Gáll József

Pap Gyula

BEVEZETÉS A HASZNOSSÁGALAPÚ PORTFÓLIÓ-MENEDZSMENTBE

EGYETEMI JEGYZET

mobiDIÁK könyvtár

Debreceni Egyetem

Informatikai Intézet

mobiDIÁK könyvtár

SOROZATSZERKESZTŐ

Fazekas István

mobiDIÁK könyvtár

Debreceni Egyetem

Informatikai Intézet

4010 Debrecen, Pf. 12.

http://mobidiak.inf.unideb.hu

A mű a *A mobiDIÁK önszervező mobil portál* (IKTA, OMFB-00373/2003) és a *GNU Iterátor, a legújabb generációs portál szoftver* (ITEM, 50/2003) projektek keretében készült.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az elmúlt néhány évtizedben az ökonometria, s különösen a pénzügyi matematika látványos fejlődésen ment keresztül. A portfóliók menedzsmentjének problémái, a bizonytalan körülmények közötti döntéshozatal kérdéskörei fontos szerepet játszottak és játszanak ma is az ökonometria gyakorlati és elméleti területein egyaránt.

A pénzügy és pénzügyi matematika elméletének egyik klasszikus problémája az optimális portfólió kiválasztása. Tekintsünk egy értékpapírpiacot, ahol különböző értékpapírokkal lehet kereskedni, mint például kötvényekkel, részvényekkel, future és opciós szerződésekkel. Tegyük fel, hogy adott egy piaci szereplő, aki egy bizonyos tőkemennyiséget birtokol, és szeretné azt a piacon befektetni értékpapírokba. Természetesen a tőkéjét számos módon lehet allokálnia a papírok között. Egyes allokációk, azaz portfóliók, más portfólióknál ígéretesebbek lehetnek (például abban az értelemben, hogy nagy a jövőbeli várható hozamuk), míg egyes portfóliók pedig kevésbé kockázatosak lehetnek (például azért, mert alacsony szórással rendelkeznek).

Ekkor számos kérdés merül fel természetesen módon. Melyik portfóliót fogja a piac egy szereplője választani? Mi a különbség az egyes szereplők döntéshozatalában és mivel magyarázható ez? Milyen eszközök és mértékek segítségével lehetne karakterizálni az egyének döntéshozatalát és kockázattal szembeni viselkedését ilyen körülmények között? Ezen jegyzetben a fenti kérdésekkel és azokkal kapcsolatos egyéb problémákkal kívánunk foglalkozni az irodalomban ismert eredményeket alapul véve. Mindezt egységes keretbe kívánjuk foglalni (mind közgazdasági, mind matematikai szempontból), továbbá célunk a fogalmak definícióinak, állításoknak, bizonyításoknak matematikailag precíz, részletes formában való kimondása, hogy ennélfogva világosak legyenek számunkra az egyes állításokhoz szükséges feltételek, ,,körülmények”, amelyek precíz ismertetését a szóbanforgó problémakörrel foglalkozó pénzügyi és mikroökonómiai publikációkban, könyvekben az esetek egy részében nem találhatjuk meg. Ezzel együtt a lehetőségeknek megfelelően igyekszünk minél általánosabb feltételek mellett kimondani az egyes állításokat és példákat konstruálunk —leginkább értékpapírpiacokra— néhány megállapítás bemutatására.

A jegyzet felépítése

Miután bizonytalan körülmények közötti —hasznosságelméleten alapuló— döntésekkel, leginkább portfóliókkal kapcsolatos döntésekkel kívánunk foglalkozni, így a 2. és 3. fejezetek tárgya a hasznosságelmélet. Figyelembe véve a későbbi fejezetekhez szükséges fogalmakat és elméleti kérdéseket, kialakítjuk a hasznosság és várható hasznosság koncepciójának (Neumann-Morgenstern féle hasznosságfüggvény) a számunkra szükséges axiomatikus felépítését és kereteit az irodalomban ismert modellek alapján. Továbbá áttekintjük, hogy milyen kapcsolat van egy egyén (preferenciái által meghatározott) hasznosságfüggvényének alakja és az általa hozott döntések között.

Ezt követően a kockázatkerülés és annak mérése segítségével (az Arrow-Pratt mértéket használva) ismertetjük, hogy milyen eszközöket javasolnak az irodalomban az egyén kockázattal kapcsolatos viselkedésének, döntésének a leírására. Majd tárgyaljuk az optimális portfólió kiválasztásának problémakörét, s azt, hogy hogyan lehet abból az egyéni keresleti függvényt származtatni értékpapírok esetén a nem bizonytalan döntések esetének analógiájára (4. fejezet). Ezt követően, szintén az optimális portfólió problémájából kiindulva azzal foglalkozunk, hogy a sztochasztikus dominancia fogalmát hogyan lehet értékpapírok kockázatosságának összevetésére használni ilyen modellekben (5. fejezet).

Egy fontos területe a modern pénzügynek portfóliók és pénzügyi eszközök kockázatosságának (kockázatának) mérése. Ennélfogva a 6. fejezetben koherens kockázati mértékekkel foglalkozunk, majd két széles körben használt kockázati mértéket tanulmányozunk, nevezetesen a Value at Risk és az expected shortfall mértékeket.

Néhány, a jegyzethez kidolgozott példát is ismertetünk (például értékpapírpiacokra, domináns viszonyban álló értékpapírokra, stb), amelyek egyrészt a pontos matematikai feltételek leírásának szükségességét igazolják, másrészt segítenek néhány meglepőnek tűnő állítás bemutatására.

A jegyzetben tárgyaltakhoz szükséges néhány fontosabb matematikai tételt a Függelékben tartalmazza. A jegyzet végén található néhány bibliográfiai megjegyzés a felhasznált irodalomról, továbbá összefoglaltuk a dolgozatban használt legfontosabb jelöléséket.

2. Hasznosságelméleti bevezető

Több mint egy évszázaddal ezelőtt nagy változásokat hozott a modern közgazdaságtan fejlődésében az ún. marginális forradalom. Ennek egyik legfontosabb eredménye volt a modern hasznosságelmélet kiépítésének megkezdése, amely nagy áttörést eredményezett a közgazdaságtanban általában, de különös tekintettel a mikroökonómiában napjainkig. Azóta számos olyan modellt hoztak létre különböző problémák megoldása során, melyek alapját a hasznosságelmélet képezi. Egyike ezen területeknek az egyéni döntések vizsgálata akár az egyszerűbb, ,,bizonytalanságok nélküli", akár a kicsit bonyolultabb, bizonytalan körülmények közötti esetben.

A későbbi portfólióval kapcsolatos problémák megoldásához nekünk is szükségünk lesz több hasznosságelméleti fogalomra, ezért először leírjuk az általunk használt modellt[1], feltevéseket és fogalmakat, bár megjegyezzük, hogy nem célunk az irodalomban ismert legáltalánosabb hasznosságelméleti modell ismertetése annak számos kérdéskörével.

2.1. Preferenciarendezés

Az alábbiakban a döntéshozókat legtöbbször egyéneknek fogjuk nevezni, vagy ezzel ekvivalens módon a fogyasztó szót fogjuk használni. Nyilvánvaló, hogy az egyes egyének a döntéseiket a saját preferenciarendszerük alapján hozzák. Ezt írjuk most le.

Tegyük fel, hogy az alábbiakban adott n (különböző) jószág, amelyek elérhetők, azaz megvásárolhatók az egyének számára a piacon. Feltételezzük, hogy az egyének képesek arra, hogy az ezen jószágokból összeállított jószágkosarakat (a későbbiekben ezeket egyszerűen

[1] A fejezetben tárgyalt felépítés és modell kialakítása során leginkább [Potters] segített az axiomatikus felépítéshez a [Schmidt] monográfia mellett, míg [Kreps], [Nordhaus és Samuelson] és [Ingersoll] az ezt követő néhány kérdés tárgyalásában.

kosárnak is fogjuk nevezni) értékeljék és így azokat össze is hasonlítsák. A továbbiakban egy jószágkosarat egy $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ alakú vektorral fogunk jelölni, ahol x_i $(i = 1, \ldots, n)$ azt mutatja, hogy az i-edik jószágból milyen mennyiséget tartalmaz a kosár, azaz vásárolt meg az egyén. Jelölje továbbá $\mathcal{B}$ az összes, az egyén számára elérhető (azaz megvásárolható) kosarak halmazát. Természetesen adódik, hogy $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$.

A következő megjegyzésekben $\mathcal{B}$-re vonatkozóan olyan feltételeket ismertetünk, melyekkel gyakran élnek a hasznosságelméletben, hiszen azok közgazdaságilag reálisabbá és egyben matematikailag kezelhetőbbé teszik az alaphalmazunkat.

2.1. Megjegyzés. Az esetek többségében ésszerű azt feltételezni, hogy létezik egy $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vektor úgy, hogy bármely $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ kosárra teljesül $\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$, ahol az egyenlőtlenséget koordinátánként értjük. Ha ez teljesül, akkor $\mathcal{B}$-t (koordinátánként) alulról korlátosnak nevezzük. Ennek az alulról való korlátosságot leíró feltételnek az értelmében azt mondhatjuk, hogy a jószágkosár egyes koordinátáiban lehet ugyan akár negatív szám is (azaz negatív mennyiséget birtokol az egyén az adott jószágból), ám nem élhetünk ezzel a lehetőséggel korlátlanul. Például feltehetnénk speciálisan azt is, hogy $\mathcal{B} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$, azaz csak pozitív mennyiségek elérhetőek, méghozzá korlátlanul. Azonban jegyezzük meg azt is, hogy $\mathcal{B}$ gyakorta felülről is korlátos a jószágok szűkössége miatt, vagy éppen az egyén rögzített (korlátos) jövedelme miatt nincs jelentősége annak, hogy $\mathcal{B}$ esetleg felülről nem korlátos.

2.2. Megjegyzés. Továbbá azt is feltételezik a legtöbb esetben a hasznosságelméleti modellekben, hogy $\mathcal{B}$ konvex halmaz és $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathcal{B}$. Utóbbi alapján az origó (a ,,semmit sem tartalmazó kosár") is megvásárolható, míg e két feltétel így együtt azt is implikálja, hogy a jószágmennyiségek ,,végtelenül oszthatók", tehát például 1 egység, 2 egység, de akár 1/7 vagy $\sqrt{2}$ mennyiségű jószág is megvásárolható (hiszen egy $\mathcal{B}$-beli kosár esetén minden azt az origóval összekötő szakaszon elhelyezkedő kosár is $\mathcal{B}$-beli).

Az egyének preferenciáit (vagy preferenciarendezését) egy $\preceq$ preferenciareláció írja le.

Az

$$\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B},$$

kijelentés úgy olvasandó, hogy „$\mathbf{y}$ kosár az $\mathbf{x}$ kosárral szemben preferált", azaz az $\mathbf{y}$-t jobban szereti az egyén $\mathbf{x}$-nél. Definíció szerint $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$ és $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ jelentése azonos. Az $\mathbf{y}$ és $\mathbf{x}$ kosarakat közömbösnek nevezzük (az egyén szempontjából), —vagy mésképpen azt mondjuk, hogy ezen kosarak közömbös viszonyban állnak— és ezt $\mathbf{x} \approx \mathbf{y}$ módon jelöljük, ha mind $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ mind $\mathbf{y} \preceq \mathbf{x}$ teljesül. (Az egyszerűség kedvéért ilyenkor azt fogjuk mondani, hogy az adott kosarak közömbösek.) Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{y}$ kosár szigorúan preferált az $\mathbf{x}$ kosárral szemben, ha $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ úgy, hogy $\mathbf{y}$ és $\mathbf{x}$ nem közömbösek. Ennek jelölése: $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$ vagy $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$.

A továbbiakban preferenciarendezés azon a tulajdonságait soroljuk fel, amelyeket feltételezni is fogunk. Ezek választását az 2.3 Tétel teszi indokolttá.

(1) *Reflexivitás*, azaz $\mathbf{x} \preceq \mathbf{x}$ minden $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ esetén.

(2) *Tranzitivitás*, azaz $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ és $\mathbf{y} \preceq \mathbf{z}$ együttes teljesülése esetén $\mathbf{x} \preceq \mathbf{z}$, ahol $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{B}$.

(3) *Linearitás (vagy teljesség)*, azaz bármely $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ pár esetén $\mathbf{y} \preceq \mathbf{x}$ vagy $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ teljesül.

(4) *Folytonosság*, ami azt jelenti, hogy minden $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ kosár esetén az ehhez képest szigorúan preferált jószágkosarak halmaza és az azon jószágkosarak halmaza, melyekkel szemben $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ szigorúan preferált egyaránt nyílt halmazok.

2.2. Hasznosságfüggvények

A fentiekben ismertettük azt a relációt, mely az egyének preferenciáit írja le. Ezen preferenciarendezés leírja tehát azt, hogy az egyén milyen döntéseket hozhat. Nyilvánvaló, hogy ha egy $\mathbf{x}$ jószágkosár preferált egy $\mathbf{y}$ kosárral szemben, akkor ezen kettő kosár közül az egyén az $\mathbf{x}$ kosarat kívánja megvásárolni, vagy kiválasztani (amennyiben csak ezen kettő közül van lehetősége választani). Mindezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $\mathbf{x}$ kosarat hasznosabbnak találja az egyén, mint a másik kosarat.

A preferenciareláció birtokában természetesnek tűnik az az igény, hogy az egyes jószágkosarakat értékeljük, azaz hasznosségértéket tulajdonítsunk nekik úgy, hogy egy magasabb érték nyilván egy magasabb (jobb) hasznosságszintet jelöljön egy alacsonyabb értékkel szemben. Matematikailag ez azt jelenti, hogy szükségünk lenne egy olyan függvényre, melyre teljesülnek az alábbiak:

$$U : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$$

és

$$\mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \quad \Longleftrightarrow \quad U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{y}) \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}.$$

Egy ilyen függvényt nevezünk hasznosságfüggvénynek.

A makroökonómiában jól ismert az az állítás, hogy ilyen függvény létezik, ha a fentiekben ismertetett feltételeket teljesíti a preferenciareláció. A következő tétel ezt az állítást ismerteti pontosan.

2.3. Tétel. (Arrow/Debreu) [2] *Tegyük fel, hogy $\mathcal{B}$ összefüggő halmaz $\mathbb{R}^n$-ben és adott egy $\preceq$ szimbólummal jelölt reláció.*

Ekkor a $\preceq$ reláció akkor és csak akkor preferenciareláció a $\mathcal{B}$ halmazon (azaz egy olyan reláció, mely kielégíti a 2.1 részben ismertetett axiómákat), ha létezik egy folytonos $U : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy

$$\mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \quad \Longleftrightarrow \quad U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{y}), \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}. \tag{1}$$

Bizonyítás. *Először tegyük fel, hogy a relóció teljesíti az (1)-(4) tulajdonságokat.* Ekkor megkonstruálunk egy U függvényt, mely a tétel állításának megfelel.

[2] Ezen tétel bizonyításához nem Arrow és Debreu eredeti munkája szolgált, hanem a [Potters] munkában leírtak segítettek, amelynek biztosításáért ezúton is köszönetet szeretnék mondani Jos Pottersnek.

Legyen Y egy megszámlálható és sűrű halmaz $\mathcal{B}$-ben. Egy ilyen halmaz létezése következik abból, hogy $\mathcal{B}$ szeparábilis. Ekkor Y, a megszámlálhatósága miatt felírható egy sorozatként, azaz legyen $Y = \{\mathbf{y_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Először egy $\bar{U} : Y \mapsto \mathbb{R}$ függvényt definiálunk, melyre (1) teljesül. Az $\bar{U}$ definícióját indukcióval adjuk meg.

Legyen $\bar{U}(\mathbf{y_0}) = 1/2$. Ha $\bar{U}(\mathbf{y_0})$, $\bar{U}(\mathbf{y_1}), \ldots,$ $\bar{U}(\mathbf{y_m})$ már egyaránt definiáltak, akkor tekintsük $\mathbf{y_{m+1}}$-t és vizsgáljuk az alábbi négy (egymást kizáró) esetet.

(1) $\mathbf{y_{m+1}}$ közömbös egy olyan kosárral szemben, amelynek a hasznosságértéke már definiált, azaz létezik egy $0 \le j \le m$ index úgy, hogy $\mathbf{y_{m+1}} \approx \mathbf{y_j}$.

(2) $\mathbf{y_{m+1}}$ nem közömbös egyetlen már definiált hasznosságértékű Y-beli kosárral szemben sem, méghozzá úgy, hogy léteznek olyan $0 \le i_1, i_2 \le m$ indexek, melyekre $\mathbf{y_{i_1}} \prec \mathbf{y_{m+1}} \prec \mathbf{y_{i_2}}$. Ebben az esetben legyen $0 \le k_1 \le m$ és $0 \le k_2 \le m$ két olyan index, melyre $\bar{U}(\mathbf{y_{k_1}}) = \max\{\bar{U}(\mathbf{y_i}) \mid \mathbf{y_{m+1}} \succ \mathbf{y_i}, \quad 0 \le i \le m\}$ illetve $\bar{U}(\mathbf{y_{k_2}}) = \min\{\bar{U}(\mathbf{y_i}) \mid \mathbf{y_{m+1}} \prec \mathbf{y_i}, \quad 0 \le i \le m\}$.

(3) Legyen a következő az az eset, amikor $\mathbf{y_{m+1}}$ nem közömbös egyetlen már definiált hasznosságértékű Y-beli kosárral szemben sem, méghozzá úgy, hogy létezik egy $0 \le r_1 \le m$, melyre $\mathbf{y_{m+1}} \prec \mathbf{y_{r_1}} \prec \mathbf{y_i}$ minden $0 \le i \le m$ esetén.

(4) Végül maradt az az eset, amikor $\mathbf{y_{m+1}}$ nem közömbös egyetlen már definiált hasznosságértékű Y-beli kosárral szemben sem, méghozzá úgy, hogy létezik egy $0 \le r_2 \le m$, melyre $\mathbf{y_{m+1}} \succ \mathbf{y_{r_2}} \succ \mathbf{y_i}$ minden $0 \le i \le m$ esetén.

