.$ dobása sikeres és a $2. < j_2. < j_3. < \cdots < j_n.$ dobása nem sikeres. (Nálunk $n = m = 50$.) Annak a valószínűsége, hogy ez történik:

$$\frac{1}{i_2-1}\frac{2}{i_3-1}\frac{3}{i_4-1}\cdots\frac{m-1}{i_m-1}\cdot\frac{1}{j_2-1}\frac{2}{j_3-1}\frac{3}{j_4-1}\cdots\frac{n-1}{j_n-1}$$
$$= \frac{(m-1)!(n-1)!}{2\cdot 3\cdots(m+n-1)} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!},$$

hiszen a feladat szövege alapján annak a valószínűsége, hogy egy dobás nem sikeres egyenlő az azt megelőző sikertelen dobások arányával. Látjuk, hogy ez a valószínűség független $i_2, i_3, \ldots, i_m$ és $j_2, j_3, \ldots, j_n$ értékétől.

Mivel $i_2 \geqslant 3$ és $\{i_2, i_3, \ldots, i_m\} \subset \{3, 4, \ldots, m+n\}$, az összes lehetséges szóbajövő $i_2, i_3, \ldots, i_m$ elrendezés száma

$$\binom{m+n-2}{m-1}.$$

Így a keresett valószínűség

$$\binom{m+n-2}{m-1}\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} = \frac{1}{m+n-1}.$$

Nálunk $n = m = 50$, így a keresett valószínűség $1/99$.

(Ez a feladat példa nem klasszikus valószínűségi mezőre.)

2. megoldás. Ebben a megoldásban egy olyan bolyongást konstruálunk meg, ami nem homogén Markov-lánc (a pontos indoklást lásd a megoldás végén). Ez a megoldás Iglói Endrétől származik.

Kiindulunk a $(0,0)$ rácspontból. Először betalál Péter, tehát $(0,0)$-ból vezet egy szakasz $(1,1)$-be, a másodikra mellé megy, tehát $(1,1)$-ből $(2,0)$-ba rajzolunk egy szakaszt. Úgy megyünk tovább egy tetszőleges rácspontból, ahová eljuthatunk, hogy ha betalál Péter, akkor jobbra fel átlósan, ha mellémegy, akkor jobbra le átlósan lépünk egyet. Ekkor az (i,j) pontból $(i+j)/(2i)$ valószínűséggel lépünk jobbra fel, $(i-j)/(2i)$ valószínűséggel lépünk jobbra le. Ugyanis csak azt kell ellenőrizni, hogy az (i,j) pontba úgy juthatok el i lépés alatt, hogy $(i+j)/2$-t felfelé és $(i-j)/2$-t lefelé kell lépnem. Ez azzal ekvivalens, hogy ha a lépésekhez $+1$-et (felfelé) és -1-et (lefelé) rendelünk, és összeadjuk őket, akkor az összegnek j-nek kell lennie ($j \in \{-i, -i+1, \ldots, i-1, i\}$). Ha x darab $+1$ és $i-x$ darab -1 van, akkor $x\cdot 1 + (i-x)(-1) = j$ kell legyen, amiből $x = (i+j)/2$ és $i - x = (i-j)/2$.

Ezt felhasználva i-szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy tetszőleges olyan (i,j) pontba, ahova eljuthatunk, $1/(i-1)$ valószínűséggel juthatunk el. Tekintsük először az $i=3$ esetet. A feltételek alapján

$$P\big((3,1)\text{-be eljuthatunk}\big) = P\big((3,-1)\text{-be eljuthatunk}\big) = \frac{1}{2} = \frac{1}{3-1}.$$

Tegyük fel, hogy (i,j)-re igaz az állítás (ezt úgy értjük, hogy j tetszőleges olyan érték lehet, hogy az i-edik lépésben (i,j)-be eljuthatunk). Mutassuk meg, hogy igaz az állítás $(i+1,l)$-re is.

$$\begin{aligned}
P\big((i+1,l)\text{-be eljuthatunk}\big) &:= P(A)\\
&= P\big(A \,|\, (i,l-1)\text{-be eljuthatunk}\big)P((i,l-1)\text{-be eljuthatunk})\\
&\quad + P(A \,|\, (i,l+1)\text{-be eljuthatunk})P((i,l+1)\text{-be eljuthatunk})\\
&= \frac{i+l-1}{2i}\frac{1}{i-1} + \frac{i-l-1}{2i}\frac{1}{i-1} = \frac{2i-2}{2i(i-1)} = \frac{1}{i}.
\end{aligned}$$

Az, hogy 100 dobásbólból 50 lesz sikeres azt jelenti, hogy a $(100,0)$ pontba kell eljutnunk, aminek valószínűsége $1/(100-1) = 1/99$.

Megmutatjuk most, hogy a háttérben egy nem homogén Markov-láncról van szó. Legyen $X_0 = (0,0)$, $X_1 = (1,1)$, $X_2 = (2,0)$ és minden $n \geqslant 3$ esetén $X_n = (n,j)$, ha a megoldásban definiált bolyongás az n-edik lépés után az (n,j) pontban van. Végiggondoljuk, hogy $\{X_n : n \geqslant 0\}$ nem homogén (azaz inhomogén) Markov-lánc. Minden $n \geqslant 3$ és $j \in \{-n,\dots,-1,0,1,\dots,n\}$ esetén

$$\begin{aligned}
&P\big(X_{n+1} = (n+1,j+1) \,|\, X_n = (n,j), X_{n-1},\dots,X_0\big)\\
&\qquad = \frac{n+j}{2n} = P(X_{n+1} = (n+1,j+1) \,|\, X_n = (n,j)),\\
&P\big(X_{n+1} = (n+1,j-1) \,|\, X_n = (n,j), X_{n-1},\dots,X_0\big)\\
&\qquad = \frac{n-j}{2n} = P(X_{n+1} = (n+1,j-1) \,|\, X_n = (n,j)).
\end{aligned}$$

Látjuk, hogy a baloldalon szereplő feltételes valószínűségek nem függenek $X_{n-1},\dots,X_0$-tól, így $\{X_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc. Azonban a Markov-lánc nem homogén, mert a szóban forgó feltételes valószínűségek függenek az n időponttól. $\square$

A következő egy nehezebb feladat.

9.4. Feladat. Legyen $n \in \mathbb{N}$ egy természetes szám. Elkészítünk egy $(3 \times n)$-es véletlen mátrixot az alábbi módon. Minden oszlopba az $1,2,3$ számokat írjuk valamilyen sorrendben. Feltételezzük, hogy minden sorrend egyformán valószínű és a különböző oszlopokhoz tartozó sorrendek egymástól függetlenek. Jelölje a_n, b_n és c_n a sorösszegeket úgy rendezve, hogy $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $n \geqslant 1995$ természetes szám, hogy

$$P(b_n = a_n + 1, c_n = a_n + 2) \geqslant 4P(a_n = b_n = c_n).$$

(Ez az 1995. évi Putnam verseny egyik feladata. Megoldásunk az ottani mintamegoldás részletezése.)