Legyen a fenti eseteknek megfelelően a függvényérték az alábbi:

$$\bar{U}(\mathbf{y_{m+1}}) := \begin{cases} \bar{U}(\mathbf{y_j}) & \text{az (1) esetben,} \\[2mm] \dfrac{\bar{U}(\mathbf{y_{k_1}}) + \bar{U}(\mathbf{y_{k_2}})}{2} & \text{a (2) esetben,} \\[2mm] \dfrac{\bar{U}(\mathbf{y_{r_1}})}{2} & \text{a (3) esetben,} \\[2mm] \dfrac{\bar{U}(\mathbf{y_{r_2}}) + 1}{2} & \text{a (4) esetben.} \end{cases}$$

Jegyezzük meg, hogy $A = \{\bar{U}(\mathbf{y_i}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ egy sűrű halmaz $[a, b]$-ben, ahol b illetve a az A halmaz supremumát illetve infimumát jelöli. Ennek megmutatásához elég belátni, hogy

$$B = \left\{ \frac{k}{2^n} \in (a, b) \mid k, n \in \mathbb{N} \right\} \subset A.$$

Definíció szerint $\bar{U}(\mathbf{y_0})$ értéke $1/2$. A folytonosság axiómája szerint ekkor az $A_1 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \prec \mathbf{y_0}\}$ és a $A_2 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \succ \mathbf{y_0}\}$ halmaz egyaránt nyílt, amely az Y sűrűségével együtt azt eredményezi, hogy van egy olyan $\mathbf{y_{i_1}}$ és egy $\mathbf{y_{i_2}}$ kosár Y-ban úgy, hogy $\mathbf{y_{i_1}} \in A_1$ és $\mathbf{y_{i_2}} \in A_2$. Ennélfogva $\bar{U}(\mathbf{y_k}) = 1/4$ és $\bar{U}(\mathbf{y_r}) = 3/4$ valamely k és r esetén $(k, l \in \mathbb{N})$. Ha $k/2^n = \bar{U}(\mathbf{y_{r_1}})$ és $(k+1)/2^n \in \bar{U}(\mathbf{y_{r_2}})$, akkor az $\{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{y_{r_1}} \prec \mathbf{x} \prec \mathbf{y_{r_2}}\}$ halmaz szintén nyílt, amelyből pedig az következik, hogy létezik egy olyan $\mathbf{y} \in Y$ kosár, melyre $\bar{U}(\mathbf{y}) = (2k+1)/2^{n+1}$. Hasonlóan mutatható meg az is, hogy ha $k \in \mathbb{N}$ a legkisebb (vagy a legnagyobb) olyan index rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén, melyre teljesül, hogy $k/2^n = \bar{U}(\mathbf{y_r})$ valamely $\mathbf{y_r} \in Y$ kosárral, akkor vagy a $C_r = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \prec \mathbf{y_r}\}$ $(C_r = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \succ \mathbf{y_r}\})$ halmaz üres és így $a = k/2^n$ $(b = k/2^n)$, vagy C_r nemüres és nyílt, amelyből pedig az következik, hogy $(2k-1)/2^{n+1} \in \bar{U}(\mathbf{y_0})$ $((2k+1)/2^{n+1} \in \bar{U}(\mathbf{y_0}))$. Tehát A sűrű az $[a, b]$ intervallumban.

Az is nyilvánvaló továbbá, hogy $\bar{U}$-ra teljesül az (1) tulajdonság.

Az $\bar{U}$ segítségével az U függvényt az alábbi módon definiáljuk. Legyen ekkor minden

$\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ esetén $B_{\mathbf{x}} := \{\bar{U}(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in Y,\ \mathbf{y} \preceq \mathbf{x}\}$ és tekintsük a következő definíciót:

$$U(\mathbf{x}) := \begin{cases} \sup B_{\mathbf{x}} & \text{ha } B_{\mathbf{x}} \neq \emptyset \\ \\ a & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor $U = \bar{U}$ az Y halmazon. Az is teljesül, hogy $U(\mathbf{x}) \geq \bar{U}(\mathbf{x})$, hiszen $\mathbf{x} \in B_{\mathbf{x}}$. Másrészt $U(\mathbf{x}) > \bar{U}(\mathbf{x})$ esetén létezne egy $\mathbf{y} \in B_{\mathbf{x}}$ kosár úgy, hogy $\bar{U}(\mathbf{x}) < \bar{U}(\mathbf{y})$, ami ellentmondáshoz vezetne, hiszen $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ teljesülne.

Most azt fogjuk ellenőrizni, hogy (1) teljesül az U függvényre. Ha $\mathbf{x} \preceq \mathbf{z}$ akkor $B_{\mathbf{x}} \subset B_{\mathbf{z}}$ és ennélfogva $U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{z})$.

A másik irány bizonyításához először vegyük észre, hogy ha $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ akkor léteznek olyan $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2} \in Y$ jószágkosarak, melyekre $\mathbf{x} \prec \mathbf{y_1} \prec \mathbf{y_2} \prec \mathbf{z}$ (a fentiekhez hasonlóan látható ez is be a folytonosság segítségével), amiből pedig azt kapjuk, hogy $U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{y_1}) < U(\mathbf{y_2}) \leq U(\mathbf{z})$. Így $U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{z})$ és $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$ együtt azt eredményeznék, hogy $U(\mathbf{x}) > U(\mathbf{z})$, ami pedig nem lehetséges.

Már csak azt kell belátnunk, hogy U folytonos. A hasznosságfüggvény folytonosságát a preferenciareláció folytonosságából fogjuk igazolni. Ha $u \in U(\mathcal{B})$, akkor létezik egy $\mathbf{x_0} \in \mathcal{B}$ kosár úgy, hogy $U(\mathbf{x_0}) = u$. Legyen $V = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \succ \mathbf{x_0}\}$ és $Z = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \prec \mathbf{x_0}\}$. Ekkor világos, hogy

$$U^{-1}\big((u, \infty)\big) = V \quad \text{és} \quad U^{-1}\big((-\infty, u)\big) = Z,$$

amelyből így az is következik, hogy ezek egyaránt nyílt halmazok. (Jegyezzük meg, hogy $\mathbb{R}$-ben a nyílt halmazok struktúratétele miatt elegendő azt ellenőrizni, hogy az (u, ∞) vagy a $(-\infty, u)$ alakú nyílt intervallumok ősképe nyílt-e $\mathcal{B}$-ben.)

Most pedig belátjuk a tétel állításának másik irányát. Tehát tegyük fel most, hogy adott egy folytonos $U : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$ függvény, amely teljesíti az (1) tulajdonságot.

A preferenciareláció 2.1 részben megadott (1)-(4) tulajdonságait ekkor könnyű ellenőrizni.

Reflexivitás: mivel $U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$, így $\mathbf{x} \preceq \mathbf{x}$. Tranzitivitás: $U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{y}) \leq U(\mathbf{z})$ esetén $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \preceq \mathbf{z}$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{B}$ esetén. Linearitás: ha adott $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}$, akkor vagy $U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{y})$ vagy $U(\mathbf{y}) \leq U(\mathbf{x})$, ezért teljesül $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ vagy $\mathbf{y} \preceq \mathbf{x}$. Folytonosság: tekintve egy $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ kosarat és felhasználva, hogy

$$U^{-1}\big((u, \infty)\big) = V \quad \text{és} \quad U^{-1}\big((-\infty, u)\big) = Z,$$

ahol $V = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \succ \mathbf{x_0}\}$ és $Z = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \prec \mathbf{x_0}\}$, az U függvény folytonosságából rögtön adódik, hogy az V és a Z nyílt halmazok.

Ezzel az állítás bizonyított. □

2.4. Megjegyzés. Hangsúlyozandó, hogy U-nak csak a letezését allítottuk és bizonyítottuk a fentiekben, ám U nem egyértelmű. Ugyanis U-nak bármely monoton növekvő transzformációja is olyan függvényt szolgáltatna, amely kielégíti a fenti tétel feltételeit, azaz bármely $\Phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ szigorúan növekvő függvény esetén $\Phi(U) : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$ is teljesíti a 2.3 Tétel feltételeit, amennyiben U teljesítette azokat.

A következő megjegyzésben összegyűjtünk néhányat azon legfontosabb tulajdonságok közül, amelyekkel az egyes egyének hasznosságfüggvényeit szokás karakterizálni.

2.5. Megjegyzés. Először rögzítsük azt, hogy az elkövetkezendőek során azt fogjuk mondani, hogy egy adott hasznosságfüggvény reprezentálja egy egyén preferenciáit, ha a függvény teljesíti az (1) tulajdonságot.

Az esetek jelentős részében meglehetősen természetesnek tűnik az a feltételezés, hogy az egyén a többet preferálja a kevesebbel szemben. Ez annyit jelent, hogy $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ (koordinátánként értendő) esetén, ahol nyilván $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}$, teljesül az is, hogy $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. Ezt a tulajdonságot szokás az irodalomban a *dominancia elvének* nevezni. Ebben az esetben tehát a hasznosságfüggvény szigorúan monoton növekvő. Továbbá differenciálható hasznosságfüggvény esetén ebből az is adódik, hogy nemnegatív parciális deriváltakkal rendelkezik a függvény.

Mivel a hasznosságfüggvénybe sűrített információ a preferenciarendezésről nem több, mint az (1)-ben leírt tulajdonság (ekvivalencia), így valójában a preferenciarendezést leírhatnánk az $IC_{\mathbf{x_0}} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \approx \mathbf{x_0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x_0})\}$ $(\mathbf{x_0} \in \mathcal{B})$ halmazokkal is. Egy ilyen halmaz tehát egy adott kosárral közömbös kosarak halmazát tartalmazza, s ezt ezért a közgazdaságtanban közömbösségi görbének vagy közömbösségi felületnek nevezik.

Most pedig tegyük fel, hogy U kétszer differenciálható és növekvő hasznosságfüggvény. Legyen adott egy $\mathbf{x^0} \in \mathcal{B}$ kosár és tegyük fel továbbá, hogy U szigorúan konkáv az $\mathbf{x^0}$ egy V környezetében (ahol $V \subset \mathcal{B}$). (A monotonitáshoz hasonlóan egy hasznosságfüggvény konkávságának is tudunk egyszerű értelmezést adni, nevezetesen az egyén kockázatkerülését, kockázathoz való viszonyát fogja jellemezni. Ezt a későbbiekben a várható hasznosság ismeretében tárgyaljuk.) Esetünkben világos, hogy $\frac{\partial}{\partial x_i} U(\mathbf{x^0}) > 0$.

Megmutatjuk, hogy ha $\mathbf{x} \in V \bigcap IC_{\mathbf{x^0}}$, akkor $\mathbf{x}$-nek bármely koordinátáját ki tudjuk fejezni a többi koordináta függvényében.

Az implicit függvény tétel alapján ugyanis (ld. Függelék, 8.2 Tétel) létezik egy olyan g függvény az $\mathbf{x_i^0} = (x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^{n-1}$ pont egy V^* környezetében úgy, hogy

$$U\big(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n\big) = U(\mathbf{x^0}), \tag{2}$$

ahol $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in V^*$. Másképpen ezt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy rögzítve a hasznosságszintet (esetünkben ez éppen $u = U(\mathbf{x^0})$) és csak az ezen szinthez tartozó közömbösségi görbén mozogva azt állíthatjuk, hogy a jelenlegi helyzetünknek megfelelő pont n koordinátájából elég $n-1$ ismerete ahhoz, hogy helyzetünket meghatározzuk, azaz bármely koordináta felírható a többi koordináta függvényeként, legalábbis az $\mathbf{x^0}$ pont egy megfelelő környezetében. Így világos, hogy lényegében g nem más, mint az x_i koordináta (amely $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ által egyértelműen meghatározott), és ezért a könnyebb jelölésmód kedvéért x_i-t fogunk írni g helyett (például a (3) egyenletben).

Ennélfogva világos tehát az is, hogy $n-1$ jószág esetében az egyén által fogyasztott mennyiség változása egyértelműen meghatározza a kimaradó egyetlen jószágban bekövetkezett fogyasztásváltozást abban az esetben, ha ugyanazt a hasznosságszintet kívánjuk elérni (feltéve persze azt, hogy a változás során nem kerülünk ki a V^* környezetből).

Vegyük most a (2) egyenletben a parciális deriváltakat a j-edik koordináta szerint. Ekkor

$$-\frac{\partial x_i}{\partial x_j}(\mathbf{x_i^0}) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_j} U(\mathbf{x^0})}{\frac{\partial}{\partial x_i} U(\mathbf{x^0})} \qquad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq n. \tag{3}$$

Az így kapott kifejezést nevezik az irodalomban az i és j jószágok között a *helyettesítés határrátájának* és $MRS_{i,j}$-vel szokás jelölni. Lényegében azt fejezzük ezzel ki, hogy mennyi egységnyi i jószágról kellene lemondanunk akkor, ha a j jószágból eggyel több egységet kívánnánk fogyasztani, feltéve, hogy azonos hasznossági szinten maradunk; ugyanis

$$MRS_{i,j} \approx -\frac{\Delta x_i}{\Delta x_j} \ .$$

Jegyezzük meg végezetül azt, hogy a közömbösségi görbék és a helyettesítési határráta egyaránt invariáns a hasznosságfüggvény bármely szigorúan növekvő transzformáltjára. Ez a fenti képletek alapján nyilvánvaló.

2.3. Ordinális versus kardinális hasznosságfogalom

Amikor a múlt század nyolcvanas éveiben, a marginális forradalom idején, Menger, Walras és Jevons először kezdték használni a hasznosságfüggvény fogalmát, még úgy goldolták, hogy a hasznosságfüggvény többet fejezne ki a fogyasztói hasznosság vagy elégedettség fokáról, mint amely az (1) tulajdonság alapján a hasznosságfüggvény segítségével leolvasható az elégedettségről. Valójában a fent említett szerzők egyváltozós hasznosságfüggvényeket értelmeztek, amelyek egy-egy jószágra vonatkozóan reprezentálták a hasznosságot, azaz minden egyes jószághoz egy külön hasznosságfüggvényt értelmeztek. (Említsük meg azt is, hogy ebben az egyszerű modellben a szerzők egy jószágkosár teljes hasznát az egyes jószágok által okozott hasznosságok összegeként értelmezték.)

A fenti szerzők úgy goldolták, hogy a hasznosságfüggvénnyel ne csak egyszerűen azt dönthessük el, hogy például kettő jószágkosár közül melyiket választaná az egyén, azaz azt, hogy lényegében számára melyik a jobb, hanem azt is, hogy a jobb (preferált kosár) mennyivel lesz jobb a másiknál. Például $U(x_0) = 2$ és $U(x_1) = 4$ esetén azt mondták, hogy az x_1 kosár éppen kétszer olyan hasznosnak bizonyul az egyéni preferenciák szerint, mint az x_0 kosár.

Tudjuk, hogy az ilyen tulajdonságokkal rendelkező hasznosságfüggvényeket *kardinális hasznosságfüggvényeknek* nevezzük, megkülönböztetve azokat az *ordinális hasznosságfüggvényektől*. Utóbbiak nem hordoznak több információt a kosarak hasznosságáról, mint amit az (1) alapján le tudunk olvasni. Ennélfogva azt mondhatjuk, hogy a 2.3 Tétel egy folytonos ordinális hasznosságfüggvény létezését mondja ki, mely konzisztens a megfelelő preferencia-rendezéssel az (1) tulajdonság szerinti értelemben.

Bár tudjuk, hogy először jelent meg a közgazdaságtanban a kardinális hasznosság-értelmezés és csak később az ordinális, mégsem szeretnénk azt sugallni, hogy az utóbbi fogalom a helyes, sőt, még azt sem, hogy általában jobban szolgálja az ökonómiai elméletek céljait. Ez a problémafelvetés még ma is egy fontos kérdése a modern közgazdaságtannak. Így mindössze annyit mondhatunk, hogy bizonyos problémák esetén jobb eszközöket biztosít az ordinális megközelítés, míg más esetekben nem. A mi céljainkhoz azonban szerencsésebb (elegendő) az ordinális megközelítés, ahogy ezt már láttuk a 2.3 Tételben és fogjuk látni még az elkövetkezendő fejezetekben.

2.4. A hasznosság maximalizálása

Egy klasszikus probléma a mikroökonómiában az optimális fogyasztói jószágkosár —azaz a leginkább preferált jószágkosár— meghatározása akkor, ha adott egy bizonyos jövedelem (vagyon) a fogyasztó számára. Ez lényegében nem más, mint a hasznosság maximalizálása egy $\mathcal{F}$ halmaz felett, amelyet a lehetséges (a fogyasztó számára elérhető) kosarak alkotnak. Világos, hogy $\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \leq I\}$, ahol I a fogyasztó jövedelme, p_i pedig az i-edik jószág árát jelöli. Tehát a feladat az, hogy találjuk meg U maximumának a helyét az $\mathcal{F}$ halmaz felett.

2.6. Tétel. *Legyen $\mathcal{B}$ zárt, konvex, alulról korlátos (koordinátánként) és tegyük fel, hogy $\mathbf{0} \in \mathcal{B}$ és $U : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$ egy növekvő, folytonos, szigorúan konkáv hasznosságfüggvény. Bármely $(p_1, \ldots, p_n)$ árvektor esetén, melyre $p_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, és adott $I > 0$ jövedelem mellett egyértelműen létezik egy $\mathbf{x}$ kosár $\mathcal{B}$-ben úgy, hogy*

$$U(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y} \in \mathcal{F}} U(\mathbf{y}),$$

ahol $\mathcal{F} = \{\mathbf{y} \in \mathcal{B} \mid \sum_{i=1}^{n} y_i p_i \leq I\}$. Továbbá $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = I$.

Bizonyítás. Az $\mathcal{F}$ halmaz felülről korlátos (hiszen világos, hogy $y_i \leq I/p_i$ ha $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{F}$), így $\mathcal{F}$ tehát korlátos, zárt és nemüres, ennélfogva kompakt. Mivel U folytonos, így a globális maximumát fel kell vennie. Legyen ez a pont az $\mathbf{x}$. Ha U a maximumát egy $\mathbf{x}^* \in \mathcal{B}$ pontban is felvenné, ahol $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}$, akkor az adódna, hogy

$$\frac{\mathbf{x} + \mathbf{x}^*}{2} \in \mathcal{F} \qquad \text{és} \qquad U\left(\frac{\mathbf{x} + \mathbf{x}^*}{2}\right) > \frac{1}{2}U(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}U(\mathbf{x}^*) = U(\mathbf{x}),$$

ahol kihasználtuk U konkávságát. Ezért $\mathbf{x}$ egyértelmű. Végül jegyezzük meg, hogy triviálisan $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = I$. Egyébként ugyanis az

$$\left(x_1 + \frac{I - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{p_1}, x_2, \ldots, x_n\right)$$

kosár szigorúan preferált lenne az $\mathbf{x}$ kosárral szemben. $\square$

Az optimum megkeresése

Egy, a fentiekben leírt feltételes szélsőérték feladat megoldásához használhatjuk a Lagrange féle multiplikátor módszert akkor, ha U differenciálható. (Ezt a módszert a 8.1 Tételben ismertettük a Függelékben.) Tekintsük az x_i-re és λ-ra vonatkozó parciális deriváltját ($i = 1, \dots, n$) az $U(\mathbf{x}) + \lambda(I - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i)$ kifejezésnek! Ekkor az alábbi elsőrendű feltételrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} U(\mathbf{x}) &= \lambda p_i \qquad i = 1, \dots, n \\ I - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Mivel U konkáv a konvex $\mathcal{F}$ halmaz felett, így a (4) megoldása szükségképpen egyben globális maximuma is lesz az U-nak $\mathcal{F}$ felett.

Gossen második törvénye

Legyen most T az az $n-1$ dimenziós hipersík, amelyet az $I = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ egyenlettel adhatunk meg. A fenti tételben tárgyaltak alapján nyilvánvaló, hogy az optimum helye a $T \cap \mathcal{F}$ halmazban van. Azt is tudjuk, hogy a megoldást a Lagrange féle multiplikátor módszerrel biztosan megtaláljuk abban az esetben, ha a megoldás a T tér topológiájára nézve a $T \cap \mathcal{F}$ halmaz belsejében van. Azonban fontos megjegyezni, hogy amennyiben a maximum helye a $\partial(T \cap \mathcal{F})$ halmaz[3] egy pontja ismét a T tér topológiáját alapul véve, akkor a Lagrange féle multiplikátor módszer nem feltétlenül találja meg az optimumot, hiszen az optimum nem lesz megoldása a (4) egyenletrendszernek. Ezen különböző eseteket mutatják a jól ismert 2.7, 2.8 példák is a következő részben. (Talán hasznos ismételten kiemelni, hogy a $T \cap \mathcal{F}$ halmaz határát T-ben, a T tér topológiájában tekintettük és nem az n dimenziós $\mathbb{R}^n$ térben, hiszen utóbbiban az a teljes halmazt adná vissza.)

[3]Egy topologikus térbeli A halmaz esetén ∂A jelölje az A halmaz határpontjainak a halmazát.

Ha az optimumot a Lagrange féle multiplikátorok segítségével kapjuk meg, úgy a megoldásra szükségképpen teljesül az alábbi egyenletet:

$$MRS_{j,i} = \frac{p_i}{p_j} \qquad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Ez egyszerűen adódik a (4) egyenletekből. Ennélfogva az optimumban a helyettesítési határráta ($MRS_{j,i}$) –amelyet az egyéni preferenciák határoznak meg– megegyezik azzal a helyettesítési (határ)rátával, amelyet a piac tesz lehetővé, azaz p_i/p_j-vel. Világos, hogy ha $MRS_{j,i}$ nagyobb lenne p_i/p_j-nél, akkor bizonyos mennyiségű j jószágot az egyén (vagy fogyasztó) helyettesítene valamennyi i jószággal. Másképpen úgy is írhatjuk, hogy az optimumban

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x_i} U(\mathbf{x})}{p_i} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_j} U(\mathbf{x})}{p_j} \qquad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq n, \tag{5}$$

tehát egy egységnyi pénz elköltése ugyanakkora haszonnövekedéssel járna az adott pontban, függetlenül attól, hogy azt melyik jószág vásárlására fordítanánk. A közgazdaságtanban az (5) formula Gossen második törvényeként ismert.

A keresleti görbe

Most tekintsük az egyik jószágot, legyen ez az i-edik, és tegyük fel, hogy az összes többi jószág ára rögzített, továbbá a jövedelmünk is rögzített és végül feltesszük, hogy a 2.6 Tétel feltételei teljesülnek. Ekkor bármely $p_i > 0$ ár esetén a tételben ismertetett állítás alapján létezik egy ehhez az árhoz tartozó optimális jószágkosár, amelyet jelöljünk most $\mathbf{x}_{p_i}$-vel. Így már értelmezhetjük $\mathbb{R}^2$-ben a $D_i = \{(p, q) \mid p = p_i, \ q = x_{p_i,i}\}$ halmazt, ahol persze $x_{p_i,i}$ az optimális portfólió i-edik koordinátáját jelöli. A D_i halmaz nem más, mint az egyéni keresleti görbe az i jószágra vonatkozóan, amely azt mutatja, hogy adott áron mekkora mennyiséget kíván (a hasznosság-maximalizáló) fogyasztó az adott jószágból (feltéve, hogy minden más rögzített a modellben). Itt nem célunk a keresleti görbe részletes tanulmányozása, hiszen az számos mikroökonómiai könyvben megtalálható (ld. [Nordhaus és Samuelson] vagy [Kreps]). Azonban a későbbiek során kitérünk az egyéni keresleti görbe tárgyalására abban az esetben, amikor az egyén bizonytalan körülmények között dönt, ami azt fogja jelenteni, hogy a hasznosság helyett, annak a várható értékét maximalizálja az egyén (ld. bővebben a 4.4 részben).

2.5. Néhány klasszikus hasznosságfüggvény

Ebben a részben végig feltételezzük, hogy a jószágkosarak halmaza $\mathcal{B} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n\}$. Feltesszük továbbá, hogy $I > 0$ jelöli az egyén jövedelmét és p_i ($p_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$) pedig az i-edik jószág piaci ára.

Az alábbiakban ismertetjük a leggyakrabban használt hasznosságfüggvényeket, amelyek esetén a korábbi részekben ismertetett mennyiségeket származtatjuk.

2.7. Példa. (Cobb-Douglas féle hasznosságfüggvény) A Cobb-Douglas féle hasznosságfüggvény definíciója az alábbi:

$$U(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \qquad a_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

A könnyebb számolás kedvéért megtehetjük, hogy az $\ln U$ függvényt tekintjük az eredeti U függvény helyett, hiszen előbbi egy szigorúan monoton növekvő transzformációval adódik U-ból (ld. 2.4 Megjegyzés). Ekkor (3) alapján

$$MRS_{i,j} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \ln x_k\right)}{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \ln x_k\right)} = \frac{a_j/x_j}{a_i/x_i} = \frac{a_j x_i}{a_i x_j}. \tag{6}$$

Közelítésként azt írhatjuk, hogy $MRS_{i,j} \approx \Delta x_i / \Delta x_j$, s ez a (6) formula alapján azt adja, hogy

$$\frac{\Delta x_j / x_j}{\Delta x_i / x_i} \approx \frac{a_j}{a_i}.$$

Ez tehát azt jelenti, hogy az i jószág egy konstans százalékáról való lemondásunkért cserében a $\mathcal{B}$ bármely pontjában azonos százalékkal kellene növlenünk a j jószág mennyiségét, ha közben egy rögzített hasznosságszintet akarunk elérni. Úgy is mondhatnánk, hogy a „százalékokban kifejezett helyettesítési határráta” konstans az egész $\mathcal{B}$ halmaz felett.

Az optimális kosár koordinátáit kiszámolhatjuk (4) segítségével, nevezetesen: $a_i/x_i = \lambda p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ és $I = \sum_{i=1}^n a_i/\lambda$. Így azt kapjuk, hogy

$$x_i = \frac{a_i}{\lambda p_i} = \frac{a_i I}{p_i \sum_{k=1}^n a_k} .$$

2.8. Példa. (Lineáris hasznosságfüggvény) Legyen most a hasznosságfüggvény az alábbi alakú:

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \qquad \text{ahol} \quad a_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ekkor könnyen látható, hogy a helyettesítési határráta éppen konstans (mindenhol), hiszen:

$$MRS_{i,j} = \frac{a_j}{a_i} , \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy a jószágok *tökéletesen helyettesíthetők* egymással és ennélfogva egy hasznosságmaximalizáló vásárló csak az egyik fajta jószágból fog vásárolni, mégpedig nyilván abból, mely az ő személyes preferenciái szerint a legolcsóbbnak bizonyul. Legyen most ennek megfelelően i az az index ($i \in \{1, \ldots, n\}$), melyre

$$\frac{a_i}{p_i} = \max_{1 \leq j \leq n} \frac{a_j}{p_j}$$

teljesül. Ekkor az $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ optimális kosár a következő:

$$x_j = \delta_{ij} \frac{I}{p_i} \qquad j = 1, \ldots, n,$$

ahol δ_{ij} a Kronecker féle delta függvényt jelöli. Jegyezzük meg azonban, hogy $\mathbf{x}$ nem szükségképpen egyértelmű. Ugyanis abban az esetben, ha létezik egy $j \in \{1, \ldots, n\}$ index úgy, hogy $i \neq j$ és $a_i/p_i = a_j/p_j$ akkor végtelen sok optimális allokáció létezik.

2.9. Példa. (Kiegészítő jószágok) Ebben az esetben tegyük fel, hogy az alábbi hasznosságfüggvényt vizsgáljuk:

$$U(\mathbf{x}) = \min\{a_i x_i \mid i = 1, \ldots, n\},$$

ahol $a_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Tehát adott egy hasznosságfüggvény, mely ugyan folytonos, de nem differenciálható. (Így nem használható például a Lagrange féle multiplikátor eljárás sem.) Legyen $\mathbf{x}$ egy kosár és $i \in \{1, \ldots, n\}$ egy olyan index, melyre

$$a_i x_i = \min\{a_j x_j \mid j = 1, \ldots, n\}.$$

Ha $a_j x_j > a_i x_i$ ($j \in \{1, \ldots, n\}$) akkor az egyén a j jószágból egy bizonyos mennyiséget feleslegesen birtokol. A felesleges szó magyarázatához vezessük be a következő jelölést: $x_j^* = a_i x_i / a_j$. Ekkor $x_j > x_j^*$. Továbbá x_j^* pontosan elég lenne ahhoz, hogy ugyanazt a hasznosságszintet érjük el, amit egyébként x_j-vel is elérnénk, tehát az $x_j - x_j^*$ mennyiség haszontalan, mert nem okoz haszonnövekedést. Másképpen úgy fogalmazhatunk, hogy ha adott x_i, akkor pontosan az $x_j = \frac{a_i}{a_j} x_i$ mennyiségre van szükségünk a j jószágból ($j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$) ahhoz, hogy az $u = a_i x_i$ hasznosságszintet elérjük pénzpazarlás nélkül. Ezért való tehát ez a típusú hasznosságfüggvény az egymást kiegészítő jószágok esetén a preferenciarendszer leírására. Ezen javak egy rögzített arányban fogyaszthatók csak –ezt az arányt az a_i konstansok határozzák meg– és nem helyettesíthetők egymással egyáltalán.

Most pedig tekintsük a hasznosság maximalizálásának problémáját. Világos a fenti érvelés értelmében, hogy csak olyan pont lehet optimum, ahol $a_i x_i = a_j x_j$ teljesül minden $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ esetén. Ezért az optimális pont nem más, mint az

$$x_i = \frac{1}{a_i} t, \qquad t \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n,$$

egyenlettel meghatározott egyenes és a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = I$$

egyenletű hipersík metszéspontja. Ebből pedig már azonnal adódik, hogy

$$x_i = \frac{I}{a_i \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{a_j}} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

A későbbi fejezetekben még más példákat is mutatunk hasznosságfüggvényekre.

3. A várható hasznosság

Az előző fejezetben tárgyalt hasznosságfüggvények egyik legfontosabb szerepe, hogy egy könnyen kezelhető eszközt jelentenek az egyéni preferenciák leírására és vizsgálatára. Így számos mikroökonómiai problémát tudunk egyszerűen megoldani hasznosságfüggvények segítségével, mint például az optimális döntés egyes kérdéseit (a hasznosság maximalizálásával), az egyéni keresleti görbe származtatását, stb. Ezek a problémák mind determinisztikus kimeneteket feltételezve voltak megfogalmazva, tehát ,,bizonyosság feltétele mellett" vizsgáltuk őket. Azonban nagyon gyakran olyan problémákkal szembesülünk, ahol bizonyos kockázattal is kell számolnunk, azaz olyan döntési lehetőségek között kell választanunk, amelyek kimenetele a véletlentől is függ. Például tekintsünk egy különböző lehetséges értékpapírokból (vagy általánosabban pénzügyi eszközökből) alkotott portfóliót. Ilyen értékpapír lehet benne például bizonyos mennyiségű készpénz, kötvények, részvények, future szerződések, opciós szerződések, stb. Egy ilyen portfólió értéke vagy kifizetése (kifizetési függvénye) egy jővőbeli időpontban bizonytalan (kockázatos), hiszen az függ a 'világ' vagy a gazdaság' jövőbeli állapotától.

Ilyen és ehhez hasonló bizonytalan döntések esetén az egyik lehetséges megközelítés alapötlete az, hogy a hasznosság várható értékét maximalizáljuk. Ezt a megközelítést kívánjuk a továbbiakba áttekinteni, ám ehhez előbb néhány újabb fogalmat kell definiálnunk.

Az irodalomban számos helyen találkozhatunk a várható hasznosság elméletének felépítésével.[4] Figyelembe véve természetesen a többi fejezetben tárgyaltakat is, az alábbiakat leginkább [Potters] és [Potters2] alapján alakítottuk ki. Megemlítjük még, hogy a [Schmidt] munkában számos kérdés tárgyalásra kerül az axiomatikus várható hasznosság felépítése kapcsán, például kitérve ennek biztosítási problémákban való alkalmazási lehetőségeire is.

[4] Jegyezzük meg ám azt is, hogy több helyen nem teljes' tárgyalást találhatunk a várható hasznosság felépítésére (bár ezek munkánk során hasznosnak bizonyultak), így például a következőket említhetjük: [Schmidt], [Ingersoll], [Huang és Litzenberger].

3.1. Axiómák és a modell

3.1. Definíció. *Legyen* $X = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ *egy kosár* m*-es,* $\mathbf{x}_i \in \mathcal{B}$ $(i = 1, \ldots, m)$*, és* $P = (p_1, \ldots, p_m)$ *egy* m *dimenziós vektor úgy, hogy* $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, $0 \leq p_i \leq 1$ $(i = 1, \ldots, m)$*. Ekkor az* (X, P) *párt lottónak, az* X *elemeit a lottó lehetséges kimeneteleinek,* P *elemeit pedig a megfelelő kimenetelek valószínűségeinek fogjuk nevezni.*

Jelölje $\mathbb{L}$ *az összes lottók halmazát.*

Ha adott $\mathcal{L}_1 = (X^1, P^1), \ldots, \mathcal{L}_k = (X^k, P^k) \in \mathbb{L}$ *és* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in [0, 1]$ *úgy, hogy* $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$*, akkor a lottók* $\sum_{i=1}^{k} \alpha_1 \mathcal{L}_i$ *konvex lineáris kombinációja alatt azt az* (X, P) *lottót értjük, melyre*

$$X = (\mathbf{x}_1^1, \ldots, \mathbf{x}_{m_1}^1, \mathbf{x}_1^2, \ldots, \mathbf{x}_{m_2}^2, \ldots, \mathbf{x}_1^k, \ldots, \mathbf{x}_{m_k}^k),$$

$$P = (\alpha_1 p_1^1, \ldots, \alpha_1 p_{m_1}^1, \alpha_2 p_1^2, \ldots, \alpha_2 p_{m_2}^2, \ldots, \alpha_k p_1^k, \ldots, \alpha_k p_{m_k}^k)$$

(ahol a felső index nem hatványozást jelöl, hanem az adott kimenetel —azaz kosár— vagy valószínűség esetén azt, hogy az melyik lottóhoz tartozik).

Világos, hogy a definíció „jó”, azaz a lottók lineáris kombinációja szintén teljesíti a lottó definícióját.

3.2. Megjegyzés. Egy $\mathcal{L}$ lottót úgy képzelhetünk el, mint egy m különböző kimenetelű játékot, ahol az $\mathbf{x}_i$ kimenetel bekövetkezésének valószínűsége p_i. Másképpen fogalmazva minden lottónak megfeleltethetünk egy alkalmas $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi téren értelmezett l diszkrét valószínűségi vektorváltozót, melyre $\mathbb{P}(l = \mathbf{x}_i) = p_i$. Az egyszerűség kedvéért egy $\mathcal{L}$ lottó esetén a hozzá tartozó valószínűségi vektorváltozót l fogja jelölni.

Az összes jószágkosarat tartalmazó halmazon korábban ismertetett preferenciarendezés mintájára (ld. 2.1) most az összes lottót tartalmazó $\mathbb{L}$ halmazon kívánunk bevezetni egy rendezést.

Legyen $\mathcal{L}_1 = (X_1, P_1)$ és $\mathcal{L}_2 = (X_2, P_2)$ két lottó. Jelentse $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$ azt, hogy az egyén az $\mathcal{L}_2$ lottót preferálja (jobban kedveli) az $\mathcal{L}_1$ lottóval szemben. Jelöljük továbbá $\mathcal{L}_1 \approx \mathcal{L}_2$ formában azt, ha $\mathcal{L}_1$ és $\mathcal{L}_2$ közömbösek az egyén számára —vagy másképpen mondva közömbös viszonyban állnak—, amely alatt azt értjük, hogy $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$ és $\mathcal{L}_2 \preceq \mathcal{L}_1$ egyaránt teljesül. (Itt is élünk azzal az egyszerűsítéssel, hogy $\mathcal{L}_1 \approx \mathcal{L}_2$ esetén a szóbanforgó lottókat egyszerűen közömbösnek fogjuk nevezni.) Ha $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$ úgy, hogy ezek a lottók nem közömbösek, akkor $\mathcal{L}_2$-t szigorúan preferáltnak (jobbnak) nevezzük az $\mathcal{L}_1$ lottóval szemben.

Az alábbiakban ismertetjük azokat a tulajdonságokat (axiómákat), amelyeket a későbbiekben feltételezünk egy gazdaságilag racionális döntéshozótól. Az alábbiakban ismertetendő tétel alapján érthető meg, hogy miért éppen ezeket az axiómákat választjuk és hogy ezek miért lesznek elegendőek.

(1) *Reflexivitás*: $\mathcal{L} \preceq \mathcal{L}$ teljesül minden $\mathcal{L} \in \mathbb{L}$ esetén.

(2) *Tranzitivitás*: ha $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$ és $\mathcal{L}_2 \preceq \mathcal{L}_3$ akkor $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_3$ minden $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3 \in \mathbb{L}$ esetén.

(3) *Linearitás (vagy teljesség)*: ha $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathbb{L}$ akkor vagy $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$ vagy $\mathcal{L}_2 \preceq \mathcal{L}_1$ teljesül.

(4) *Folytonosság*: ha $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ két olyan lottó, melyekre $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$ és $\mathcal{L}_2 \preceq \mathcal{L}_3$ akkor létezik egy p konstans $[0, 1]$-ben úgy, hogy $p\mathcal{L}_1 + (1 - p)\mathcal{L}_3 \approx \mathcal{L}_2$.

(5) *Monotonitás*: Ha $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$ $(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathbb{L})$ és $s \leq t$, akkor

$$t\mathcal{L}_1 + (1 - t)\mathcal{L}_2 \preceq s\mathcal{L}_1 + (1 - s)\mathcal{L}_2.$$

(6) *Függetlenség*: ha $\mathcal{L} \preceq \mathcal{L}'$, $\mathcal{L}, \mathcal{L}' \in \mathbb{L}$, és $p \in [0, 1]$ akkor bármely $\mathcal{K} \in \mathbb{L}$ esetén

$$p\mathcal{L} + (1 - p)\mathcal{K} \preceq p\mathcal{L}' + (1 - p)\mathcal{K}.$$

Ahogy már említettük, a fenti (1)-(6) tulajdonságokat axiómának nevezik az irodalomban, például a hatodikat szokás a függetlenségi axiómának nevezni.

Az alábbi tétel alapozza meg a várható hasznosság koncepcióját.

3.3. Tétel. [5] *Legyen a* $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ *kosarak halmazán értelmezett összes lottók halmaza* $\mathbb{L}$ *és tegyük fel, hogy azon adott egy preferenciarendezés, melyre teljesülnek az ebben a fejezetben ismertetett (1)-(6) axiómák. Ekkor létezik egy* $V : \mathbb{L} \mapsto \mathbb{R}$ *függvény úgy, hogy bármely* $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathbb{L}$ *esetén*

$$\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2 \iff V(\mathcal{L}_1) \leq V(\mathcal{L}_2), \tag{7}$$

és V *felírható egy* $U : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$ *(hasznosság)függvény segítségével az alábbi alakban:*

$$V(\mathcal{L}) = \sum_{i=1}^{m} U(\mathbf{x}_i) p_i, \qquad \forall \mathcal{L} \in \mathbb{L}, \tag{8}$$

ahol $\mathcal{L} = (X, P) = ((\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m), (p_1, \ldots, p_m))$.