Megoldás. Legyen minden $n \geqslant 1$ esetén $X_n = (i_n, j_n, k_n)$, ahol

$$\begin{aligned}
i_n &:= \text{az első sorösszeg – a sorösszegek átlaga,}\\
j_n &:= \text{a második sorösszeg – a sorösszegek átlaga,}\\
k_n &:= \text{a harmadik sorösszeg – a sorösszegek átlaga.}
\end{aligned}$$

Mivel a sorösszegek átlaga $(6n)/3 = 2n$, kapjuk, hogy

$$i_n + j_n + k_n = a_n + b_n + c_n - 6n = 0.$$

Belátjuk, hogy $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc, melynek fázistere $\{(i,j,k) \in \mathbb{Z}^3, i + j + k = 0\}$. Egy újabb oszlop hozzáadása a mátrixhoz az $(1, 0, -1)^\top$ vektor valamely (véletlen) permutációjának hozzáadását jelenti az $(i_n, j_n, k_n)^\top$ vektorhoz. Ugyanis a $(3, 2, 1)^\top$ oszlop hozzáadása esetén az $(3 - 6/3, 2 - 6/3, 1 - 6/3)^\top = (1, 0, -1)^\top$ vektort kell hozzáadni $(i_n, j_n, k_n)^\top$-hoz és minden újabb hozzáadott oszlop $(3, 2, 1)^\top$-nak valamely permutációja. Látjuk azt is, hogy az $X_{n+1} = (i_{n+1}, j_{n+1}, k_{n+1})$ $(n+1)$-edik időpillanatbeli állapot csak az $X_n = (i_n, j_n, k_n)$ n-edik időpillanatbeli állapoton keresztül függ a múlttól, így $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc.

Legyen $\omega := e^{i2\pi/3}$ egy harmadik egységgyök. Azonosítsuk be az előbb definiált Markov-lánc egy $(i, j, k) \in \mathbb{Z}^3$, $i + j + k = 0$ állapotát az $\mathbb{R}^2$ sík $(i - j) + (j - k)\omega + (k - i)\omega^2$ pontjával. Megmutatjuk, hogy ha $(i_1, j_1, k_1) \in \mathbb{Z}^3$, $(i_2, j_2, k_2) \in \mathbb{Z}^3$ olyanok, hogy

$$(i_1 - j_1) + (j_1 - k_1)\omega + (k_1 - i_1)\omega^2 = (i_2 - j_2) + (j_2 - k_2)\omega + (k_2 - i_2)\omega^2,$$

akkor $i_1 - j_1 = i_2 - j_2$, $j_1 - k_1 = j_2 - k_2$ és így $k_1 - i_1 = k_2 - i_2$. Ekkor

$$(i_1 - i_2 - (j_1 - j_2)) + (j_1 - j_2 - (k_1 - k_2))\omega + (k_1 - k_2 - (i_1 - i_2))\omega^2 = 0.$$

Látjuk tehát, hogy elég azt megmutatni, hogy ha $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^3$, $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ és

$$a_1 + a_2\omega + a_3\omega^2 = 0,$$

akkor $a_1 = a_2 = a_3$. Mivel

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2\omega + a_3\omega^2 &= a_1 + a_2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) + a_3\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\\
&= a_1 - \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_3 + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a_3\right),
\end{aligned}$$

kapjuk, hogy

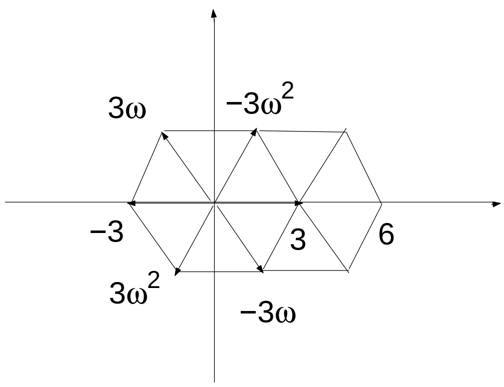
$$\begin{aligned}
&a_1 - \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_3 = 0,\\
&\frac{\sqrt{3}}{2}a_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a_3 = 0,\\
&a_1 + a_2 + a_3 = 0.
\end{aligned}$$

Az elsőt 2-vel szorozva, majd a 3.-hoz hozzáadva $3a_1 = 0$, ezért $a_1 = 0$ és az is adódik, hogy $a_2 = a_3 = 0$. (Látjuk, hogy a fenti számolásokban nem használjuk, hogy $i_1+j_1+k_1 = 0$ és $i_2 + j_2 + k_2 = 0$, azonban ezek is teljesülnek, ha (i_1, j_1, k_1), ill. (i_2, j_2, k_2) a szóban forgó Markov-lánc egy-egy állapota.)

Az $(1, 0, -1)$ vektornak 6 darab permutációja van és ezeknek különböző pontok felelnek meg az előző reprezentációban

$$
\begin{aligned}
(1, 0, -1) &\longrightarrow 1 + \omega + (-2)\omega^2 = -3\omega^2,\\
(1, -1, 0) &\longrightarrow 2 + (-1)\omega + (-1)\omega^2 = 3,\\
(0, 1, -1) &\longrightarrow -1 + 2\omega + (-1)\omega^2 = 3\omega,\\
(0, -1, 1) &\longrightarrow 1 + (-2)\omega + \omega^2 = -3\omega,\\
(-1, 0, 1) &\longrightarrow -1 + (-1)\omega + 2\omega^2 = 3\omega^2,\\
(-1, 1, 0) &\longrightarrow -2 + \omega + \omega^2 = -3,
\end{aligned}
$$

ahol felhasználtuk, hogy $1 + \omega + \omega^2 = 0$. Ezért, ha az $\{X_n : n \geqslant 1\}$ Markov-láncot a $\{(i - j) + (j - k)\omega + (k - i)\omega^2, i, j, k \in \mathbb{Z}\}$ fázistérrel tekintjük úgy egy újabb oszlop hozzáadása a mátrixhoz annak felel meg, hogy jelenlegi helyünkről a fentebb leírt 6 darab lehetséges irány valamelyikét választva mozdulunk el. Geometriailag egy 3 élhosszúságú hatszögrácson tekintett szimmetrikus véletlen bolyongásról van szó:



Az, hogy $a_n = b_n = c_n$ annak felel meg, hogy az n-edik lépésben a Markov-lánc az (x, x, x) állapotban van valamilyen $x \in \mathbb{N}$-re (amit beazonosítottunk a $0+0\cdot\omega+0\cdot\omega^2 = 0$ ponttal). Az, hogy $b_n = a_n + 1$, $c_n = a_n + 2$ annak felel meg, hogy az n-edik lépésben a Markov-lánc az $(x, x+1, x+2)$ állapotban vagy ennek valamilyen permutációjában van valamilyen $x \in \mathbb{N}$-re, amit pedig beazonosíthatunk a $(-1, 0, 1)$ állapottal ill. permutációival.