Tekintsük két tetszőleges $\mathcal{L}_1$ és $\mathcal{L}_2$ lottó esetén a hozzájuk tartozó l_1 illetve l_2 valószínűségi változókat. Ezek segítségével a fenti tétel állítását tehát úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az egyén számára az a lottó a jobb (preferált), amelynek a várható hasznossága magasabb, azaz:

$$\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2 \iff \mathbb{E}\, U(l_1) \leq \mathbb{E}\, U(l_2). \tag{9}$$

A későbbiek során $\mathbb{E}\, U(l)$ helyett egyszerűen $\mathbb{E}\, U(\mathcal{L})$-t fogunk írni.

Az 3.3 Tétel bizonyítása. A bizonyítás során közvetlenül az U hasznosságfüggvényt konstruáljuk meg.

Először tekintsünk két olyan $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2} \in \mathcal{B}$ kosarakat, melyek nem közömbösek. Például tegyük fel, hogy $\mathbf{x_1} \prec \mathbf{x_2}$. Ha nem létezne két ilyen kosár, akkor minden $\mathcal{B}$-beli kosár közömbös lenne, ennélfogva U-t választhatnánk konstans függvénynek.

Használjuk a következő jelölést: $[\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]_{\preceq} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x_1} \preceq \mathbf{x} \preceq \mathbf{x_2}\}$. Először az $[\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]_{\preceq}$ „intervallumon” konstruálunk egy U függvényt úgy, hogy az teljesíti a (8) ekvivalenciát.

Ehhez legyen $U(\mathbf{x_1}) = 0$, $U(\mathbf{x_2}) = 1$ és $L_{\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}} = \{\mathcal{L} = (X, P) \in \mathbb{L} \mid X \subset [\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]_{\preceq}\}$.

[5] A tétel bizonyításához a [Potters2] kéziratban leírtakat vettük alapul.

Most tekintsünk egy tetszőleges $\mathbf{y} \in [\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]_{\preceq}$ kosarat és vezessük be az alábbi jelölést: $\mathcal{L}_{\mathbf{y}}$ legyen az az egyszerű lottó, amelynek egyetlen kimenetele van, nevezetesen $\mathbf{y}$, azaz $\mathbb{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{y}} = \mathbf{y}) = 1$. Legyen továbbá —a jelölés további egyszerűsítése céljából— az $\mathbf{y} = \mathbf{x_1}$ és $\mathbf{y} = \mathbf{x_2}$ speciális esetekben $X_1 := \mathcal{L}_{\mathbf{x_1}}$ és $X_2 := \mathcal{L}_{\mathbf{x_2}}$. (Tehát $\mathbb{P}(X_1 = \mathbf{x_1}) = 1$ és $\mathbb{P}(X_2 = \mathbf{x_2}) = 1$.) A preferenciarendezés folytonossága miatt tudjuk, hogy létezik egy olyan $t_{\mathbf{y}} \in [0, 1]$ konstans, melyre

$$\mathcal{L}_{\mathbf{y}} \approx (1 - t_{\mathbf{y}})X_1 + t_{\mathbf{y}}X_2.$$

Továbbá a monotonitás miatt még azt is tudjuk, hogy egy ilyen konstans egyértelmű kell, hogy legyen. Legyen ekkor $U(\mathbf{y}) = t_{\mathbf{y}}$ módon definiálva. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}_{\mathbf{y}} \approx (1 - U(\mathbf{y}))X_1 + U(\mathbf{y})X_2. \tag{10}$$

Ha $\mathcal{L} \in L_{\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}}$ és $\mathbb{P}(\mathcal{L} = \mathbf{y_i}) = p_i$, $i = 1, \ldots, k$, ahol $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ akkor (10) és a függetlenségi axióma együtt azt adja, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\approx \sum_{i=1}^{k} p_i \mathcal{L}_{\mathbf{y_i}} \approx \sum_{i=1}^{k} p_i \Big[\big(1 - U(\mathbf{y_i})\big)X_1 + U(\mathbf{y_i})X_2\Big] \\ &\approx \left[1 - \sum_{i=1}^{k} p_i U(\mathbf{y_i})\right] X_1 + \sum_{i=1}^{k} p_i U(\mathbf{y_i})X_2 \approx \big(1 - \mathbb{E}\, U(\mathcal{L})\big)X_1 + \big(\mathbb{E}\, U(\mathcal{L})\big)X_2. \end{aligned} \tag{11}$$

A reláció monotonitását és (11)-et felhasználva ebből pedig kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2 &\Longleftrightarrow (1 - \mathbb{E}\, U(\mathcal{L}_1))X_1 + (\mathbb{E}\, \mathcal{L}_1)X_2 \preceq (1 - \mathbb{E}\, U(\mathcal{L}_2))X_1 + (\mathbb{E}\, \mathcal{L}_2)X_2 \\ &\Longleftrightarrow \mathbb{E}\, \mathcal{L}_1 \leq \mathbb{E}\, \mathcal{L}_2. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $U(\mathbf{x_1}) = 0$ és $U(\mathbf{x_2}) = 1$ feltételek mellett $t_{\mathbf{y}}$ az egyetlen lehetséges érték $U(\mathbf{y})$-ra, ha azt akarjuk, hogy (8) teljesüljön. Tehát megállapíthatjuk, hogy a tétel feltételeit az $[\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]_{\preceq}$ intervallumon kielégítő és $U(\mathbf{x_1}) = 0$ és $U(\mathbf{x_2}) = 1$ peremértékkel rendelkező U függvény már egyértelműen meghatározott az $[\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]_{\preceq}$ intervallumon.

Most pedig kiterjesztjük az U függvényt. Ehhez tekintsünk egy tetszőleges $\mathbf{x_3}$ kosarat, amely nem eleme az $[\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]_{\preceq}$ intervallumnak. (Ha nincs ilyen kosár, akkor a tétel állítása már bizonyított is.) Vagy az teljesül most, hogy $\mathbf{x_3} \prec \mathbf{x_1}$ vagy az, hogy $\mathbf{x_2} \prec \mathbf{x_3}$. Tegyük fel például, hogy az előbbi teljesül. (A másik esetben a bizonyítás további része teljesen analóg.) Ekkor a fenti gondolatmenetet ismét alkalmazva tudjuk, hogy lehet konstruálni egy olyan $\bar{U}$ hasznosságfüggvényt, amely pedig az $[\mathbf{x_3}, \mathbf{x_2}]_{\preceq}$ intervallumon teljesíti a tétel feltételeit. Legyen most

$$\tilde{U}(\mathbf{y}) = \frac{\bar{U}(\mathbf{y}) - \bar{U}(\mathbf{x_1})}{\bar{U}(\mathbf{x_2}) - \bar{U}(\mathbf{x_1})}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{y} \in [\mathbf{x_3}, \mathbf{x_2}]_{\preceq}.$$

Így $\tilde{U}(\mathbf{x_1}) = 0$ és $\tilde{U}(\mathbf{x_2}) = 1$, ami azt jelenti, hogy $\tilde{U}$ egyenlő kell, hogy legyen U-val az $[\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]_{\preceq}$ halmazon, hiszen ott U egyértelmű.

Ezzel beláttuk, hogy U kiterjeszthető az egész $\mathcal{B}$ halmazra úgy, hogy teljesíti a tétel állításában megfogalmazottakat.

$\square$

Lényegében a 3.3 Tétel bizonyítása során láttuk, hogy U értékét két, egymással nem közömbös viszonyban álló kosár esetén rögzítve már csak egyetlen hasznosságfüggvény teljesíti a tétel feltételeit. Az is látszik könnyen, hogy egy alkalmas U függvény esetén ennek a függvénynek egy tetszőleges pozitív affin transzformáltja is kielégíti a tétel feltételeit.

Ezeket a megállapításokat foglaljuk össze az alábbi következményben.

3.4. Következmény. *A 3.3 Tétel feltételei mellett legyen U_1 és U_2 kettő (ordinális) hasznosságfüggvény úgy, hogy azok egyaránt kielégítik a 3.3 Tétel állítását, azaz (9)-t. Ekkor léteznek olyan $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ konstansok, hogy*

$$U_2(\mathbf{x}) = aU_1(\mathbf{x}) + b, \qquad \mathbf{x} \in \mathcal{B}.$$

3.5. Megjegyzés. Egy olyan U hasznosságfüggvényt, mely teljesíti a 3.3 Tétel állítását, azaz amelyre a várható hasznosság (9) rendezési tulajdonsága teljesül, *Neumann-Morgenstern féle hasznosságfüggvénynek vagy indexnek* nevezünk. Ugyan Ramsey volt az, aki először vezette be a várható hasznosság koncepcióját modern megközelítésben a XX. század 30-as éveiben, mégis Neumann és Morgenstern nevei találhatók az elmélet alapítóiként említve az irodalomban[6]. Neumann és Morgenstern ugyanis szintén kidolgozták az elmélet lényegét, Ramsey munkáját nem ismerve, attól függetlenül.

A későbbiekben egy hasznosságfüggvény alatt mindig Neumann-Morgenstern típusú függvényt értünk, hacsak nem értelmezzük azt másképpen.

3.2. Gyakorlati cáfolatok, kritikák

Ugyan azt már korábban is említettük, hogy a várható hasznosság koncepciója igen elterjedt a közgazdaságtanban, mégis vannak jól ismert gyakorlati példák és kritikák, amelyek szerint az elmélet bizonyos axiómái a gyakorlatban cáfolhatók. Ezen kritikák legnagyobb része a függetlenségi axióma létjogosultságát kérdőjelezi meg.

Az irodalomban az első és talán egyben a legismertebb ilyen cáfolat az ún. Allais paradoxon. Ez nem egyetlen kísérletet jelent, ugyanis számos más kutató megismételte Allais kísérletét és lényegében minden esetben az adódott, hogy az emberek döntései során a függetlenségi axióma nem teljesül. Mi most ennek azt a változatát ismertetjük, amelyet Kahnemann és Tversky végzett el.

Megkértek egyetemistákat, hogy bizonyos felkínált lehetőségek közül jelöljék meg azt, amelyiket választanák. Ezek a lehetőségek mind egy-egy lottónak felelnek meg. Először az alábbi kettő lottót ajánlották fel nekik (ingyen), amelyek egyikét kellett kiválasztaniuk.

- *A lottó* = ((4000 IS, 0 IS), (0.8, 0.2)), azaz ezen lottó esetén 0.8 valószínűséggel nyerhetnek 4000 IS-t vagy 0.2 valószínűséggel nem kapnak semmit. (Az IS az izraeli sékel rövidítése itt.)

[6] A hasznosságelméletről és a várható hasznosság fogalmának kialakulásáról további történeti megjegyzéseket is találhatunk a [Berde és Petró] és [Eső és Lóránd] cikkekben.

- *B lottó* $= ((3000 \text{ IS}), (1))$, azaz kockázat nélkül kapnak 3000 IS-t, ha ezt választják.

Az egyetemisták többsége, nevezetesen 80 százaléka a B lottót választotta. Ezek után az alábbi döntési helyzet elé állították őket ismét. Most is két lottó egyikét kellett választaniuk.

- *C lottó* $= ((4000 \text{ IS}, 0 \text{ IS}), (0.2, 0.8))$,
- *D lottó* $= ((3000 \text{ IS}, 0 \text{ IS}), (0.25, 0.75))$.

Ebben az esetben ugyanazon megkérdezett egyetemisták 65 százaléka adta a C választ. A kettő kísérlet alapján tehát biztosak lehetünk abban, hogy több egyetemista is volt, akik az első kérdésnél a B lottót míg a másodiknál a C lottót jelölték meg. Most tegyük fel, hogy ezek az egyetemisták a várható hasznosság maximalizálása alapján hozták meg döntéseiket. Ekkor az első döntés alapján azt kapjuk, hogy

$$U(4000) \cdot 0.8 < U(3000), \tag{12}$$

ahol U jelöli az adott egyén hasznosságfüggvényét és feltesszük, hogy $U(0) = 0$ (ezt a 3.4 Következmény miatt megtehetjük, hiszen $U(0) = 0$ egy lineáris transzformációval is elérhető). (Jegyezzük meg, hogy itt csak egyváltozós hasznosságfüggvényt tekintünk –vagy másképpen mondva a többi változót rögzítjük– ahol ezen egyetlen változónak megfelelő jószág a pénz. Ha azonban a második döntést is figyelembe vesszük, akkor abból pedig adódik, hogy

$$U(4000) \cdot 0.2 > U(3000) \cdot 0.25$$

ami nyilvánvalóan ellentmond a (12) egyenlőtlenségnek és így valójában a függetlenségi axiómának. Ennek belátásához pedig tekintsük azt a Z lottót, amely 1 valószínűséggel 0 kifizetést ad. Ekkor könnyen látható, hogy $C = 0.25A + 0.75Z$ és $D = 0.25B + 0.75Z$. Azonban a függetelenségi axióma teljesülése esetén azt kapnánk ebből, hogy

$$A \preceq B \quad \Longleftrightarrow \quad C \preceq D.$$

Egy másik kísérletben Kahnemann és Tversky először az alábbi kérdést tette fel.

I. játék: A résztvevő kap 1000 IS-t majd választania kell (a) és (b) közül:

(a) további 1000 IS nyereményt lehet elérni, melynek valószínűsége 0.5 vagy szintén 0.5 valószínűséggel nincs további nyeremény.

(b) 500 IS-t kap biztosan az, aki ezt választja.

Majd feltették a következő döntési feladatot a résztvevőknek. *II. játék:* Kap 2000 IS majd válasszon (c) és (d) közül:

(c) 1000 IS-t veszíthet 0.5 valószínűséggel vagy nem veszít semmit ugyanennyi valószínűséggel.

(d) biztosan veszít 500 IS-t.

Meglepő módon a megkérdezettek 84 százaléka választotta az első játékban I/(b)-t az I/(a)-val szemben, ám csak 27 százaléka ugyanazon megkérdezetteknek választotta II/(d)-t a II/(c) lehetőséggel szemben. Azonban vegyük észre, hogy I/(a) és II/(c) pontosan ugyanazt a lottót jelenti, nevezetesen a ((2000 IS, 1000 IS), (0.5, 0.5)) lottót, míg hasonlóan I/(b) és II/(d) is azonos, mindkettő a ((1500), (1)) lottóval írható le.

Végül még említünk egy érdekes kísérleti eredményt, amely Lichtenstein és Slovic nevéhez fűződik és a preferenciák megfordulásáról árulkodik. Két egyszerű lottót ajánlottak fel a megkérdezetteknek:

I: ezen lottó esetén nagy valószínűséggel nyerhet egy kisebb összeget,

II: ezen lottó esetén pedig egy kicsi valószínűséggel nyerhet egy nagyobb összeget.

A megkérdezettek többsége ekkor a kicsi, de majdnem biztos nyereményt preferálta, azaz az első lottót választotta. Ezt követően azonban megkérték őket arra is, hogy árazzák be ezt a két lottót. Ekkor azonban már a többség a második lottónak nagyobb árat adott, azaz preferenciái ,,megfordultak".

A fenti és ahhoz hasonló kísérletek eredményei találhatók még meg több munkában, például: [Huang és Litzenberger], [Berde és Petró], [Eső és Lóránd], [Schmidt].

Számos módon lehet a fenti és a fentiekhez hasonló eredményeket magyarázni. Mondhatjuk azt, hogy egyes esetek azt igazolják, hogy az emberek nem racionális, nem következetes döntést hoznak, vagy ha igen, akkor azt nem abban az axiómarendszerben, amelyet mi is ismertettünk korábban. A második kísérlet kapcsán egyesek azt javasolják, hogy a hasznosságfüggvény változója ne a vagyon, a teljes érték legyen, hanem csak a nyereségek és a veszteségek hasznát kellene vizsgálni. Persze egy újabb kézenfekvő megoldás az is, ha a függetlenségi axiómát helyettesítjük valami más axiómával és így próbálunk egy elméletet felépíteni. Erre is ismertek próbálkozások az irodalomban (erre további hivatkozásokat találhatunk a [Berde és Petró] és az [Eső és Lóránd] munkákban.) De jegyezzük meg végül azt is, hogy az sem probléma, ha egyes emberek nem racionális és következetes döntéseket hoznak. Ugyanis egy ilyen elmélet céljai között az is szerepel, hogy segítsen a racionális objektív döntésekben bennünket például portfoliók kiválasztásánál, s adjon erre döntési szabályokat, tanácsokat. Ha pedig erre törekszünk, akkor már nem biztos, hogy jogosak a függetlenségi axiómát ért bírálatok.

4. Kockázatkerülés

Ebben a fejezetben a hasznosságfüggvény további tulajdonságait fogjuk megismerni. Elsősorban az érdekel bennünket, hogy kockázatos jószágok vagy értékpapírok esetén milyen döntéseket hoznak az egyének (tehát akkor, amikor a jószág értéke véletlenül változhat). Az alábbiakban leírt megállapítások segítenek megérteni azt, hogy milyen körülmények esetén fog kockázatot vállalni az egyén és hogy ez milyen kapcsolatban van a hasznosságfüggvény alakjával, jellemzőivel.

4.1. A kockázatkerülés értelmezése

Jelölések. Most néhány ettől a ponttól kezdve használt jelölésbeli könnyebbséget ismertetünk. Ahogy azt már említettük, az elkövetkezendőek során egy U hasznosságfüggvény alatt mindig Neumann-Morgenstern típusú függvényt fogunk érteni (ld. 3.5 Megjegyzés), hacsak másképpen nem definiáljuk az adott esetben. Bár az U egy többváltozós függvény (méghozzá annyi változóval, ahány jószág elérhető a piacon), a tárgyalandó problémák többségében elég egyváltozós függvényt tekinteni, ahol a pénz az egyetlen változó által reprezentált jószág. Így ezen esetekben egy egyváltozós függvényként fogjuk felírni a hasznosságfüggvényt az egyszerűség kedvéért. Tehát nem jelöljük a többi változót, hiszen azt rögzítettnek tekintjük.