Jelölje C_n annak a valószínűségét, hogy az n-edik lépésben az origóban (a $0 \in \mathbb{R}^2$ pontban) van a Markov-lánc, A_n pedig annak a valószínűségét, hogy az n-edik lépésben az origó egy adott szomszédjában van a Markov-lánc (a korábban bevezetett hatszögrácsra gondolva). Mivel az origónak 6 szomszédja van, meg kell mutatni, hogy A_n jól definiált, azaz nem függ attól, hogy 0 mely szomszédját választjuk a hatszögrácsban. Ha $n = 1$, úgy igaz a dolog, ugyanis az, hogy az első lépésben az origó egy adott szomszédjában vagyunk annak felel meg, hogy az első alkalommal a megadott szomszédnak megfelelő $1, 2, 3$ sorrend kerül a mátrix első oszlopába. Legyen most $n > 1$ és tekintsük az origó egy tetszőlegesen rögzített szomszédját. A hatszögrácsban megadott hat lehetséges irány szerinti szimmetriát használjuk ki. Tekintve egy, az origóból ennek a megadott szomszédjába vezető utat, ehhez hozzárendelhetünk egy-egy, az origónak az öt másik szomszédjába vezető utat, forgatást használva. Ez a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű. Ezért $n > 1$ esetén is igaz az állítás.

A feladatban megfogalmazott állítás a fenti jelölésekkel: létezik olyan $n \geqslant 1995$, hogy

$$6A_n \geqslant 4C_n.$$

(A baloldalon azért szerepel $6A_n$, mert A_n annak a valószínűsége, hogy az origó egy adott szomszédjában vagyunk és számunkra az összes szomszéd jó.) Azaz, létezik olyan $n \geqslant 1995$, hogy

$$\frac{A_n}{C_n} \geqslant \frac{2}{3}.$$

Megmutatjuk most, hogy $C_{n+1} = A_n$. Valóban

$$\begin{aligned}
C_{n+1} = \sum_{i=1}^{6} & P(\text{az } n+1\text{-edik lépésben az origóban vagyunk} \\
& \mid \text{az } n\text{-edik lépésben az origónak az } i\text{-edik szomszédjában vagyunk}) \\
& \cdot P(\text{az } n\text{-edik lépésben az origónak az } i\text{-edik szomszédjában vagyunk}) \\
= \sum_{i=1}^{6} & \frac{1}{6} A_n = A_n.
\end{aligned}$$

Mivel $C_{n+1} = A_n$, azt kell megmutatni, hogy létezik olyan $n \geqslant 1995$, hogy

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} \geqslant \frac{2}{3}.$$

Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Ekkor minden $n > 1995$ esetén

$$A_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \frac{A_{n-1}}{A_{n-2}} \cdots \frac{A_{1996}}{A_{1995}} A_{1995} < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1995} A_{1995} = c\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

ahol $c > 0$ konstans.

Legyen $n = 6m > 1995$. Mivel minden egyes lépéskor a Markov-lánc a 6 lehetséges irányból egyenlő valószínűséggel választ, annak a valószínűsége, hogy a $6m$ lépés során mind a 6 lehetséges irányt ugyanannyiszor választjuk (m-szer)

$$\frac{(6m)!}{m!^6}\left(\frac{1}{6}\right)^{6m}.$$

A Stirling-formula alapján

$$\frac{(6m)!}{m!^6}\left(\frac{1}{6}\right)^{6m} \sim \frac{\left(\frac{6m}{e}\right)^{6m}\sqrt{2\pi 6m}}{\left(\frac{m}{e}\right)^{6m}(\sqrt{2\pi m})^6 6^{6m}} = \frac{\sqrt{6m}}{(\sqrt{2\pi})^5 m^3} = Cm^{-5/2},$$

ahol $C > 0$ konstans. Mivel

$$\frac{(6m)!}{(m!)^6}\left(\frac{1}{6}\right)^{6m} \leqslant A_{6m} < c\left(\frac{2}{3}\right)^{6m},$$

kapjuk, hogy

$$Cm^{-5/2} = \frac{Cm^{-5/2}}{\frac{(6m)!}{(m!)^6}\left(\frac{1}{6}\right)^{6m}}\frac{(6m)!}{(m!)^6}\left(\frac{1}{6}\right)^{6m} < \frac{Cm^{-5/2}}{\frac{(6m)!}{(m!)^6}\left(\frac{1}{6}\right)^{6m}}c\left(\frac{2}{3}\right)^{6m}.$$

A Stirling-formula alapján

$$\lim_{m\to\infty}\frac{Cm^{-5/2}}{\frac{(6m)!}{(m!)^6}\left(\frac{1}{6}\right)^{6m}} = 1,$$

így minden elegendően nagy m-re

$$m^{-5/2} < K\left(\frac{2}{3}\right)^{6m} \qquad\Longleftrightarrow\qquad 1 < K\left(\frac{2}{3}\right)^{6m} m^{5/2},$$

valamilyen $K > 0$ konstanssal. Mivel

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{6m} m^{5/2} = \lim_{m\to\infty}\frac{m^{5/2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{6m}} = \lim_{m\to\infty}\frac{\frac{5}{2}m^{3/2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{6m}\log(3/2)} = \cdots = 0,$$

kapjuk, hogy ha m elég nagy, úgy nem igaz, hogy

$$1 < K\left(\frac{2}{3}\right)^{6m} m^{5/2}.$$

Ezért ellentmondásra jutottunk. Az is látszik a bizonyításból, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n(\varepsilon) \geqslant 1995$, hogy

$$P(b_{n(\varepsilon)} = a_{n(\varepsilon)} + 1, c_{n(\varepsilon)} = a_{n(\varepsilon)} + 2) \geqslant (6 - \varepsilon)P(a_{n(\varepsilon)} = b_{n(\varepsilon)} = c_{n(\varepsilon)}).$$

$\square$

9.5. Feladat. [Durrett [2], 121. old.] Legyen $\{X_n : n \geqslant 0\}$ egy olyan $\{0, 1, \ldots, N\}$ fázisterű Markov-lánc, mely egyben martingál is. Mutassuk meg, hogy a 0 és az N elnyelő állapotok, azaz $p_{0,0} = 1$ és $p_{N,N} = 1$.