4.1. Definíció. *Legyen $U : I \mapsto \mathbb{R}$ egy hasznosságfüggvény, ahol $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum és ξ pedig egy alkalmas valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó I-beli értékekkel. Ekkor ξ-t játéknak nevezzük. Legyen $P \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $\mathbb{E}\,|\xi| < \infty$. Ekkor a (ξ, P) párt igazságos (fair) játéknak a P-t pedig az ξ játék igazságos (fair) árának nevezzük, ha $\mathbb{E}\,\xi = P$.*

Egy fogyasztó (vagy egyén) kockázatkerülő a $P \in I$ pontban, ha nem kíván egyetlen (ξ, P) igazságos játékot sem elfogadni, vagy közömbös velük szemben, ami alatt azt értjük, *hogy $\mathbb{E}\ U(\xi) \leq U(P)$. (Akkor mondjuk, hogy nem kíván egy játékot elfogadni, ha nem kíván abban résztvenni). Ha egy egyén kockázatkerülő a $P \in I$ pontban és nem közömbös egyetlen olyan igazságos játékkal szemben sem, melynek az ára P, akkor az egyént szigorúan kockázatkerülőnek nevezzük a $P \in I$ pontban. Ha az I intervallum minden pontjában (szigorúan) kockázatkerülő, akkor egyszerűen (szigorúan) kockázatkerülőnek fogjuk nevezni.*

4.2. Tétel. [7] *Tegyük fel, hogy $U : I \mapsto \mathbb{R}$ egy hasznosságfüggvény, ahol $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum.*
Ekkor az egyén pontosan akkor (szigorúan) kockázatkerülő a $P \in \mathbb{R}$ pontban, ha U (szigorúan) konkáv P-ben.
Továbbá az egyén pontosan akkor (szigorúan) kockázatkerülő, ha U (szigorúan) konkáv.

Bizonyítás. Csak az első állítást kell bizonyítanunk, hiszen a második annak következményeként adódik triviálisan.

Elégségesség. Tegyük fel, hogy U konkáv $P \in I$-ben. Ekkor a konkávságból következik, hogy létezik egy c konstans úgy, hogy

$$U(x) \leq c(x - P) + U(P), \qquad \forall x \in I, \tag{13}$$

és ennélfogva minden igazságos (ξ, P) játék esetén

$$U(\xi) \leq c(\xi - P) + U(P). \tag{14}$$

Vegyük a (14) egyenletben a várható értéket mindkét oldalon! Ekkor a jobb oldalon eltűnik az első tag és kapjuk a kívánt állítást:

$$\mathbb{E}\ U(\xi) \leq U(\mathbb{E}\ \xi).$$

[7] A tétel második állítását szokás az irodalomban megfogalmazni (ld. [Huang és Litzenberger]), ám a bizonyításból látható, hogy az lényegében az első pontbeli tulajdonságból adódik. Ez pedig a 4.4 Megjegyzés miatt lényeges esetünkben, ahol a 4.1 Definíció többdimenziós megfelelőjére adunk javaslatokat és fogalmazzuk meg azok alapján ezen tétel általánosabb alakját.

Szükségesség. Legyen ξ egy olyan egyszerű játék, amelynek csak kettő lehetséges kimenete van, ezek legyenek x és y, méghozzá úgy, hogy $p = \mathbb{P}(\xi = x)$ és $1 - p = \mathbb{P}(\xi = y)$, továbbá feltesszük, hogy $px + (1-p)y = P$. Ekkor a P-beli kockázatkerülésből következik, hogy

$$\mathbb{E}\,\big(U(\xi)\big) = p\,U(x) + (1-p)\,U(y) \le U(px + (1-p)y) = U(P), \tag{15}$$

ebből pedig már adódik, hogy P-ben a hasznosságfüggvény konkáv.

Ha pedig a szigorú konkávság és szigorú kockázatkerülés esetén akarjuk a tételt belátni, akkor apró módosításoktól eltekintve azonos módon bizonyítható az állítás (például a (13), (14) és (15) sorokban a szigorú egyenlőtlenségek is teljesülnek, ha $x, \xi, y \neq P$). $\square$

4.3. Megjegyzés. Jegyezzük meg, hogy valójában a 4.2 Tétel bizonyításának az első fele a Jensen egyenlőtlenség bizonyítása. Továbbá a fenti tétel lényegében annyit állít, hogy egy g valós függvény pontosan akkor konkáv, ha $\mathbb{E}\ g(\xi) \le g(\mathbb{E}\ \xi)$ teljesül minden olyan valószínűségi változó esetén, melynek értékei g értelmezési tartományába esnek.

4.4. Megjegyzés. Ugyan elsősorban pénzügyi kérdésekre keresünk a későbbiekben választ, de megemlítjük, hogy a 4.2 Tételt általánosabban is kimondhatjuk, ha bizonyos módosításokat teszünk a hozzá szükséges definíciókban. Ugyanis tudjuk kezelni azt az esetet is, amikor több jószágot tekintünk és így többváltozós a függvényünk is. Ez egyrészt elméleti szempontból lehet érdekes a mikroökonómia iránt érdeklődőknek, de a gyakorlatban is előfordulhatnak olyan problémák, ahol ilyen körülmények között kell döntést hoznunk. Ehhez először ismertetjük, hogy a 4.1 Definíció mintájára hogyan javasolhatnánk egy játék igazságos árának az értelmezését.

Ehhez legyen most $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ egy valószínűségi vektorváltozó $\mathcal{B}$-beli értékekkel és tegyük fel, hogy $\mathbb{E}\ |\xi_i| < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$. Emlékezzünk arra, hogy U a $\mathcal{B}$ halmazon van definiálva. Legyen adott egy I jövedelem és a jószágok $p_1, \ldots, p_n$ piaci árai. Jelöljük az I jövedelemhez tartozó optimális portfóliót (ld. 2.6 Tétel) $\mathbf{x}_I^{opt}$-vel. Ekkor a $P \in \mathbb{R}$ árat az egyén számára a ξ játék igazságos árának nevezzük, ha $U(\mathbb{E}\ \xi) = U\left(\mathbf{x}_P^{opt}\right)$. Ez azt jelenti ugyanis, hogy a ξ játék és a P jövedelem az egyén számára közömbös, ha a játék várható hasznossága megegyezik azzal a maximális hasznosságszinttel, amelyet a P jövedelemből vásárolható kosarakkal el tudunk érni (nyilván az optimálissal tudjuk ezt elérni). Tehát ekkor azt kapjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n} p_i x_{P,i}^{opt} = P$.

Az is jól látszik a fenti értelmezésből, hogy $n = 1$ és $p_1 = 1$ értékek választásával visszakapjuk a 4.2 Tétel feltételeit. Tehát ez valóban egy lehetséges általánosításhoz vezet.

Így a fenti tétel megfelelőjét (azaz általánosítását) az alábbi módon írhatjuk esetünkben le.

Az egyén akkor és csak akkor nem fog elfogadni egyetlen (ξ, P) *igazságos játékot sem, melyre* $\mathbb{E}\,\xi = \mathbf{x}$, *ha* U *konkáv az* $\mathbf{x}$ *pontban.*
Az egyén akkor és csak akkor nem fog elfogadni egyetlen igazságos játékot sem, ha a hasznosságfüggvénye konkáv (és ekkor ő kockázatkerülő).

Lényegében 4.2 Tétel bizonyítását ismételhetjük meg többdimenziós esetre, lépésről lépésre. Ugyanis most az U konkávsága az $\mathbb{E}\,\xi$ pontban azt jelenti, hogy létezik egy olyan $c \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre

$$U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbb{E}\,\xi) + \langle c, \mathbf{x} - \mathbb{E}\,\xi \rangle, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B},$$

teljesül (ld. [Rockafellar]), ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a belső szorzatot jelöli az $\mathbb{R}^n$ térben. Így a fentivel megegyező indoklással kaphatjuk ismét az elégségességet. A szükségesség bizonyításához pedig csak az x és y értékeit kell a (15) sorban olyan $\mathcal{B}$-beli vektorokkal helyettesíteni, hogy azok konvex lineáris kombinációja az $\mathbb{E}\,\xi$ vektort adja.

Említsük itt meg, hogy egy játék igazságosságosságának fentiekben leírt definíciója az adott egyén prerefenciarendszerétől függ. Azonban az 4.1 Definícióban még nem volt szerepe a hasznosságnak, így az a hasznosságfüggvény választásától független volt. Hiszen vegyük észre, hogy egy jószág esetén az optimális kosár minden növekvő hasznosságfüggvény esetén azonos lesz. Ám több jószág esetén az optimális allokáció különböző prerefencia-rendszerek esetén különbözhet, még akkor is, ha a jövedelmek azonosak.

Ennek bemutatására legyen U_1 és U_2 két hasznosságfüggvény. Jelölje P_1 és P_2 a ξ játék igazságos árát az U_1 illetve az U_2 függvényekre nézve. Ekkor úgy is fogalmazhatunk, hogy P_i az $\mathbf{x}_{P_i}^{i,opt}$ kosár piaci ára, ahol $\mathbf{x}_P^{i,opt}$ a P jövedelemhez tartozó optimális kosarat jelöli a megfelelő U_i $(i = 1,2)$ hasznosságfüggvény esetén. Ekkor $U_i(\mathbb{E}\,\xi) = U_i\left(\mathbf{x}_{P_i}^{i,opt}\right)$ $(i = 1,2)$, azonban $U_1\left(\mathbf{x}_{P_1}^{1,opt}\right)$ és $U_2\left(\mathbf{x}_{P_2}^{2,opt}\right)$ között bármilyen lehet a kapcsolat ugyanúgy, mint ahogy azt sem tudjuk, hogy P_1 vagy P_2 lesz-e a nagyobb ár.

Felmerülhet a kérdés: nem lehetne-e ,,megszabadulni" a hasznosság használatától egy játék igazságos árának az értelmezésénél. Találhatunk ilyen definíciót, méghozzá úgy, hogy legyen egy ξ játék ára $P = \sum_{i=1}^n p_i \mathbb{E}\,\xi_i$, amely nem más, mint az $\mathbb{E}\,\xi$ kosár piaci ára. A következőképpen magyarázhatjuk a két definíció közötti különbséget. Az első esetben rögzítettünk egy hasznosságszintet, méghozzá az $\mathbb{E}\,\xi$ kosár hasznosságát és igazságosság esetén itt pontosan azt az összeget ajánlottuk az egyénnek, amely éppen elég ahhoz, hogy a hasznosság maximalizálásával az egyén ezt a rögzített hasznosságszintet ismét el tudja érni. Ezzel szemben a második definíció esetén az egyénnek az $\mathbb{E}\,\xi$ kosár piaci árát ajánlottuk igazságosság esetén, tehát azt az árat a játékért, amellyel az $\mathbb{E}\,\xi$ kosár (és nem csak azzal azonos hasznosság) ismét megvásárolható a piacon. Ez a két definíció csak akkor ad azonos árat, ha mindössze egy jószág adott (tehát mindkettő az eredeti 4.1 Definíció általánosításaként fogható fel) vagy akkor, ha $\mathbb{E}\,\xi$ véletlenül éppen az optimális kosár, azaz $\mathbf{x}_V^{opt} = \mathbb{E}\,\xi$, ahol $V = \sum_{i=1}^n p_i \mathbb{E}\,\xi_i$. Azonban ennek ellenére az is világosan látszik, hogy a kosarak teljes halmazán (azaz globálisan) már mindkettő definíció esetén ekvivalens lesz az egyén kockázatkerülése és a hasznosságfüggvényének a konkávsága.

Tudjuk, hogy a közgazdaságtanban több olyan probléma felmerült, ahol kétféle megoldási javaslat született, s ahol a két megközelítés éppen abban különbözik egymástól, mint esetünkben. Ezt a különbséget pedig úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a következő kérdést tesszük fel: mit jelent az, hogy a korábbival azonos lehetőséget biztosítunk az egyén számára? Azt jelenti-e, hogy ugyanannak a hasznosságszintnek az elérését biztosítjuk a számára, vagy azt, hogy pontosan ugyanazt a fogyasztást biztosítjuk a számára? Más, ismert problémáknál ezt a két megközelítést Hicks illetve Slutsky nevével jelzik. Így mondhatjuk azt, hogy az általunk adott két megközelítésből az első a Hicks féle, a második pedig a Slutsky féle választ adja.

Jegyezzük meg azt is, hogy a céljainhoz az első megközelítés látszik hasznosabbnak, hiszen ez az az eset, ahol az egyén a saját preferenciái alapján hozza a döntéseit.

4.2. A kockázatkerülés mértéke

Most pedig tekintsünk egy ξ játékot és legyen $\mathbb{E}\,\xi = P$. Tegyük fel, hogy a vizsgált egyén hasznosságfüggvénye U, amely szigorúan monoton növekvő és a P pontban szigorúan konkáv. A korábbiakban leírtak miatt ekkor tudjuk, hogy nem fogja a (ξ, P) igazságos játékot elfogadni (azaz nem vesz benne részt). Az U monotonításából azt is tudjuk, hogy egyértelműen létezik egy pozitív P^* érték úgy, hogy arra

$$U(P - P^*) = \mathbb{E}\,U(\xi). \tag{16}$$

Bármely $(P - P^*, \infty)$ intervallumbeli áron is ajánlanánk az egyén számára a ξ játékot, azt biztosan nem fogadná el, ám elfogadná azt akkor, ha az ár kevesebb lenne, mint $P - P^*$. Másképpen ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy inkább hajlandó lenne még csökkenteni is a vagyonát (1 valószínűséggel) legfeljebb P^* mennyiséggel azért, hogy a ξ játék kockázatát elkerülje. Ezért nevezhetnénk a P^* értéket egyfajta biztosítási díjnak, mert ez mutatja, hogy mekkorra díjat hajlandó az egyén a biztonságos –azaz 1 valószínűséggel biztos– kimenetelű játék választásáért fizetni. Ez egyben alkalmas fogalom arra, hogy ezzel mérjük az egyén kockázatkerülését az ξ játékra vonatkozóan a P^* pontban (azaz a P^* vagyoni szint mellett). Nyilvánvaló, hogy minél magasabb biztosítási díjat hajlandó fizetni az egyén egy (ξ, P) játék esetén, annál nagyobb a kockázattal szemben az elutasítása. Világos, de ismét hangsúlyozandó, hogy P^* értéke függ a ξ játék megválasztásától is, tehát játékonként különböző.

A 4.2 Tétel alapján megérthetjük azt is, hogy miért hajlandóak az emberek a biztosítók szolgáltatásait megvásárolni. Emlékezve az ott használt gondolatmenetre és jelölésekre, most tegyük fel hogy U konvex az értelmezési tartományának egy J részhalmazában. A tétel állításának mintájára már triviálisan látható az is, hogy ekkor az egyén elfogad minden olyan igazságos ξ játékot, amelyre teljesül, hogy $\mathbb{P}(\xi \in J) = 1$. Tehát ebből már látszik az is, hogy egy egyén bizonyos kockázatokat elfogadhat, míg másokat (akár hasonló nagyságút) elutasíthat, ha a hasznosságfüggvényének egyes részei konvexek más részei pedig konkávok. Egyes szerzők ezzel magyarázzák egyébként azt a jelenséget is, hogy ugyanazon emberek miért haljandóak lottót játszani és közben más kockázatokra pedig biztosítást kötni.

A fenti előkészítés után definiáljuk az egyén különböző játékokhoz tartozó biztosítási díjainak a fogalmát.

4.5. Definíció. *Legyen U egy szigorúan konkáv, monoton növekvő hasznosságfüggvény az I intervallumon. Tegyük fel, hogy ξ egy valószínűségi változó, mely az I intervallumból vesz fel értékeket és $\mathbb{E}\,|\xi| < \infty$. Ekkor a $P(\xi) \in \mathbb{R}$ értéket a ξ játék biztosítási díjának nevezzük (az adott egyén esetén), ha $U(\mathbb{E}\,\xi - P(\xi)) = \mathbb{E}\,U(\xi)$.*

A biztosítási díj elnevezést az is indokolhatja, hogy annak konstrukciója nagyon hasonlít a biztosítástanban használt egyik elméleti díjkalkulációs elvhez. Ez az ún. zéró hasznosság elve[8], amely szerint legyen egy ξ valószínűségi változóval leírt káreloszlás esetén annyi a biztosítási díj, amennyivel a várható haszon éppen zéró. Azaz legyen P a díj, ha kielégíti az $\mathbb{E}\,U(P - \xi) = 0$ egyenletet.

[8] A fent említett elvet, más díjkalkulációs elveket és a nem-élet biztosítás egyéb kérdésköreit is megtalálhatjuk Arató Miklós nagyszerű jegyzetében ([Arató]).

4.6. Definíció. *Egy kétszer folytonosan differenciálható $U : I \mapsto \mathbb{R}$ hasznosságfüggvény esetén az*

$$R(P) = -\frac{U''(P)}{U'(P)}, \qquad P \in I,$$

mennyiséget az egyén (relatív) kockázatkerülésének nevezzük (a P szinten), ahol U az egyén hasznosságfüggvénye. Az $R_A(P) = R(P) \cdot P$ ($P \in I$) értéket pedig abszolút kockázatkerülésnek nevezzük a P szinten.

Ezt a mértéket a kockázat mérésére Arrow és Pratt vezette be. (A kockázatkerülés mértékével kapcsolatos ezen részben leírt tételhez és megállapításainkhoz ((20) formula, 4.7 Tétel) elsősorban az [Ingersoll] monográfiát vettük alapul és a [Huang és Litzenberger] művet egyes részek esetén. Azt is megjegyezzük, hogy természetesen egy befektetés, vagy egy portfólió kockázatosságát is mérhetnénk. Értékpapírok kockázatosságára még ki fogunk térni, ám megjegyzendő, hogy a portfóliók kockázatosságával már inkább a kockázatmenedzsment foglalkozik. Itt többek között a [Dowd] monográfiára hivatkozunk, ahol egy ilyen eszköz, a VaR, tárgyalása a kiemelt cél, ám ebben találhatunk egy rövid összefoglalót az egyes (portfólió) módszerek történetére vonatkozóan is, mely munkánkhoz is hasznos volt. További megjegyzéseket a felhasznált irodalomról a Bibliográfiai Megjegyzéseknél tettünk.)

Kettő olyan előnyös tulajdonságát emeljük ki, amely a használatát megkönnyíti.

Az egyik tulajdonsága az, hogy az U függvény skálázásra nézve invariáns. Ehhez emlékezzünk arra, hogy egy egyén Neumann-Morgenstern típusú hasznosságfüggvénye csak pozitív affin transzformáció erjéig meghatározott. Azonban, ha vesszük az egyén egy másik hasznosságfüggvényét, legyen ez $\tilde{U}(P) = aU(P) + b$ ($a > 0$, $b \in \mathbb{R}$), akkor

$$U''(P)/U'(P) = \tilde{U}''(P)/\tilde{U}'(P), \qquad P \in I,$$

és ebből már láthatjuk, hogy egy adott preferenciarendszer esetén az abszolút kockázatelutasítás már egyértelműen definiált minden P szinten.

Másrészt pedig az is látszik a definícióból, hogy $R(P)$ csak a hasznosságfüggvény segítségével van definiálva, tehát az már egy olyan mérték, amely nem függ a játék megválasztásától.

Felvetődik ezek után az a kérdés, hogy találhatunk-e valamilyen kapcsolatot a biztosítási díj (P^*) és a kockázatkerülés között (hiszen előbbi függ a játék megválasztásától). Található ilyen kapcsolat, méghozzá a játék kockázata (pontosabban szórása) és a kockázatkerülés segítségével becsülni tudjuk P^* értékét.

Ehhez tegyük fel, hogy $U \in \mathcal{C}^3(I)$ és tekintsük az U Taylor sorfejtését a P körül. Azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\, U(\xi) = U(P - P^*) = U(P) - U'(P)P^* + \frac{U''(\tilde{P})}{2} P^{*2} \tag{17}$$

egy alkalmas $\tilde{P} \in (P - P^*, P)$ esetén. Továbbá

$$U(\xi(\omega)) = U(P) + U'(P)(\xi(\omega) - P) + \frac{U''(P)}{2}(\xi(\omega) - P)^2 + \frac{U'''(\bar{P}(\omega))}{6}(\xi(\omega) - P)^3 \tag{18}$$

minden $\omega \in \Omega$ esetén, ahol ξ egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn értelemezett valószínűségi változó, $\bar{P}(\omega)$ pedig eleme a $\xi(\omega)$ és P végpontok által meghatározott intervallumnak minden $\omega \in \Omega$ esetén. Ha vesszük a (18) egyenletben a várható értéket mindkét oldalon, akkor az a (16) és (17) egyenletekkel együtt azt adja, hogy

$$-U'(P)P^* + \frac{U''(\tilde{P})}{2} P^{*2} = \frac{U''(P)}{2}\, Var\xi + \mathbb{E}\left(\frac{U'''(\bar{P})}{6} (\xi - P)^3 \right). \tag{19}$$

A (19) egyenletben mindkét oldalon az utolsó tag kicsi a többi taghoz képest, ha ξ a P pont egy kicsi környezetéből veszi az értékeit. Így végül az alábbi becsléshez jutottunk:

$$P^* \approx \frac{1}{2}\, R(P)\, Var\xi. \tag{20}$$

Tehát a biztosítási díj két tényező szorzataként írható fel. Az egyik tényező csak az egyéni preferenciáktól függ, míg a másik tényező csak a játék által meghatározott. Tehát, ha nőne a kockázatkerülés vagy a játék szórása, az egyaránt azt jelentené, hogy az egyén hajlandó lenne többet fizetni a kockázat elkerülése érdekében.

A (20) formula csak egy becslést adott, amely a P kicsi környezetében lesz csak viszonylag pontos. A következő tétel tovább jellemzi az abszolút kockázatkerülést és elmagyarázza, hogy miért alkalmas ez az egyén kockázathoz és annak elutasításához való viszonyának a jellemzésére.

4.7. Tétel. *Legyen $U_i : I \mapsto \mathbb{R}$ monoton növekvő, szigorúan konkáv hasznosságfüggvény $i = 1, 2$ esetén és tegyük fel, hogy $U_i \in \mathcal{C}^3(I)$, ahol I egy intervallum. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(1) *$R_1(x) > R_2(x)$ minden $x \in I$ esetén, ahol R_i $(i = 1, 2)$ a relatív kockázatkerülést jelöli egy U_i hasznosságfüggvénnyel rendelkező egyén esetén.*

(2) *Létezik egy kétszer differenciálható valós értékű G függvény az $U_2(I)$ halmazon értelmezve úgy, hogy*

$$G'(x) > 0, \quad G''(x) < 0 \qquad x \in U_2(I)$$

és

$$U_1(x) = G\big(U_2(x)\big) \quad \text{teljesül, ha} \quad x \in U_2(I). \tag{21}$$

(3) *$P_1(\xi) > P_2(\xi)$ tejesül bármely ξ valószínűségi változó esetén, melynek értékei az I intervallumban vannak és véges várható értékkel rendelkezik, ahol $P_i(\xi)$ az U_i $(i = 1, 2)$ hasznosságfüggvénnyel számolt biztosítási díjat jelöli.*

Bizonyítás.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Az U_2 szigorú monotonitása miatt a

$$G(x) := U_1(U_2^{-1}(x)), \qquad x \in U_2(I),$$

függvény definiálható, továbbá az $U_2(I)$ halmazon kétszer differenciálható és (21) is teljesül G-re. Ha a (21) egyenletben vesszük az első deriváltakat, akkor azt kapjuk, hogy

$$G'\big(U_2(x)\big)U_2'(x) = U_1'(x), \tag{22}$$

$$G''\big(U_2(x)\big)\big(U_2'(x)\big)^2 + G'\big(U_2(x)\big)U_2''(x) = U_1''(x), \quad x \in I. \tag{23}$$

Így ekkor a (22) sorból azonnal adódik $G'(x) > 0 \ \ (x \in I)$. Továbbá ha elosztjuk a (23) egyenletet az (22) egyenlettel és abban előjelet váltunk, akkor az adódik, hogy

$$\begin{aligned} R_1(x) &= \frac{-G''\big(U_2(x)\big)\big(U_2'(x)\big)^2 - G'\big(U_2(x)\big)U_2''(x)}{G'\big(U_2(x)\big)U_2'(x)} \\ &= R_2(x) - \frac{G''\big(U_2(x)\big)\big(U_2'(x)\big)}{G'\big(U_2(x)\big)}. \end{aligned} \tag{24}$$

Így a (24) második sorában a hányados pozitív kell, hogy legyen ((**1**) miatt), amiből pedig következik, hogy $G''(x) < 0$, ha $x \in I$.

(2) $\Longrightarrow$ **(3)** Most tegyük fel, hogy ξ egy valószínűségi változó I-beli értékekkel úgy, hogy $\mathbb{E}\,|\xi| < \infty$. Jegyezzük meg, hogy ekkor G konkávsága (**2**)-ből adódik. Ekkor a Jensen egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} U_1\big(\mathbb{E}\,\xi - P_1(\xi)\big) &= \mathbb{E}\,U_1(\xi) = \mathbb{E}\,G\big(U_2(\xi)\big) < G\big(\mathbb{E}\,U_2(\xi)\big) \\ &= G\Big(U_2\big(\mathbb{E}\,\xi - P_2(\xi)\big)\Big) = U_1\big(\mathbb{E}\,\xi - P_2(\xi)\big), \end{aligned}$$

és ezért $P_2(\xi) < P_1(\xi)$.

(3) $\Longrightarrow$ **(1)** Legyen most $P \in I$, $\varepsilon > 0$ és ξ egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{P}(|\xi - P| = \varepsilon) = 1$ és $\mathbb{E}\,\xi = P$. Úgy, ahogy a (17) és a (18) egyenletekben tettük, most felírjuk a Taylor sorfejtést U_1-re és U_2-re a P körül és így a (19) sor megfelelőjeként kapjuk az alábbiakat.

$$-U_i'(P)P_i(\xi) + \frac{U_i''(\tilde{P}_i)}{2}\,P_i(\xi)^2 = \frac{U''(P)}{2}\,Var\xi + \mathbb{E}\,\frac{U_i'''(\bar{P}_i)}{6}(\xi - P)^3, \qquad i = 1, 2, \tag{25}$$

ahol $|\tilde{P}_i - P| \le P_i(\xi)$ és $\bar{P}_i$ $(i = 1, 2)$ egy olyan valószínűségi változó, melyre $\mathbb{P}(|\bar{P}_i - P| \le \varepsilon) = 1$. Ha most felírjuk a (25) egyenletet $i = 1$ és $i = 2$ esetére, akkor a kettőből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P_1(\xi) - P_2(\xi) + \frac{U_2''(\tilde{P}_2)}{U_2'(P)}P_2(\xi)^2 - \frac{U_1''(\tilde{P}_1)}{U_1'(P)}P_1(\xi)^2 &= \frac{1}{2}\Big(R_1(P) - R_2(P)\Big)\varepsilon^2 \\ &+ \frac{1}{U_2'(P)}\mathbb{E}\,\frac{U_2'''(\bar{P}_2)}{6}(\xi - P)^3 - \frac{1}{U_1'(P)}\mathbb{E}\,\frac{U_1'''(\bar{P}_1)}{6}(\xi - P)^3. \end{aligned}$$

Ha ε elég kicsi, akkor

$$sgn(P_1(\xi) - P_2(\xi)) = sgn\left(P_1(\xi) - P_2(\xi) + \frac{U_2''(\tilde{P}_2)}{U_2'(P)} P_2(\xi)^2 - \frac{U_1''(\tilde{P}_1)}{U_1'(P)} P_1(\xi)^2\right)$$

$$= sgn\left(\frac{1}{2}\left(R_1(P) - R_2(P)\right)\varepsilon^2 \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{U_1'(P)} \mathbb{E}\, \frac{U_1'''(\bar{P}_1)}{6} (\xi - P)^3 - \frac{1}{U_2'(P)} \mathbb{E}\, \frac{U_2'''(\bar{P}_2)}{6} (\xi - P)^3\right)\right)$$

$$= sgn\left(\frac{1}{2}\left(R_1(P) - R_2(P)\right)\varepsilon^2\right) = sgn\big(R_1(P) - R_2(P)\big).$$

Ezért a $P_1(\xi) > P_2(\xi)$ egyenlőtlenségből következik $R_1(P) > R_2(P)$ és így a tétel bizonyítását befejeztük. $\square$

4.3. Optimális portfóliók

Az optimális portfóliók kiválasztásának a problémája egy alapvető fontosságú területe a mikroökonómiának, de különösen a pénzügyi elméleteknek és természetesen azok alkalmazásának, ahol bizonyos pénzügyi döntések meghozatalára van szükség.

Általánosan a következőképpen közelíthetjük meg a problémát: tekintsünk egy egyént (fogyasztót) vagy akár egy pénzügyi döntéseket hozó szervezetet (például pénzintézetet), és tegyük fel, hogy birtokában áll egy adott összeg, amelyből a piacon vásárol („befektet"), s így kialakítja portfólióját. A piacon ugyanakkor bizonyos pénzügyi eszközökkel kereskednek, így azok a fenti döntéshozó számára is megvásárolhatók. Ilyenek például: a valuták, a különböző értékpapírok, azaz kötvények, részvények, future szerződések, swap vagy akár opciós szerződések, de lényegében minden más, melynek árát pénzben ki tudjuk fejezni, s kereskednek vele a szükséges mennyiségben a piacon. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért a pénzügyi eszközzel azonos jelentésben fogjuk az értékpapír szót használni, azaz így fogunk nevezni bármely dolgot, amivel a piacon kereskednek és így az egyén megvásárolhatja azokat a portfóliója kialakításakor. Abban is megegyezünk, hogy a döntéshozó helyett ekvivalens módon használjuk az egyén szót, sőt még a szemléletesség kedvéért néha befektetőnek fogjuk nevezni, bár itt hangsúlyozni kell, hogy a közgazdasági elméletekben a befektető fogalmának értelmezése nem esik egybe ezzel a definícióval és a köznapi nyelvben elterjedt befektető fogalommal. Ennek megfelelően értékpapírok vásárlása esetén is néha azt fogjuk egyszerűen írni, hogy az egyén befektetett (az értékpapírba).

Ekkor nyilván az a legfontosabb feladata a befektetőnek, hogy a tőkéjét allokálja ezen pénzügyi eszközök között. Azonnal láthatjuk, hogy ez a probléma teljesen analóg azzal a (nem bizonytalan körülmények közötti) választási problémával, amelyet a 2.4 részben tárgyaltunk. Ismét adott egy feltételes optimalizálási feladat, ahol esetünkben a feltételt elsősorban a rögzített kezdeti tőke jelenti, ám rögtön megjegyezzük, hogy további feltételek is korlátozhatnak még bennünket; például egyes esetekben a fedezet nélküli részvényeladás (short sale) nem megengedett, vagy csak korlátozottan engedélyezett.

Azonban van egy lényegi különbség a két optimalizálási probléma között. Nevezetesen: az optimális jószágkosár meghatározásánál nem volt bizonytalan körülmény a modellben, a jószágok ára és az általuk okozott haszon előre ismert volt minden választható kosár esetén (ld. 2.4, 2.5 részeket). Azonban az optimális portfólió keresése során olyan pénzügyi eszközökből kell választanunk, amelyek jövőbeli ára nem ismert előre, hiszen annak változása véletlen, így portfóliónk jövőbeli értéke, s ennélfogva hasznossága sem ismert előre.

Az elkövetkezendőek során egy $[0, T]$ időintervallumot fogunk tekinteni, ahol 0 a portfólió meghatározásának ideje, T pedig egy jövőbeli időpont, amelyet nevezhetünk akár más hasonló pénzügyi problémák mintájára lejárati időnek. Az értékpapírok árai a $[0, T]$ időszakban véletlenszerűen változhatnak, azonban azt fel fogjuk tenni, hogy a döntéshozó ismeri ezen véletlen változások eloszlását. Most egy egyszerű egylépéses modellt fogunk tanulmányozni, ami azt jelenti, hogy csak egyszer változnak az árak a vizsgált periódus alatt, méghozzá a T időpontban. Ezzel szemben a többlépéses modellekben az árak többször változhatnak, míg azon modelleket nevezzük folytonosnak[9], amelyek esetén az árak állandóan, a periódus minden pontjában változhatnak.

Tekintjük majd a lehetséges (az egyén számára elérhető) allokációk halmazát, amelyeket portfólióknak fogunk nevezni. Célunk adott szempont szerint az optimális portfólió meghatározása. Ezen szempontot később írjuk le. Nyilvánvaló ekkor, hogy a portfólió értéke éppen a kezdeti tőkével egyenlő a 0 időpontban, ugyanakkor véletlen, így előre nem ismert a lejáratkori értéke. Ezen modellben azt a portfóliót fogjuk keresni és optimálisnak nevezni, mely a legnagyobb várható hasznosságot biztosítja a lehetséges portfóliók között. Persze nem ez az egyetlen módja az optimális portfólió értelmezésének. Kereshetnénk például csak azon portfóliók között a legnagyobb várható hasznosságút, melyek egy előre megadott minimális értéket biztosan el fognak érni. Vagy kereshetnénk a minimális szórású portfóliót azok között, amelyek egy megadott szintet elérő várható hasznossággal rendelkeznek.

Ahogy már mondtuk, mi a maximális várható hasznosságú portfóliót fogjuk keresni. Feltesszük, hogy az egyik értékpapír ára determinisztikus lesz, tehát nem függ véletlentől. Ezt fogjuk a 0 indexszel jelölni, míg az ehhez tartozó megtérülési rátát vagy hozamot (amelyet akár kamatlábnak is nevezhetnénk) r_0 fogja jelölni. Ez természetesen azt jelenti, hogy a 0 időpontban vásárolva β_0 értékben az adott értékpapírból, az $\beta_0(1 + r_0)$ értékkel fog rendelkezni a lejárati T időpontban.

Ennek mintájára az i-edik értékpapír hozamát r_i fogja jelölni, amely viszont egy valószínűségi változó lesz. Tehát akár véletlen kamatlábnak is nevezhetnénk az r_i-t, s ennek értelmében $\beta_i(1 + r_i)$ értéket fog a befektető birtokolni az i-edik értékpapírból a lejárati időben, ha arra β_i összeget költött a döntés meghozatalakor. Legyen X_0 a kezdeti tőke (amelyet be fog fektetni a döntéshozó) és β_i $(i = 1, \ldots, n)$ pedig jelölje azt, hogy az i-edik értékpapírra mekkora összeget költött a befektető. Tehát ekkor adott egy $\pi = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$

[9]Folytonos és többlépéses diszkrét idejű portfóliódöntésekkel, optimális stratégiákkal kapcsolatos munkák például: [Duffie] és [Korn].

portfólió, amelynek értéke $X_0 = \sum_{i=0}^n \beta_i$ a 0 időpontban és

$$\begin{aligned} X_T^\pi = \sum_{i=0}^n \beta_i(1+r_i) &= \left(X_0 - \sum_{i=1}^n \beta_i\right)(1+r_0) + \sum_{i=1}^n \beta_i(1+r_i) \\ &= X_0(1+r_0) + \sum_{i=1}^n \beta_i(r_i - r_0) \end{aligned} \tag{26}$$

a T időpontban.

4.8. Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *egy valószínűségi mező,* $r_0 > 0$ *és* $i = 1, \ldots, n$ *esetén legyen* $r_i : \Omega \mapsto (-1, \infty)$ *egy valószínűségi változó ezen a mezőn úgy, hogy* $\mathbb{E}\ r_i^2 < \infty$ *és* $\mathbb{P}(r_i = r_0) < 1$. *Legyen továbbá* $r = (r_0, r_1, \ldots, r_n)$.
Ekkor az $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, n\}$ *halmazt egy (*$n+1$ *értékpapírból álló) értékpapírpiacnak nevezzük. Egy* $n+1$ *dimenziós* $\pi = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ *vektort (*$\beta_i \in \mathbb{R}$*) portfóliónak fogunk nevezni, ahol* β_i *azt a pénzmennyiséget jelöli, amelyet az* i*-edik értékpapírba fektettünk.*

Jegyezzük meg, hogy a $\mathbb{P}(r_i = r_0) < 1$ feltétel nem jelent valódi megszorítást, hiszen egy értékpapír nem lenne különböző a kockázatmentes r_0 kamatot ígérő értékpapírtól, ha a hozama teljesítené a $\mathbb{P}(r_i = r_0) = 1$ egyenletet.

Érdemes továbbá azt is feltételezni (bár ezt a 4.8 Definíció nem tartalmazza), hogy egy adott értékpapír hozama r_0-nál kisebb illetve nagyobb értékeket egyaránt pozitív valószínűséggel vehet fel. Ha ugyanis vagy $\mathbb{P}(r_i \geq r_0) = 1$ vagy $\mathbb{P}(r_i \leq r_0) = 1$ teljesülne, akkor tetszőlegesen nagy profitot lehetne elérni azzal, hogy kölcsönt vennénk fel a 0 indexű értékpapírból és az így nyert összeget az i indexű papírba fektetnénk az első esetben, illetve éppen ennek a fordítottját cselekednénk a második esetben.

A fentiekben leírt stratégia lényegében egy arbitrázs lehetőséget használ ki, hiszen segítségével kezdeti tőke nélkül és kockázatmentesen tudunk profithoz jutni. A fentiekhez hasonlóan így azt is érdemes általában megkövetelni, hogy a $\mathbb{P}(r_i \leq r_j) < 1$ feltétel teljesüljön $i \neq j$ esetén, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

4.9. Jelölés. *A továbbiakban feltesszük, hogy a T lejárati időpontban fogja a befektető a hozamokat realizálni és X_T^π fogja jelölni egy π portfólió értékét a T időpontban, ahogy azt már a (26) sorban is használtuk. Definiáljuk ekkor a*

$$C_{X_0} = \left\{ \pi \;\middle|\; \pi = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=0}^{n} \beta_i = X_0 \right\}$$

halmazt, amelyet az X_0 kezdeti tőke mellett lehetséges portfóliók halmazának nevezünk, ahol feltételeztük, hogy az értékpapírok kereskedésében semmiféle korlátozás nincs és ennélfogva β_i tetszőleges (tehát akár negatív) valós értéket is felvehet.

Az alábbi lemma céljainkhoz kulcsfontosságú, ugyanis azt tárgyaljuk, hogy hogyan lehet az optimális portfóliót megkeresni (ld. (28) egyenlet). Itt tárgyaljuk az egyértelműség kérdését is, ám csak később fogjuk vizsgálni, hogy mi biztosítja az optimális portfólió létezését (ld. 4.12 Tétel).