Megoldás. Legyen $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, $n \geqslant 0$. Ekkor a martingálság miatt

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{9.1}$$

Mivel $\{X_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc, ezért egy tanult tétel szerint minden $g : I \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre $\mathbb{E}(g(X_n) \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(g(X_n) \,|\, X_{n-1})$. Mivel jelen esetben $I = \{0, 1, \ldots, N\}$, ezért minden valós értékű függvény korlátos I-n, speciálisan a $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) := x$ identikus függvény is. Így

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, X_n), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{9.2}$$

Ezért (9.1) és (9.2) alapján

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, X_n) = X_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Így

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, X_n = i) = i, \quad i = 0, \ldots, N, \ \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Ezt felhasználva

$$0 = \mathbb{E}(X_1 \,|\, X_0 = 0) = \sum_{i=0}^{N} i P(X_1 = i \,|\, X_0 = 0),$$

ezért minden $i = 1, \ldots, N$-re $P(X_1 = i \,|\, X_0 = 0) = 0$, és így $P(X_1 = 0 \,|\, X_0 = 0) = 1$, azaz $p_{0,0} = 1$. Mivel

$$N = \mathbb{E}(X_1 \,|\, X_0 = N) = \sum_{i=0}^{N} i P(X_1 = i \,|\, X_0 = N) \leqslant N \sum_{i=0}^{N} P(X_1 = i \,|\, X_0 = N) = N,$$

és egyenlőség az utolsó egyenlőtlenségben akkor és csak akkor áll fenn, ha $P(X_1 = N \,|\, X_0 = N) = 1$ és $P(X_1 = i \,|\, X_0 = N) = 0, \, i = 0, \ldots, N-1$, kapjuk, hogy $p_{N,N} = 1$. $\square$

9.6. Feladat. Adjunk példát olyan $\{X_n : n \geqslant 0\}$ sztochasztikus folyamatra, mely

(i) martingál, de nem Markov-folyamat!

(ii) Markov-folyamat, de nem martingál!

(iii) martingál és Markov-folyamat is!

Megoldás.

(i): Legyen $\phi_0 := 0$ és ϕ_n, $n \geqslant 1$, független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy

$$P(\Phi_1 = 1) = P(\Phi_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

Legyen továbbá,

$$\begin{aligned} Y_n &:= \sum_{i=1}^{n} \phi_i \mathbb{1}_{\{\phi_{i-1} > 1\}}, \quad n \geqslant 1, \\ \mathcal{F}_n^{\phi} &:= \sigma(\phi_1, \ldots, \phi_n), \quad n \geqslant 1, \\ \mathcal{F}_n^{Y} &:= \sigma(Y_1, \ldots, Y_n), \quad n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Ekkor $\{Y_n : n \geqslant 1\}$ martingál, ugyanis Y_n $\mathcal{F}_n^Y$-mérhető, $\mathbb{E}|Y_n| < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ és mivel $\mathcal{F}_n^Y \subseteq \mathcal{F}_n^\phi$ kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^Y) &= \mathbb{E}(Y_n + \phi_{n+1}\mathbb{1}_{\{\phi_n>1\}} \,|\, \mathcal{F}_n^Y) = Y_n + \mathbb{E}(\phi_{n+1}\mathbb{1}_{\{\phi_n>1\}} \,|\, \mathcal{F}_n^Y) \\
&= Y_n + \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\phi_{n+1}\mathbb{1}_{\{\phi_n>1\}} \,|\, \mathcal{F}_n^\phi) \,|\, \mathcal{F}_n^Y\Big) \\
&= Y_n + \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{\phi_n>1\}}\mathbb{E}(\phi_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^\phi) \,|\, \mathcal{F}_n^Y\Big) \\
&= Y_n + \mathbb{E}\Big(\big(\mathbb{E}(\phi_{n+1})\big)\mathbb{1}_{\{\phi_n>1\}} \,|\, \mathcal{F}_n^Y\Big) \\
&= Y_n + \mathbb{E}(\phi_{n+1}) \cdot \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{\phi_n>1\}} \,|\, \mathcal{F}_n^Y\big) = Y_n,
\end{aligned}$$

hiszen $\mathbb{E}\phi_{n+1} = 0$.

Megmutatjuk, hogy $\{Y_n : n \geqslant 1\}$ nem Markov-folyamat. Ehhez elég azt leellenőrizni például, hogy

$$P(Y_4 = -2 \,|\, Y_3 = -1, Y_2 = -1) \neq P(Y_4 = -2 \,|\, Y_3 = -1).$$

Ekkor

$$Y_2 = \Phi_2\mathbb{1}_{\{\Phi_1=1\}} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \Phi_1 = \Phi_2 = 1, \\ -1 & \text{ha } \Phi_1 = 1,\, \Phi_2 = -1, \\ 0 & \text{ha } \Phi_1 = -1, \end{cases}$$

illetve

$$Y_3 = \Phi_2\mathbb{1}_{\{\Phi_1=1\}} + \Phi_3\mathbb{1}_{\{\Phi_2=1\}} = \begin{cases} 2 & \text{ha } \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 1, \\ 0 & \text{ha } \Phi_1 = \Phi_2 = 1,\, \Phi_3 = -1 \text{ vagy } \Phi_1 = \Phi_2 = -1, \\ -1 & \text{ha } \Phi_1 = 1,\, \Phi_2 = -1 \text{ vagy } \Phi_1 = -1,\, \Phi_2 = 1,\, \Phi_3 = -1, \\ 1 & \text{ha } \Phi_1 = -1,\, \Phi_2 = \Phi_3 = 1. \end{cases}$$

Hasonlóan, $Y_4 = \Phi_2\mathbb{1}_{\{\Phi_1=1\}} + \Phi_3\mathbb{1}_{\{\Phi_2=1\}} + \Phi_4\mathbb{1}_{\{\Phi_3=1\}}$ alapján

$$\begin{aligned}
&Y_4 = 3 \quad \text{ha } \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = 1, \\
&Y_4 = 1 \quad \text{ha } \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 1,\, \Phi_4 = -1 \text{ vagy } \Phi_1 = \Phi_2 = -1,\, \Phi_3 = \Phi_4 = 1, \\
&Y_4 = 0 \quad \text{ha } \Phi_1 = \Phi_2 = 1,\, \Phi_3 = -1 \text{ vagy } \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = -1 \\
&\qquad\quad \text{vagy } \Phi_1 = 1,\, \Phi_2 = -1,\, \Phi_3 = \Phi_4 = 1 \text{ vagy } \Phi_1 = -1,\, \Phi_2 = \Phi_3 = 1,\, \Phi_4 = -1, \\
&Y_4 = -2 \quad \text{ha } \Phi_1 = 1,\, \Phi_2 = -1,\, \Phi_3 = 1,\, \Phi_4 = -1, \\
&Y_4 = -1 \quad \text{ha } \Phi_1 = 1,\, \Phi_2 = \Phi_3 = -1 \text{ vagy } \Phi_1 = -1,\, \Phi_2 = 1,\, \Phi_3 = -1 \\
&\qquad\quad \text{vagy } \Phi_1 = \Phi_2 = -1,\, \Phi_3 = 1,\, \Phi_4 = -1, \\
&Y_4 = 2 \quad \text{ha } \Phi_1 = -1,\, \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = 1.
\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}
&P(Y_4 = -2 \,|\, Y_3 = -1)\\
&= P\Big(\Phi_1 = 1, \Phi_2 = -1, \Phi_3 = 1, \Phi_4 = -1 \,\Big|\, \{\Phi_1 = 1, \Phi_2 = -1\} \cup \{\Phi_1 = -1, \Phi_2 = 1, \Phi_3 = -1\}\Big)\\
&= \frac{P(\Phi_1 = 1, \Phi_2 = -1, \Phi_3 = 1, \Phi_4 = -1)}{P(\Phi_1 = 1, \Phi_2 = -1) + P(\Phi_1 = -1, \Phi_2 = 1, \Phi_3 = -1)} = \frac{1/16}{1/4 + 1/8} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Hasonlóan,