4.10. Lemma. *Legyen $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ egy szigorúan konkáv hasznosságfüggvény, $X_0 > 0$ és tegyük fel, hogy $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, n\}$ egy értékpapírpiac.*
Ekkor a π^* portfólió akkor és csak akkor optimális az

$$\mathbb{E}\, U\left(X_T^{\pi^*}\right) = \max_{\pi \in C_{X_0}} \mathbb{E}\, U\left(X_T^\pi\right) \tag{27}$$

értelemben, ha

$$\mathbb{E}\left(U'\big(X_T^{\pi^*}\big)(r_i - r_0)\right) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{28}$$

Továbbá az $r_1, \ldots, r_n$ valószínűségi változók függetlensége, azaz az értékpapírok hozamának a függetlensége esetén az optimális portfólió (persze feltéve, hogy létezik ilyen) egyértelmű.

Bizonyítás. Jegyezzük először meg, hogy a portfólió n koordinátáját szabadon megválaszthatjuk, ha azt akarjuk elérni, hogy $\pi \in C_{X_0}$ teljesüljön, hiszen ekkor azok a maradék egy koordináta értékét egyértelműen meghatározzák. Legyen $\pi = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in C_{X_0}$ és definiáljuk az

$$F(\beta_1,\ldots,\beta_n) := \mathbb{E}\, U\left(X_T^\pi\right) = \mathbb{E}\, U\left(X_0(1+r_0) + \sum_{i=1}^n \beta_i(r_i - r_0)\right) \tag{29}$$

függvényt. A célunk az F függvény maximumának megkeresése $\mathbb{R}^n$-ben. Mivel $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, így ha felírjuk annak az elsőrendű szükséges feltételét, hogy a $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$ pontban a maximum eléretik, akkor abban a várható érték és a differenciálás felcserélhető. Ezért azt kapjuk, hogy

$$0 = \frac{\partial}{\partial\beta_i}F(\beta) = \mathbb{E}\,\frac{\partial}{\partial\beta_i}U\left(X_T^\pi\right) = \mathbb{E}\Big(U'\big(X_T^\pi\big)(r_i - r_0)\Big).$$

Az F függvény $\mathbb{R}^n$ felett konkáv, amelyet az alábbi módon ellenőrizhetünk. Legyen $\beta \in \mathbb{R}^n$ és $z_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,\ldots,n)$ és definiáljuk a $\pi = (X_0 - \sum_{i=1}^n \beta_i, \beta_1,\ldots,\beta_n)$ portfóliót. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n z_i z_j \frac{\partial^2 F(\beta)}{\partial\beta_i\partial\beta_j} &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n z_i z_j \mathbb{E}\, U''\left(X_T^\pi\right)(r_i - r_0)(r_j - r_0)\\ &= \mathbb{E}\, U''\left(X_T^\pi\right)\left(\sum_{i=1}^n z_i(r_i - r_0)\right)^2 \le 0,\end{aligned} \tag{30}$$

hiszen U'' mindenhol negatív. A (30) sorból pedig már látszik, hogy F konkáv, ami azt jelenti egyben, hogy a maximumra felírt (28) elsőrendű szükséges feltétel egyben elégséges is.

Tegyük most fel, hogy létezik optimum. Ekkor a (28) egyenletből az adódik, hogy $\mathbb{P}(r_j - r_0 < 0) > 0$ és ezért $\mathbb{P}(r_j - r_0 > 0) > 0$ is teljesül $j = 1,\ldots,n$ esetén. Így ha a kockázatos piaci értékpapírok hozamai függetlenek, akkor a (30) egyenlőtlenség bal oldala negatív lesz abban az esetben, ha valamely $\{1,\ldots,n\}$ halmazbeli i index esetén $z_i \neq 0$ teljesül. Ebből pedig az adódik, hogy az F függvény $\mathbb{R}^n$-ben szigorúan konkáv és ennélfogva az optimum egyértelmű. $\square$

4.4. Értékpapírok kereslete

Láttuk korábban, hogy a kockázatkerülés jellemzi az egyén bizonytalan körülmények közötti döntéseit. Felvetődik ezért a kérdés, hogy milyen kapcsolat van az egyén kockázatkerülése és az általa kiválasztott optimális portfólió között. Az alábbiakban bemutatjuk, hogy valóban található ilyen kapcsolat. Ennek megmutatására egy olyan egyszerű értékpapírpiacot fogunk tekinteni, ahol csak egyetlen kockázattal járó értékpapír van a kockázatmentes mellett.

Tudjuk, hogy a közgazdaságtanban azokat a jószágokat nevezzük normál jószágoknak, amelyek kereslete növekszik a fogyasztó jövedelmének (vagy vagyonának) a növekedése esetén. Egy jószág pedig inferior, ha a jövedelemnövekedés a jószág keresletének csökkenésével párosul. Most ugyanezen fogalmakat definiáljuk értékpapírok esetére is.

4.11. Definíció. *Tegyük fel, hogy U egy szigorúan konkáv, monoton növekvő hasznosság-függvény és $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, n\}$ pedig egy értékpapírpiac. Tegyük továbbá azt is fel, hogy minden $X > 0$ kezdeti tőke esetén létezik optimális portfólió abban az értelemben, ahogy azt a (27) sorban definiáltuk. Legyen ennek jelölése $\pi(X) = (\beta_0(X), \ldots, \beta_n(X))$.*

Ekkor az i indexű értékpapírt ($i \in \{0, \ldots, n\}$) normálnak nevezzük, ha $\beta_i(X)$, azaz az értékpapír X jövedelemszinthez tartozó kereslete az X változó egy monoton növekvő függvénye. Hasonlóan, az értékpapír inferior, ha β_i monoton csökkenő X-ben.
Ha β_i nullától különböző az X pontban és differenciálható X-ben, akkor az

$$\varepsilon_i(X) = \frac{\frac{d\beta_i(X)}{dX}}{\frac{\beta_i(X)}{X}} = \frac{d\beta_i(X)}{dX}\frac{X}{\beta_i(X)}, \quad X > 0,$$

mennyiséget az i értékpapír keresletének jövedelemrugalmassága az X jövedelemszinten.

Lényegében az értékpapír keresletének jövedelemrugalmassága azt mutatja, hogy 1 százalékos jövedelemnövekedés az értékpapír keresletében hány százalékos növekedést okoz. Tehát egy 1-nél nagyobb jövedelemrugalmasság azt jelenti, hogy a jövedelem növekedése esetén az optimális portfólióban az adott értékpapír aránya növekedni fog a többi értékpapír arányához képest, míg $\varepsilon(X) \in [0,1)$ esetén ez az arány pedig természetesen csökkenni fog. Az $\varepsilon(X) = 1$ esetben pedig nyilván nem lesz változás ebben az arányban. Végül említsük meg, hogy negatív rugalmasság esetén az adott értékpapír kereslete maga is csökkenni fog a jövedelem növekedése esetén (s nem csak egyszerűen a többihez képest lesz kisebb az aránya a portfólióban).

Korábban már láttuk, hogy az optimális portfóliót a 4.10 Lemmában leírt (28) feltétel segítségével tudjuk megkeresni, ahol az optimális portfólió egyértelműségét is vizsgáltuk. A következő tételben pedig egyrészt tárgyaljuk az optimális portfólió létezésének elégséges feltételét, másrészt látni fogjuk azt is, hogy milyen kapcsolatban vannak az egyes értékpapírokból vásárolt mennyiségek (előjelei) a papírok várható hozamával..

4.12. Tétel. [10] *Legyen $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ egy monoton növekvő, szigorúan konkáv hasznosságfüggvénye egy egyénnek, aki $X_0 > 0$ kezdeti tőkével rendelkezik egy egy kockázatos értékpapírt tartalmazó $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, 1\}$ értékpapírpiacon. Tegyük fel továbbá, hogy $\pi^* = (\beta_0^*, \beta_1^*)$ jelöli az X_0-hoz tartozó optimális portfóliót a (27) egyenletbeni értelemben.*

Ekkor

$$\beta_1^* > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{E}\, r_1 > r_0$$

és hasonlóan

$$\beta_1^* < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{E}\, r_1 < r_0.$$

Minden $X > 0$ jövedelem esetén létezik optimális portfólió, ha a

$$\lim_{x\to\infty} U'(x) = 0 \qquad \text{vagy} \qquad \lim_{x\to-\infty} U'(x) = \infty$$

feltételek közül legalább az egyik teljesül.

Bizonyítás. Tekintsük ismét a (29) sorban definiált F függvényt, amely esetünkben egyváltozós. Legyen $\pi_0 = (X_0, 0)$ egy portfólió. Ekkor F első deriváltját véve a 0 pontban

[10] A tétel első állítását lényegében ebben a formában találhatjuk az [Ingersoll] műben, a létezésre vonatkozó állítás bizonyításának ottani tárgyalása nem elégséges, így az nem egyezik az általunk leírtakkal.

azt kapjuk, hogy

$$F'(0) = \mathbb{E}\, U'\left(X_T^{\pi_0}\right)(r_1 - r_0) = U'\big(X_0(1+r_0)\big)(\mathbb{E}\, r_1 - r_0). \tag{31}$$

Mivel F szigorúan konkáv és $U' > 0$ mindenhol, így (31)-ből könnyű látni, hogy az F maximumának a helye pontosan akkor van a pozitív félegyenesen, ha $\mathbb{E}\ r_1 - r_0 > 0$ és pontosan akkor kisebb nullánál, ha $\mathbb{E}\, r_1 - r_0 < 0$.

Az 4.10 Lemma bizonyításában megmutattuk, hogy F szigorúan konkáv, amiből pedig könnyű látni, hogy F' szigorúan monoton csökkenő. Most a monoton konvergencia tételének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta\to\infty} F'(\beta) &= \lim_{\beta\to\infty} \mathbb{E}\, U'\big(X_0(1+r_0) + \beta(r_1 - r_0)\big)(r_1 - r_0) \\
&= \mathbb{E}\ \lim_{\beta\to\infty}\Big[U'\big(X_0(1+r_0) + \beta(r_1 - r_0)\big)(r_1 - r_0)\Big]^+ \\
&\quad + \mathbb{E}\ \lim_{\beta\to\infty}\Big[U'\big(X_0(1+r_0) + \beta(r_1 - r_0)\big)(r_1 - r_0)\Big]^- \\
&= u_+\mathbb{E}\,[r_1 - r_0]^+ + u_-\mathbb{E}\,[r_1 - r_0]^-,
\end{aligned} \tag{32}$$

ahol $u_+ = \lim_{x\to\infty} U'(x)$, $u_- = \lim_{x\to-\infty} U'(x)$ és $[\cdot]^+ = \max(0,\cdot)$, $[\cdot]^- = \min(0,\cdot)$. Vegyük észre, hogy $\mathbb{E}\ [r_1 - r_0]^+ > 0$ és $\mathbb{E}\ [r_1 - r_0]^- < 0$. Ezért világos, hogy a (32) egyenlet jobb oldala vagy negatív vagy pedig $-\infty$ abban az esetben, ha $u_+ = 0$ vagy $u_- = \infty$ teljesül. Hasonló gondolatmenettel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta\to-\infty} F'(\beta) &= \mathbb{E}\ \lim_{\beta\to-\infty}\Big[U'\big(X_0(1+r_0) + \beta(r_1 - r_0)\big)(r_1 - r_0)\Big]^+ \\
&\quad + \mathbb{E}\ \lim_{\beta\to-\infty}\Big[U'\big(X_0(1+r_0) + \beta(r_1 - r_0)\big)(r_1 - r_0)\Big]^- \\
&= u_-\mathbb{E}\,[r_1 - r_0]^+ + u_+\mathbb{E}\,[r_1 - r_0]^- > 0,
\end{aligned} \tag{33}$$

ha $u_+ = 0$ vagy $u_- = \infty$ teljesül. Végül a Darboux tétel miatt tudjuk, hogy létezik egy β pont, ahol F' eltűnik és ezért (28) teljesül. □

A következő két tétel teremti meg a kapcsolatot az egyéni kereslet és az egyén kockázatkerülése között relatív illetve abszolút kockázatkerülés esetén. Ez egyben újabb érv a kockázatkerülés ezen mértékének használatára.

4.13. Tétel. [11] *Tegyük fel, hogy* $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ *egy monoton növekvő, szigorúan konkáv hasznosságfüggvény és* $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, 1\}$ *egy egy kockázatos értékpapírt tartalmazó értékpapírpiac úgy, hogy kockázatos értékpapír* $\mathbb{E}\, r_1 - r_0$ *kockázati prémiuma pozitív. Tegyük fel továbbá, hogy minden* $X > 0$ *kezdeti tőke esetén létezik optimális portfólió és jelölje ezt* $\pi(X)$.

Ha egy U *hasznosságfüggvénnyel rendelkező egyén* R *kockázatkerülése szigorúan csökkenő* $\mathbb{R}$*-ben, akkor a kockázatos értékpapír egy normál értékpapír (az adott egyén esetén). Ha* R *szigorúan növekvő* $\mathbb{R}$*-ben, akkor a kockázatos értékpapír inferior.*
Ha a relatív kockázatkerülés konstans $\mathbb{R}$*-ben, akkor a kockázatos értékpapír egyéni kereslete is konstans függvénye a jövedelemnek.*

Bizonyítás. Definiáljuk az

$$f(X,\beta) = \mathbb{E}\,\big(U'\big(X(1+r_0)+\beta(r_1-r_0)\big)(r_1-r_0)\big), \qquad (X,\beta)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$$

függvényt és vegyük észre, hogy ekkor f folytonos parciális deriváltakkal rendelkezik, és

$$\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial\beta} = \mathbb{E}\,\big(U''\big(X(1+r_0)+\beta(r_1-r_0)\big)(r_1-r_0)^2\big) < 0 \qquad \forall (X,\beta)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}.$$

Az implicit függvény tétel (ld. Függelék, 8.2 Tétel) segítségével azt kapjuk, hogy létezik egy $\beta\in\mathcal{C}^1\big((0,\infty)\big)$ függvény úgy, hogy

$$f\big(X,\beta(X)\big) = 0 \qquad \text{ha} \quad X\in(0,\infty)$$

és ebből azt kapjuk, hogy $Y>0$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{df\big(Y,\beta(Y)\big)}{dY} &= \mathbb{E}\,U''\left(X^{\pi(Y)}\right)\big((1+r_0)+\beta'(Y)(r_1-r_0)\big)(r_1-r_0)\\ &= \mathbb{E}\,U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(1+r_0)(r_1-r_0)+\beta'(Y)\mathbb{E}\,U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0)^2 = 0.\end{aligned}$$

Emlékezzünk arra, hogy $U''(x)<0$, $x\in\mathbb{R}$, és $\mathbb{P}(r_1\neq r_0)>0$. Ekkor

$$\frac{d\beta}{dY} = \frac{\mathbb{E}\,U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(1+r_0)(r_1-r_0)}{-\mathbb{E}\,U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0)^2}, \qquad Y>0, \tag{34}$$

[11] A tétel és az ezt követő tétel bizonyításait [Huang és Litzenberger] alapján végezzük.

és ezért

$$
\begin{aligned}
sgn\left(\frac{d\beta}{dY}\right) &= sgn\left(\frac{\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(1+r_0)(r_1-r_0)}{-\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0)^2}\right) \\
&= sgn\Big(\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0)\Big).
\end{aligned} \tag{35}
$$

Most tegyük fel, hogy R szigorúan monoton növekvő. Ekkor

$$
R\big(Y(1+r_0)\big) \geq R\left(X^{\pi(Y)}\right) = R\big(Y(1+r_0)+\beta(Y)(r_1(\omega)-r_0)\big) \tag{36}
$$

minden $\omega \in \{\ r_1 \geq r_0\ \}$ esetén (ahol jegyezzük meg, hogy $\beta(Y) > 0$ teljesül a (4.12 Tétel szerint) és

$$
R\big(Y(1+r_0)\big) < R\left(X^{\pi(Y)}\right) = R\big(Y(1+r_0)+\beta(Y)(r_1(\omega)-r_0)\big) \tag{37}
$$

minden $\omega \in \{\ r_1 < r_0\ \}$ esetén. Majd a $-U'\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1(\omega)-r_0)$ értékkel szorozzuk meg ezután a (36) és (37) sorokat és vegyük a várható értéket. Azt kapjuk, hogy

$$
\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0) > -R\big(Y(1+r_0)\big)\mathbb{E}\, U'\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0) = 0,
$$

ami a (35) egyenlettel együtt az első állítást adja.

A második állítást teljesen analóg módon lehet bizonyítani, míg a harmadik állítás pedig már egy triviális következménye az első kettőnek. □

4.14. Tétel. *Tegyük fel, hogy a 4.13 Tétel feltételei teljesülnek.*

Ha az egyén R_A abszolút kockázatkerülése szigorúan monoton növekvő $\mathbb{R}$-ben, akkor az egyéni kereslet jövedelemrugalmassága 1-nél kisebb.
Ha R_A szigorúan monoton csökkenő $\mathbb{R}$-ben, akkor az egyéni kereslet jövedelemrugalmassága 1-nél nagyobb.
Végül pedig, ha az egyén abszolút kockázatkerülése konstans, akkor az egyéni kereslet jövedelrugalmassága éppen 1.

Bizonyítás. A (34) formula segítségével az alábbi alakban írhatjuk fel a jövedelem-rugalmasságot. (Az egyszerűség kedvéért ε fogja most jelölni a piac egyetlen kockázatos értékpapírjának a keresletrugalmasságát a bizonyítás során.)

$$\begin{aligned}
\varepsilon(Y) &= \frac{d\beta(Y)}{dY}\frac{Y}{\beta(Y)} = 1 + \frac{\frac{d\beta(Y)}{dY}Y - \beta(Y)}{\beta(Y)} \\
&= 1 + \frac{\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(1+r_0)(r_1-r_0)Y + \beta(Y)\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0)^2}{-\beta(Y)\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0)^2} \\
&= 1 + \frac{\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0)\left(X^{\pi(Y)}\right)}{-\beta(Y)\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0)^2}
\end{aligned}$$

Ebből pedig adódik, hogy

$$sgn(\varepsilon(Y)-1) = sgn\Big(\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0).\left(X^{\pi(Y)}\right)\Big) \tag{38}$$

Tekintsük azt az esetet, amikor R_A szigorúan monoton csökkenő. Ekkor

$$\begin{aligned}
U''\left(X^{\pi(Y)}(\omega)\right)\left(X^{\pi(Y)}(\omega)\right)(r_1(\omega)-r_0) &= -R_A\Big(\left(X^{\pi(Y)}(\omega)\right)\Big)U'\left(X^{\pi(Y)}(\omega)\right)(r_1(\omega)-r_0) \\
&\le -R_A\big(Y(1+r_0)\big)U'\left(X^{\pi(Y)}(\omega)\right)(r_1(\omega)-r_0),
\end{aligned}$$

ha $r_1(\omega) \ge r_0$ vagy $r_1(\omega) < r_0$ és tudjuk azt is, hogy $\mathbb{P}(r_1(\omega) < r_0) > 0$. Így végül azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0) < -R_A\big(Y(1+r_0)\big)\mathbb{E}\, U'\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0) = 0,$$

ami a (38) egyenlettel együtt azt jelenti, hogy az állítást beláttuk.