$$\begin{aligned}
&P(Y_4 = -2 \,|\, Y_3 = -1, Y_2 = -1)\\
&= P\Big(\Phi_1 = 1, \Phi_2 = -1, \Phi_3 = 1, \Phi_4 = -1 \,\Big|\, \big(\{\Phi_1 = 1, \Phi_2 = -1\} \cup \{\Phi_1 = -1, \Phi_2 = 1, \Phi_3 = -1\}\big)\\
&\qquad\qquad \cap \{\Phi_1 = 1, \Phi_2 = -1\}\Big)\\
&= P(\Phi_1 = 1, \Phi_2 = -1, \Phi_3 = 1, \Phi_4 = -1 \,|\, \Phi_1 = 1, \Phi_2 = -1)\\
&= \frac{P(\Phi_1 = 1, \Phi_2 = -1, \Phi_3 = 1, \Phi_4 = -1)}{P(\Phi_1 = 1, \Phi_2 = -1)} = \frac{1/16}{1/4} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Ezért

$$P(Y_4 = -2 \,|\, Y_3 = -1, Y_2 = -1) \neq P(Y_4 = -2 \,|\, Y_3 = -1).$$

(ii): Mivel minden független növekményű folyamat Markov-folyamat, kapjuk, hogy egy (m, σ^2)-paraméterű standard Wiener-folyamat Markov-folyamat. Viszont nem lesz martingál, mert ha az lenne, akkor várható érték függvénye konstans lenne, azonban $\mathbb{E}W_t = m \cdot t$, $t \geqslant 0$, ami nem konstans. Ez egy folytonos idejű példa.

Az alábbiakban tekintünk egy diszkrét idejű példát is. Legyen $\{X_n : n \geqslant 0\}$ egy homogén Markov-lánc, melynek fázistere $\{0, 1\}$, átmenetvalószínűségi mátrixa

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \ \ 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array},$$

és kezdeti eloszlása $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 1) = 1/2$. Ha $\{X_n : n \geqslant 0\}$ martingál lenne, akkor $\mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}X_1$ kell legyen. Ekkor $\mathbb{E}X_0 = 1/2$ és

$$\begin{aligned}
P(X_1 = 0) &= P(X_1 = 0 \,|\, X_0 = 0)P(X_0 = 0) + P(X_1 = 0 \,|\, X_0 = 1)P(X_0 = 1)\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\\
P(X_1 = 1) &= P(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 0)P(X_0 = 0) + P(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 1)P(X_0 = 1)\\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Ezért $\mathbb{E}X_1 = 1/3 + 1/4 = 7/12$, és így $\mathbb{E}X_0 \neq \mathbb{E}X_1$. Tehát $\{X_n : n \geqslant 0\}$ nem martingál.

Az alábbiakban tekintünk egy újabb diszkrét idejű példát is. Legyenek ξ_n, $n \geqslant 1$, olyan független azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy

$$P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = 0) = \frac{1}{2}.$$

Legyen minden $n \geqslant 1$ esetén $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$ és $\mathcal{F}_n^\xi := \sigma(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Ekkor mivel $\{S_n : n \geqslant 1\}$ független növekményű folyamat, Markov-folyamat is, s mivel az idő diszkrét Markov-lánc is. Azonban nem martingál $\{S_n : n \geqslant 1\}$. Ugyanis, bevezetve az $\mathcal{F}_n^S := \sigma(S_1, \ldots, S_n)$, $n \geqslant 1$, jelölést kapjuk, hogy $\mathcal{F}_n^S \subseteq \mathcal{F}_n^\xi$ miatt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^S) &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^\xi) \,|\, \mathcal{F}_n^S\big) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(S_n \,|\, \mathcal{F}_n^\xi) + \mathbb{E}(\xi_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^\xi) \,|\, \mathcal{F}_n^S\big) \\ &= \mathbb{E}(S_n + \mathbb{E}\xi_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^S) = S_n + \mathbb{E}\xi_{n+1} = S_n + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Így nem teljesül az $\mathbb{E}(S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^S) = S_n$, $n \in \mathbb{N}$, összefüggés, azaz $\{S_n : n \geqslant 1\}$ nem martingál.

(iii): Egy standard Wiener-folyamat martingál és Markov-folyamat is. Ez folytonos idejű példa. Diszkrét idejű példa: $X_n \equiv 0$, $n \geqslant 0$. □

9.7. Példa. (Hosszú memóriájú folyamat) Legyenek X_n, $n \geqslant 1$, független p-paraméterű Bernoulli eloszlású valószínűségi változók. Legyen $R_{-1}^1 = R_0^1 := 0$ és minden $n \geqslant 1$-re

$$R_n^1 := R_{n-1}^1 + R_{n-2}^1 + X_n.$$

Látható, hogy

$$R_n^1 = f_n X_1 + f_{n-1} X_2 + \cdots + f_2 X_{n-1} + f_1 X_n, \qquad n \geqslant 1,$$

ahol f_n az n-edik Fibonacci-szám ($f_1 = f_2 = 1$). Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R_n^1 \,|\, R_{n-1}^1, R_{n-2}^1) &= \mathbb{E}(R_n^1 \,|\, \sigma(R_{n-1}^1, R_{n-2}^1)) = R_{n-1}^1 + R_{n-2}^1 + \mathbb{E}(X_n \,|\, \sigma(R_{n-1}^1, R_{n-2}^1)) \\ &= R_{n-1}^1 + R_{n-2}^1 + \mathbb{E}(X_n) = R_{n-1}^1 + R_{n-2}^1 + p,\end{aligned}$$

ugyanis R_{n-1}^1 és R_{n-2}^1 $\sigma(R_{n-1}^1, R_{n-2}^1)$-mérhető és X_n független $\sigma(R_{n-1}^1, R_{n-2}^1)$-től (valóban, R_n^1 csak $X_1, X_2, \ldots, X_n$-től függ).

Megmutatjuk, hogy $\{R_n : n \geqslant 1\}$ nem Markov-lánc, két különböző módon is. Elsőnek leellenőrizzük, hogy $\mathbb{E}(R_3^1 \,|\, R_1^1, R_2^1) \neq \mathbb{E}(R_3^1 \,|\, R_2^1)$, amiből következik, hogy $\{R_n : n \geqslant 1\}$ nem Markov-lánc. Ekkor

$$\mathbb{E}(R_3^1 \,|\, R_2^1) = \mathbb{E}(2X_1 + X_2 + X_3 \,|\, X_1 + X_2) = X_1 + X_2 + p + \mathbb{E}(X_1 \,|\, X_1 + X_2).$$

Mivel $\mathbb{E}(X_1 \,|\, X_1 + X_2 = k) = P(X_1 = 1 \,|\, X_1 + X_2 = k)$, $k = 0, 1, 2$, és

$$\begin{aligned}P(X_1 = 1 \,|\, X_1 + X_2 = 0) &= \frac{P(X_1 = 1, X_1 + X_2 = 0)}{P(X_1 + X_2 = 0)} = \frac{P(X_1 = 1, X_1 = 0, X_2 = 0)}{P(X_1 = 0, X_2 = 0)} = 0, \\ P(X_1 = 1 \,|\, X_1 + X_2 = 1) &= \frac{P(X_1 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0) + P(X_1 = 1, X_1 = 0, X_2 = 1)}{P(X_1 = 1, X_2 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 1)} \\ &= \frac{p(1-p) + 0}{p(1-p) + (1-p)p} = \frac{1}{2}, \\ P(X_1 = 1 \,|\, X_1 + X_2 = 2) &= \frac{P(X_1 = 1, X_1 = 1, X_2 = 1)}{P(X_1 = 1, X_2 = 1)} = 1,\end{aligned}$$

kapjuk, hogy $\mathbb{E}(X_1 \mid X_1 + X_2) = (X_1 + X_2)/2$. Ezért

$$\mathbb{E}(R_3^1 \mid R_2^1) = \frac{3}{2}(X_1 + X_2) + p.$$

Mivel a korábbiak alapján

$$\mathbb{E}(R_3^1 \mid R_1^1, R_2^1) = R_1^1 + R_2^1 + p = X_1 + X_1 + X_2 + p = 2X_1 + X_2 + p,$$

kapjuk, hogy $\mathbb{E}(R_3^1 \mid R_1^1, R_2^1) \neq \mathbb{E}(R_3^1 \mid R_2^1)$.

A következőkben azt ellenőrizzük le, hogy

$$P(R_3^1 = 2 \mid R_2^1 = 1, R_1^1 = 1) \neq P(R_3^1 = 2 \mid R_2^1 = 1),$$

amiből szintén következik, hogy $\{R_n : n \geqslant 1\}$ nem Markov-lánc. Ekkor

$$P(R_3^1 = 2 \mid R_2^1 = 1) = \frac{P(R_3^1 = 2, R_2^1 = 1)}{P(R_2^1 = 1)},$$

ahol felhasználva, hogy $R_2^1 = X_1 + X_2$ és $R_3^1 = 2X_1 + X_2 + X_3$,

$$\begin{aligned}
P(R_3^1 = 2, R_2^1 = 1) &= P(R_3^1 = 2, R_2^1 = 1, X_1 = 0) + P(R_3^1 = 2, R_2^1 = 1, X_1 = 1)\\
&= P(X_3 = 1, X_2 = 1, X_1 = 0) + P(X_3 = 0, X_2 = 0, X_1 = 1)\\
&= p^2(1-p) + p(1-p)^2 = p(1-p),
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
P(R_2^1 = 1) &= P(R_2^1 = 1, X_1 = 0) + P(R_2^1 = 1, X_1 = 1)\\
&= P(X_1 = 0, X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 0) = 2p(1-p).
\end{aligned}$$

Így

$$P(R_3^1 = 2 \mid R_2^1 = 1) = \frac{p(1-p)}{2p(1-p)} = \frac{1}{2}.$$

Hasonlóan,

$$\begin{aligned}
P(R_3^1 = 2 \mid R_2^1 = 1, R_1^1 = 1) &= \frac{P(R_3^1 = 2, R_2^1 = 1, R_1^1 = 1)}{P(R_2^1 = 1, R_1^1 = 1)}\\
&= \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0)}{P(X_1 = 1, X_2 = 0)} = \frac{p(1-p)^2}{p(1-p)} = 1 - p.
\end{aligned}$$

Ha $p \neq 1/2$, úgy $P(R_3^1 = 2 \mid R_2^1 = 1, R_1^1 = 1) \neq P(R_3^1 = 2 \mid R_2^1 = 1)$. Azaz $p \neq 1/2$ esetén kapjuk, hogy $\{R_n : n \geqslant 1\}$ nem Markov-lánc. (Az első indoklás a $p = 1/2$ esetben is adja, hogy $\{R_n : n \geqslant 1\}$ nem Markov-lánc.)

Az alábbiakban a fázisteret megnagyobbítva előállítunk egy olyan 2-dimenziós Markov-láncot, melynek egyik koordináta-folyamata $\{R_n : n \geqslant 1\}$. Legyen $\widetilde{R}_n := (R_n^1, R_{n-1}^1)$,

$n \geqslant 1$. Ekkor $\{\widetilde{R}_n : n \geqslant 1\}$ egy olyan sztochasztikus folyamat, melynek fázistere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, és az $\widetilde{R}_n := (R_n^{(1)}, R_n^{(2)})$, $n \geqslant 1$ jelöléssel élve,

$$\begin{aligned} R_n^{(1)} &= R_n^1 = R_{n-1}^1 + R_{n-2}^1 + X_n = R_{n-1}^{(1)} + R_{n-1}^{(2)} + X_n, \\ R_n^{(2)} &= R_{n-1}^1 = R_{n-1}^{(1)}. \end{aligned}$$

Megmutatjuk most, hogy $\{\widetilde{R}_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc. Végiggondoljuk, hogy $\widetilde{R}_{n+1}$-et egyértelműen meghatározza $\widetilde{R}_n$ és X_{n+1}. Valóban,

$$\widetilde{R}_{n+1} = (R_{n+1}^1, R_n^1) = (R_n^1 + R_{n-1}^1 + X_{n+1}, R_n^1),$$

így, ha $\widetilde{R}_n = (R_n^1, R_{n-1}^1) = (i, j)$, úgy $\widetilde{R}_{n+1} = (i + j + X_{n+1}, i)$. Ezért $\{\widetilde{R}_n : n \geqslant 1\}$ Markov-lánc és az egylépéses átmenetvalószínűségek:

$$\begin{aligned} P\big(\widetilde{R}_{n+1} = (i+j, i) \,|\, \widetilde{R}_n = (i,j)\big) &= P(X_{n+1} = 0) = 1 - p, \\ P\big(\widetilde{R}_{n+1} = (i+j+1, i) \,|\, \widetilde{R}_n = (i,j)\big) &= P(X_{n+1} = 1) = p, \end{aligned} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ezen példa tanulsága lehet az is, hogy egy többdimenziós fázisterű Markov-láncnak a koordináta-folyamatai általában nem Markov-láncok. □

9.8. Példa. Egy diszkrét idejű Markov-lánc definíciója úgy is megfogalmazható, hogy *„a múlt és a jövő feltételesen független a jelenre nézve”* (angolul „given the present, the future is conditionally independent from the past”). Most ezt a dolgot járjuk körül. Legyenek Y_1, Y_2 és Y_3 valószínűségi változók. Azt mondjuk, hogy Y_1 feltételesen független Y_3-tól az Y_2 feltételre nézve, ha tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(Y_1 < a, Y_3 < b \,|\, Y_2) = P(Y_1 < a \,|\, Y_2) P(Y_3 < b \,|\, Y_2) \quad \text{P-m.m.}$$

Ez azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos, mérhető függvényekre

$$\mathbb{E}(f(Y_1) g(Y_3) \,|\, Y_2) = \mathbb{E}(f(Y_1) \,|\, Y_2) \mathbb{E}(g(Y_3) \,|\, Y_2) \quad \text{P-m.m.}$$

Legyenek a továbbiakban $X_1, X_2 \ldots$ valószínűségi változók, n, $k \in \mathbb{N}$ rögzítettek és $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ korlátos, mérhető függvények. Legyen

$$Y_1 := f(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}), \quad Y_2 := X_n, \quad Y_3 := g(X_{n+1}, \ldots, X_{n+k}).$$

Ekkor Y_1, Y_2 és Y_3 interpretálható múlt, jelen és jövőként. Ha $\{X_n : n \geqslant 0\}$ Markov-lánc, akkor

$$\mathbb{E}(Y_1 Y_3 \,|\, Y_2) = \mathbb{E}(Y_1 \,|\, Y_2) \mathbb{E}(Y_3 \,|\, Y_2) \quad \text{P-m.m,}$$

és ez fejezi ki azt, hogy a múlt és a jövő feltételesen független a jelenre nézve. □

9.9. Feladat. Legyenek ξ_n, $n \geqslant 1$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy ξ_1 nem elfajult (azaz nem létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $P(\xi_1 = c) = 1$) és ξ_1 karakterisztikus függvénye seholsem 0. Legyen $S_0 := 0$ és $S_n := \sum_{k=1}^n \xi_k$, $n \geqslant 1$. Mutassuk meg, hogy S_3 feltételesen független S_1-től az S_2 feltétel mellett, de S_3 nem független S_1-től!

Megoldás. A ξ_1-re vonatkozó nem-elfajultsági feltétel szükséges, hiszen, ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $P(\xi_1 = c) = P(\xi_2 = c) = P(\xi_3 = c) = 1$, úgy $P(S_1 = c) = P(S_2 = 2c) = P(S_3 = 3c) = 1$. Így S_1 és S_3 függetlenek lennének.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy ξ_1 nem elfajult. Először megmutatjuk, hogy S_3 és S_1 nem függetlenek. Mivel $S_1 = \xi_1$, $S_3 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = S_1 + \xi_2 + \xi_3$, kapjuk, hogy ha S_3 és S_1 függetlenek lennének, úgy

$$\mathbb{E}e^{i(uS_1+vS_3)} = \mathbb{E}e^{iuS_1}\mathbb{E}e^{ivS_3}, \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

Azaz fennállna, hogy

$$\mathbb{E}e^{i((u+v)\xi_1+v(\xi_2+\xi_3))} = \mathbb{E}e^{iu\xi_1}\mathbb{E}e^{iv(\xi_1+\xi_2+\xi_3)}, \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

Felhasználva, hogy ξ_1, ξ_2 és ξ_3 függetlenek, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}e^{i(u+v)\xi_1}\mathbb{E}e^{iv\xi_2}\mathbb{E}e^{iv\xi_3} = \mathbb{E}e^{iu\xi_1}\mathbb{E}e^{iv\xi_1}\mathbb{E}e^{iv\xi_2}\mathbb{E}e^{iv\xi_3}, \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

Ha φ_ξ jelöli egy ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét, úgy

$$\varphi_{\xi_1}(u+v)\varphi_{\xi_2}(v)\varphi_{\xi_3}(v) = \varphi_{\xi_1}(u)\varphi_{\xi_1}(v)\varphi_{\xi_2}(v)\varphi_{\xi_3}(v), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Mivel ξ_1, ξ_2 és ξ_3 azonos eloszlású és φ_{ξ_1} seholsem 0, kapjuk, hogy

$$\varphi_{\xi_1}(u+v) = \varphi_{\xi_1}(u)\varphi_{\xi_1}(v), \quad u,\ v \in \mathbb{R}.$$

Így $|\varphi_{\xi_1}|$-re teljesül az exponenciális Cauchy-egyenlet. Felhasználva, hogy $|\varphi_{\xi_1}|$ folytonos és $|\varphi_{\xi_1}|(0) = 1$, kapjuk, hogy létezik olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy $|\varphi_{\xi_1}|(t) = e^{at}$, $t \in \mathbb{R}$. Felhasználva, hogy $|\varphi_{\xi_1}(t)| \leqslant 1, t \in \mathbb{R}$, kapjuk, hogy $a = 0$, azaz $|\varphi_{\xi_1}(t)| = 1, t \in \mathbb{R}$. Ismert, hogy ez azt vonja maga után, hogy ξ_1 elfajult, azaz ellentmondásra jutottunk. Ezért S_3 és S_1 nem függetlenek.

Ahhoz, hogy S_3 feltételesen független S_1-től az S_2 feltétel mellett azt kell leellenőrizni, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(S_1 < a, S_3 < b \,|\, S_2) = P(S_1 < a \,|\, S_2)P(S_3 < b \,|\, S_2) \qquad \text{P-m.m.}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} P(S_1 < a \,|\, S_2) &= P(S_2 - \xi_2 < a \,|\, S_2) = P(\xi_2 > S_2 - a \,|\, S_2), \\ P(S_3 < b \,|\, S_2) &= P(S_2 + \xi_3 < b \,|\, S_2) = P(\xi_3 < b - S_2 \,|\, S_2), \end{aligned}$$

illetve

$$P(S_1 < a, S_3 < b \,|\, S_2) = P(S_2 - \xi_2 < a, \xi_3 < b - S_2 \,|\, S_2).$$

Továbbá

$$\begin{aligned} P(S_1 < a, S_3 < b \,|\, S_2) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{S_1<a,S_3<b\}} \,|\, S_2) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{S_2-\xi_2<a,\xi_3<b-S_2\}} \,|\, S_2) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{S_2-\xi_2<a\}}\mathbb{1}_{\{\xi_3<b-S_2\}} \,|\, S_2) \\ &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{S_2-\xi_2<a\}}\mathbb{1}_{\{\xi_3<b-S_2\}} \,|\, \sigma(S_2,\xi_2)\big)\Big|S_2\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{S_2-\xi_2<a\}}\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{\xi_3<b-S_2\}} \,|\, \sigma(S_2,\xi_2)\big)\Big|S_2\Big). \end{aligned}$$

Felhasználva azt, hogy ha ξ és η függetlenek és $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan mérhető függvény, melyre $\mathbb{E}|g(\xi,\eta)| < +\infty$, akkor

$$\mathbb{E}(g(\xi,\eta)\,|\,\eta = y) = \mathbb{E}g(\xi, y) \qquad P_\eta\text{-m.m. } y\in\mathbb{R},$$

kapjuk, hogy P_{S_2}-m.m. $x\in\mathbb{R}$ és P_{ξ_2}-m.m. $y\in\mathbb{R}$ esetén

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{\xi_3<b-S_2\}}\,|\,S_2 = x, \xi_2 = y\Big) = P(\xi_3 < b - x),$$

és így

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{\xi_3<b-S_2\}}\,|\,\sigma(S_2,\xi_2)\Big) = P(\xi_3 < b - S_2) \qquad \text{P-m.m.}$$

Ezért

$$\begin{aligned}P(S_1 < a, S_3 < b\,|\,S_2) &= P(\xi_3 < b - S_2)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{S_2-\xi_2<a\}}\,|\,S_2)\\ &= P(\xi_3 < b - S_2)P(S_2 - \xi_2 < a\,|\,S_2) \qquad \text{P-m.m.}\end{aligned}$$

Az előző levezetésből az is látszik, hogy

$$P(\xi_3 < b - S_2) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\xi_3<b-S_2\}}\,|\,S_2) = P(\xi_3 < b - S_2\,|\,S_2) \qquad \text{P-m.m.}$$

Így kapjuk, hogy

$$P(S_1 < a, S_3 < b\,|\,S_2) = P(\xi_3 < b - S_2\,|\,S_2)P(\xi_2 > S_2 - a\,|\,S_2) \qquad \text{P-m.m.,}$$

és pontosan ezt kellett belátni. □

9.10. Feladat. Egy baktérium törzs minden tagja egy óra leteltével vagy elpusztul vagy pedig kettéosztódik. Ha az osztódás valószínűsége $p\in(0,1)$, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy egy kiszemelt baktérium leszármazottai sohasem halnak ki? (Ez a KÖMAL B3521-es feladata volt.)

1. Megoldás. (A KÖMAL mintamegoldása). Jelöljön A egy kiszemelt baktériumot, és feltéve, hogy kettéosztódik, a közvetlen leszármazottjait jelölje B és C. Legyen x annak a valószínűsége, hogy A leszármazottai sohasem halnak ki. Feltéve, hogy B és C létrejött, jelölje y annak a valószínűségét, hogy vagy B, vagy C leszármazottai nem halnak ki; ekkor $x = py$. Ha már B és C létrejött, akkor annak a valószínűsége, hogy B leszármazottai nem halnak ki, x-szel egyenlő, és ugyanennyi annak a valószínűsége is, hogy C leszármazottai nem halnak ki. Annak a valószínűsége pedig, hogy sem B, sem C leszármazottai nem halnak ki, ezen események függetlenségét feltételezve, x^2-tel egyenlő. Ezért $y = x + x - x^2$, és így $x = p(2x - x^2)$. Ezért x értéke vagy 0, vagy $2 - 1/p$. Ha $0 < p \leqslant 1/2$, úgy $2 - 1/p \leqslant 0$. Felhasználva, hogy $0 \leqslant x \leqslant 1$ kell legyen, kapjuk, hogy $x = 0$. Ha $1/2 < p < 1$, úgy $0 < 2 - 1/p < 1$, így ekkor az $x = 0$ ill. $x = 2 - 1/p$ gyök is szóba jöhet. Ismert viszont, hogy a ,,túlélés" valószínűsége a szóban forgó másodfokú egyenlet $[0,1]$-be eső nagyobbik gyöke (lásd, pl., Durrett [2], 78. old.), azaz $1/2 < p < 1$ esetén $x = 2 - 1/p$.

2. Megoldás. Jelölje ρ a kihalás valószínűségét. Fogalmazhatunk úgy is, hogy egy kiszemelt baktériumnak, A-nak, a leszármazottai alkotják az első generációt. Így az első generációban p valószínűséggel 2 egyed van, ill. $1-p$ valószínűséggel 0 egyed van. Feltételezve, hogy az első generációban 2 egyed van, A családfája akkor hal ki, ha mindkét leszármazottjának kihal a családfája. Ezen eset valószínűsége ρ^2. Abban az esetben, mikor az első generációban 0 egyed van, A családfája már kihalt. Így $\rho = p\rho^2 + (1-p)$. Ezt az egyenletet megoldva

$$\rho_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2p}.$$

Így $\rho_1 = 1$ és $\rho_2 = (1-p)/p$. Durrett [2], 78. oldala alapján a ρ kihalási valószínűség a $\rho = p\rho^2 + (1-p)$ egyenlet $[0,1]$-be eső kisebbik gyöke.

Ha $0 < p \leqslant 1/2$, úgy $\rho_2 \geqslant 1 = \rho_1$, és így a kihalás valószínűsége $\rho = 1$. Azaz a túlélés valószínűsége 0.

Ha $1/2 < p < 1$, úgy $\rho_2 < 1 = \rho_1$, és így a kihalás valószínűsége $\rho = -1 + 1/p$. Azaz a túlélés valószínűsége $2 - 1/p$. $\square$

Hivatkozások

[1] K. L. Chung, Markov chains with stationary transition probabilities. Springer, 1960.

[2] R. Durrett, Essentials of stochastic processes. Springer, 1999.

[3] G. Grimmett and D. Stirzaker, Probability and Random Processes. Clarendon Press, Oxford, 1982.

[4] V. Pozdnyakov and M. Kulldorff, Waiting times of patterns and a method of gambling teams. *The American Mathematical Monthly* **113**, 134–143, (2006).

[5] S-Y. R. Li, A martingale approach to the study of occurrences of sequence patterns in repeated experiments. *The Annals of Probability* **8**(6), 1171–1176, (1980).

[6] Pap Gyula, Sztochasztikus Folyamatok, 2005.

[7] S. M. Ross, Introduction to Probability modelds, Fourth Edition. Academic Press, New York London, 1989.

[8] A. N. Shiryaev, *Probability (Second Edition)*, Springer, 1996.

[9] B. A. Szevasztyanov, V. P. Csisztyakov és A. M. Zubkov, *Valószínűségelméleti feladatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

[10] Szűcs Gábor, *Sztochasztikus folyamatok műszaki informatikusoknak*, `http://www.math.u-szeged.hu/ szucsg/sztochmi.html`

[11] D. Williams, *Probability with martingales,* Cambridge Mathematical Textbooks, 1991.