Világos, hogy a tétel másik két állításának bizonyítása már analóg gondolatmenettel belátható. $\square$

5. Sztochasztikus dominancia

Eddig több olyan fogalmat ismertettünk, amelyek segítségével jellemezni tudtuk az egyének preferenciarendezésének tulajdonságait a bizonytalan körülmények közötti döntéshozatalok esetén; például azt, hogy az értékpapírpiacon hogyan reagálnak egyes szituációkban. Természetesen vetődik fel a kérdés: hogyan lehetne (milyen tulajdonságokkal) jellemezni a piacokon található értékpapírokat például annak érdekében, hogy azok kockázatosságát össze tudjuk vetni? Olyan eszközt szeretnénk találni, melynek segítségével meg lehet mondani, hogy a döntéshozók egyes csoportja hogyan hozza ezen értékpapírokkal kapcsolatos döntéseit. A korábbiakból már talán következik az is, hogy az általunk vizsgált döntéshozói (fogyasztói) csoportok egyrészt a kockázatkerülő emberek csoportja, másrészt a ,,többet a kevesebbnél preferáló" egyének csoportja lesz.

Ezen részben a fenti vizsgálatokhoz az első és a másodrendű sztochasztikus dominancia fogalmát fogjuk használni. Ennek kidolgozását a [Cohn] és a [Huang és Litzenberger] könyvekben leírtakra támaszkodva ismertetjük elsősorban (5.2 és 5.3 Tételek), ahol a [Cohn] monográfia nagy segítséget adott néhány egyszerű valós függvénytani problémához. Egyben azt is megjegyezzük, hogy a [Huang és Litzenberger] műben leírtak jelentették a motivációt az 5.1-5.3 részekben ismertetett példák konstruálására. (További megjegyzéseket tettünk a felhasznált irodalomról a Bibliográfiai Megjegyzésekben.)

5.1. Definíció. *Legyen $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, n\}$ egy értékpapírpiac és tegyük fel, hogy a döntéshozó U hasznosságfüggvénye folytonos. Legyen $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Ekkor azt mondjuk, hogy az egyén az i indexű értékpapírt jobban kedveli, azaz preferálja a j indexű értékpapírral szemben, ha

$$\mathbb{E}\, U(1 + r_i) \geq \mathbb{E}\, U(1 + r_j).$$

Az i indexű értékpapír elsőrendben sztochasztikusan dominálja a j indexű értékpapírt, *ha minden monoton növekvő és folytonos hasznosságfüggvénnyel rendelkező egyén (tehát akik „a többet preferálják a kevesebbel szemben") az i indexű értékpapírt preferálja a j indexű értékpapírral szemben. Ezt a relációt úgy fogjuk jelölni, hogy $r_i \succcurlyeq_{FSD} r_j$ vagy $r_j \preccurlyeq_{FSD} r_i$.*

Azt mondjuk továbbá, hogy az i indexű értékpapír másodrendben sztochasztikusan dominálja a j indexű értékpapírt, ha minden kockázatkerülő egyén (tehát azok, akiknek konkáv a hasznosságfüggvénye) az i indexű értékpapírt preferálja a j indexű értékpapírral szemben. Ezt pedig $r_i \succcurlyeq_{SSD} r_j$ vagy $r_j \preccurlyeq_{SSD} r_i$ fogja jelölni.

Tehát a definíció szerint akkor fogjuk a i indexű értékpapírt (melynek hozama r_i) jobbnak nevezni az egyén számára a j indexű értékpapírnál (melynek hozama r_j), ha az egyén U hasznosságfüggvényét használva $\mathbb{E}\ U(1 + r_i) \geq \mathbb{E}\ U(1 + r_j)$ teljesül. Másképpen ezt úgy is mondhatjuk, hogy egy egység pénz befektetése esetén nagyobb várható hasznosságot eredményez annak az i értékpapírba való befektetése, mint a j értékpapírba való befektetése. Azonban vegyük észre, hogy ebben az összehasonlításban a sztochasztikus dominancia definíciója esetén nincs jelentősége annak, hogy az előbbi fogalom definíciójában a pénz mennyisége (az összehasonlításnál) éppen 1 egység. Ugyanis a definícióban leírt tulajdonságot a hasznosságfüggvények egy egész családjára követeljük meg. Azt pedig már könnyű látni, hogy ha módosítanánk annak a relációnak a definícióját, mely megmondja, hogy az egyén milyen esetben preferál egy értékpapírt egy másikkal szemben, például úgy, hogy abban $\mathbb{E}\ U(1 + r_i) \geq \mathbb{E}\ U(1 + r_j)$ helyett $\mathbb{E}\ U(r_i) \geq \mathbb{E}\ U(r_j)$ egyenlőtlenséget írnánk, akkor a sztochasztikus dominancia fenti definíciója (akár az elsőrendű akár a másodrendű) a korábbival ekvivalens fogalomhoz vezetne. (A fent javasolt módosítás egyébként azt mondaná, hogy ne a befektetés várható hasznát, hanem a hozamának a várható hasznát vessük össze.)

5.1. Elsőrendű sztochasztikus dominancia

A következő tétel az elsőrendű sztochasztikus dominancia fogalmát segít értelmezni.

5.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, n\}$ *egy értékpapírpiac,* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *és teljesül, hogy* $\mathbb{P}(r_i < u) = \mathbb{P}(r_j < u) = 1$ *egy* u *valós szám esetén.*

Ekkor

$$r_i \succcurlyeq_{FSD} r_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad F_i(x) \leq F_j(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

ahol F_k *az* r_k *hozam eloszlásfüggvénye,* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Bizonyítás. Definiáljuk a következő függvényt:

$$G(z) = F_i(z) - F_j(z) \qquad z \in \mathbb{R},$$

és tegyük fel, hogy $U \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ monoton növekvő. Ekkor U folytonossága együtt a parciális integrálás formulájával (ld. Függelék, 8.3 Tétel) azt adja, hogy

$$\begin{aligned} &\int_{[-1,u]} U(1+z)dG(z) + \int_{[-1,u]} G(z)dU(1+z) \\ &= U(1+u)G(u) - U(0)G(-1) = 0, \end{aligned} \tag{39}$$

hiszen $G(u) = G(-1) = 0$. Innen pedig $r_i \succcurlyeq_{FSD} r_j$ adódik, azaz pontosan akkor teljesül

$$\mathbb{E}\, U(1+r_i) - \mathbb{E}\, U(1+r_j) = \int_{[-1,u]} U(1+z)dG(z) \geq 0$$

minden monoton növekvő $U \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ függvény esetén, ha teljesül

$$\int_{[-1,u]} G(z)dU(1+z) \leq 0$$

minden monoton növekvő $U \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ függvény esetén, amit ekvivalens módon úgy is írhatunk, hogy $G(z) \geq 0$ majdnem biztosan minden $z \in \mathbb{R}$ esetén. Ezzel az állítást beláttuk. □

A tétel állítása alapján már tudjuk, hogy egy értékpapír elsőrendű sztochasztikus dominanciája egy másik értékpapír felett azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy egy adott szintet a papír hozama meghalad, a domináns értékpapírnál minden szint esetén nagyobb vagy egyenlő, mint a másik értékpapír esetén. Ebből speciálisan az is adódik persze, hogy egy elsőrendben sztochasztikusan domináns értékpapír hozamának a várható értéke legalább akkora, mint a dominált papíré.

Azonban fontos hangsúlyozni, hogy ezen állítás megfordítása nem igaz. Tegyük fel például, hogy az első értékpapír hozama egyenletes eloszlású a $[-0.5, 0.5]$ intervallumon, míg a másodiké pedig szintén egyenletes a $[-0.2, 0.4]$ intervallumon. Ekkor az 5.2 Tétel alapján világos, hogy ezen értékpapírok egyike sem dominálja elsőrendben sztochasztikusan a másikat, pedig a hozamuk várható értéke nem azonos.

Említsük meg azt is, hogy a $\preccurlyeq_{FSD}$ reláció reflexív és tranzitív is, azonban ez a reláció nem feltétlenül teljes az előbbiek miatt egy adott piac értékpapírjainak a halmazán, hiszen az előbbiekben megmutattuk, hogy két értékpapír ezzel a relációval nem feltételenül hasonlítható össze.

5.2. Másodrendű sztochasztikus dominancia

Az elsőrendű sztochasztikus dominancia mintájára a másodrendű sztochasztikus dominancia is jellemezhető az értékpapírok hozameloszlásának néhány tulajdonságával. Ez lehetővé teszi a másodrendű sztochasztikus dominancia esetén is a reláció teljesülésének az egyszerű ellenőrzését adott értékpapírok esetén. Ezt ismertetjük az alábbi tételben.

5.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az 5.2 Tétel feltételei érvényben vannak és használjuk az ott megadott jelöléseket.*

Ekkor

$$r_i \succcurlyeq_{SSD} r_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{E}\, r_i = \mathbb{E}\, r_j \quad \text{és} \quad S(x) \leq 0, \quad \forall x \in [-1, u],$$

ahol

$$S(x)=\int_{[-1,x]}\big(F_i(z)-F_j(z)\big)\,dz,\qquad x\in[-1,u].$$

Bizonyítás. Legyen U egy függvény $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$-ben. Ekkor világos, hogy $S(-1)=0$ és

$$S(u)=\int_{[-1,u]}(F_i-F_j)(z)dz=-\int_{[-1,u]}zd(F_i-F_j)(z)=\mathbb{E}\ r_j-\mathbb{E}\ r_i.$$

A (39) formulát és a parciális integrálás formuláját ismét használva (ld. 8.3 Tétel a Függelékben) azt kapjuk, hogy (a $G(z)=F_i(z)-F_j(z)$ jelöléssel, $z\in\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\ U(1+r_i)-\mathbb{E}\ U(1+r_j)&=\int_{[-1,u]}U(1+z)dG(z)=-\int_{[-1,u]}G(z)dU(1+z)\\&=-\int_{[-1,u]}G(z)U'(1+z)dz=-\int_{[-1,u]}U'(1+z)dS(z)\\&=-U'(1+u)S(u)+U'(0)S(-1)+\int_{[-1,u]}S(z)dU'(1+z)\\&=U'(1+u)\big(\mathbb{E}\ r_i-\mathbb{E}\ r_j\big)+\int_{[-1,u]}S(z)dU'(1+z).\end{aligned}\tag{40}$$

Szükségesség. Ha $r_i\succcurlyeq_{SSD}r_j$ akkor a (40) egyenlet bal oldala nemnegatív minden $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$-beli U konkáv hasznosságfüggvény esetén. A (40) egyenlet utolsó sorában levő integrál azonban eltűnik lineáris hasznosságfüggvények esetén. Speciálisan, $\mathbb{E}r_i-\mathbb{E}r_j\geq 0$ az $U(x)=x$ választása esetén és $\mathbb{E}\ r_i-\mathbb{E}\ r_j\leq 0$ az $U(x)=-x$ függvénnyel, amelyekből együtt már következik a szóbanforgó értékpapírok várható hozamának az egyenlősége.

Most pedig megmutatjuk, hogy az S függvény a $[-1,u]$ intervallumban nem lehet nullánál nagyobb. Ehhez tegyük fel indirekt módon, hogy létezik egy pont a $[-1,u]$ intervallumban, ahol S pozitív. Az S a definíciójából következően folytonos, ezért létezik egy olyan $[a,b]\subset[-1,u]$ intervallum, ami felett S pozitív. Most tekintsük az alábbi függvényt:

$$U(x)=\mathbf{1}_{(-\infty,a)}\ 2|a|x-\mathbf{1}_{[a,b]}\ x^2-\mathbf{1}_{(b,\infty)}\ 2|b|x,\qquad\forall x\in\mathbb{R}.$$

Ez a függvény konkáv és $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$-beli, így azt kapjuk, hogy

$$\int_{[-1,u]}S(z)dU'(1+z)=\int_{[a,b]}S(z)dU'(1+z)<0.$$

Ez pedig nyilván egy ellentmondás a (40) egyenlettel, így a szükségesség bizonyítása teljes.

Elégségesség. Ha $U \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ konkáv, akkor U' monoton csökkenő. Ezért egy ilyen hasznosságfüggvény esetén

$$\int_{[-1,u]} S(z) dU'(1+z) \geq 0,$$

végül a (40) egyenlettel együtt ebből már következik az állítás. □

Az előző részben láttuk, hogy a „többet a kevesebbel szemben preferáló" egyének csoportja egységes abban, hogy ha egy értékpapír elsőrendben sztochasztikusan dominál egy másikat, akkor ezen csoport minden tagja preferálja ezt a domináns értékpapírt a másikkal szemben.

Hasonló értelemben az előző tétel szerint egy újabb csoportját találtuk az egyéneknek (vagy másképpen hasznosságfüggvényeknek), akik szintén azonosak egy tulajdonságban, nevezetesen: ha egy értékpapír másodrendben sztochasztikusan dominál egy másik értékpapírt, akkor azt mondhatjuk, hogy minden kockázatkerülő egyén a domináns értékpapírt fogja preferálni.

Itt is megjegyezhetjük továbbá, hogy a $\succcurlyeq_{SSD}$ relációra is teljesül a reflexivitás és a tranzitivitás, ám erre sem igaz, hogy teljes lenne értékpapírok egy halmazán. Erre adunk is példát az alábbi megjegyzésben.

5.4. Megjegyzés. Az 5.1 Definícióból és az 5.3 Tételből könnyen látható, hogy

$$\mathbb{E}\, r_i = \mathbb{E}\, r_j \qquad \text{és} \qquad Var\ r_i \leq Var\ r_j \tag{41}$$

szükségképpen teljesülnek, ha $r_i \preccurlyeq_{SSD} r_j$, ahol r_i és r_j egy értékpapírpiacon két értékpapírnak hozama. Ennek megmutatásához tekintsük az $U(x) = (x - \mu - 1)^2$ konkáv hasznosságfüggvényt ($x \in \mathbb{R}$), ahol $\mu = \mathbb{E}\ r_i = \mathbb{E}\ r_j$, amelyből azonnal adódik a szórások fenti egyenlőtlensége.

A (41) sor világossá teszi azt, hogy miért szokták egyes szerzők a másodrendű sztochasztikus dominancia helyett azt mondani, hogy az egyik értékpapír (a dominált) kockázatosabb, mint a másik (a domináns).

Azonban a fenti két feltétel a (41) sorban nem biztosít egyben elégséges feltételt is a másodrendű sztochasztikus dominanciához. Ennek megmutatásához tekintsünk egy $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, 2\}$ értékpapírpiacot, ahol a két kockázatos értékpapír hozama az alábbi: legyen r_1 egyenletes eloszlású a $[-a, a]$ intervallumon valamely $a \in (0,1)$ paraméterrel, míg legyen $r_2(\omega) \in \{-a, 0, a\}$ minden $\omega \in \Omega$ esetén úgy, hogy

$$\mathbb{P}(r_2 = -a) = \mathbb{P}(r_2 = a) = \varepsilon$$

és

$$\mathbb{P}(r_2 = 0) = 1 - 2\varepsilon, \qquad \text{ahol} \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{6}\,.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy $\mathbb{E}\ r_1 = \mathbb{E}\ r_2 = 0$ és $Var\ r_1 > Var\ r_2$. Másrészt található egy olyan jobboldali környezete $-a$-nak (például $(-a, -a+2a\varepsilon)$), ahol az r_2 hozam F_2 eloszlásfüggvénye nagyobb, mint az r_1 hozam F_1 eloszlásfüggvénye. Ebből pedig azt kapjuk, hogy

$$S(y) = \int_{[-1,y]} F_2(x) - F_1(x)dx > 0,$$

ha y a fenti környezetben van. Innen az 5.3 Tétel segítségével pedig láthatjuk, hogy egy r_2 hozamú értékpapír nem dominálhat másodrenben sztochasztikusan egy értékpapírt, melynek hozama r_1.

5.3. Kereslet versus sztochasztikus dominancia

Tekintsünk most két kockázatos értékpapírt és tegyük fel, hogy az első sztochasztikusan dominálja a másodikat. Ha ez a sztochasztikus dominancia elsőrendű, akkor minden olyan egyén, aki a többet a kevesebbel szemben preferálja bármely pénzmennyiség esetén az első értékpapírba fektetné a pénzt és nem a másodikba, persze ha ezen két befektetés időpontja megegyezne (nevezetesen a 4.3 részben megjelölt 0 időpont lenne). Ezzel szemben az értékpapírok másodrendű sztochasztikus dominanciája esetén pedig a kockázakerülő emberek fogják a pénzüket inkább az első, domináns papírba fektetni (a 0 időpontban).

Ebből esetleg arra gondolhatnánk, hogy különböző értékpapírok kereslete között is tudnánk valamilyen összefüggést találni akkor, ha az egyik értékpapír sztochasztikusan domináns a másikkal szemben. Például gondolhatnánk arra, hogy a domináns értékpapír kereslete nagyobb, mint a másiké (bármely kezdeti tőke esetén).

Azonban ilyen összefüggést nem lehet találni általában. Az alábbiakban példákat adunk, amelyek megmutatják, hogy a fentiekben sugallt összefüggés nem teljesül egymást domináló értékpapírok kereslete között. Látni fogjuk, hogy értékpapírpiacokon, ahol a vizsgált (kockázatos) értékpapír mellett még legalább egy másik értékpapírral is kereskednek, a probléma és általában az egyes papírok keresletének alakulása igen bonyolult is lehet. Azonban egyes esetekben tudunk olyan elégséges feltételt mutatni, amely esetén a szóbanforgó összefüggés teljesül (ld. 5.6 Példa).

5.5. Példa. Tekintsünk most két értékpapírpiacot, mindkettőn legyen az egyik értékpapír ugyanaz a kockázatmentes kötvény, s mellette legyen adott mindkét piacon egy-egy kockázatos értékpapír, amit nevezzünk részvénynek. Legyen a közös kötvény kamata $r_0 > 0$. A piacok részvényeit nyilván véletlen hozamrátájukkal adjuk meg. Legyen ezen hozamráták jelölése r_1 és r_2 az első illetve a második piac részvénye esetén, amelyeket értelmezzünk a következőképpen:

$$\mathbb{P}(r_1 = a) = \mathbb{P}(r_1 = b_1) = \frac{1}{2}$$

és

$$\mathbb{P}(r_2 = a) = \mathbb{P}(r_2 = b_2) = \frac{1}{2}\ ,$$

ahol a számolás könnyebbsége érdekében feltesszük, hogy

$$a - r_0 = -\frac{1}{10}, \qquad b_1 - r_0 = 1 \qquad \text{és} \qquad b_2 - r_0 = 1 - \varepsilon$$

valamely $0 < \varepsilon < 9/11$ választással. Ekkor a korábbi részekben leírtak alapján triviális, hogy az első részvény elsőrendben sztochasztikusan dominálja a második részvényt.

Legyen most X_0 az egyén kezdeti tőkéje és tekintsük ekkor az optimális portfólió választásának problémáját (ld. 4.3 részben) mindkét piacon. Legyen $\beta > 0$ és tegyük fel, hogy az egyén U hasznosságfüggvénye $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$-beli és teljesülnek a következők rá:

$$U'\big(g(a)\big) = 10\, U'\big(g(b_1)\big) \quad \text{és} \quad U'\big(g(b_2)\big) = (10-\varepsilon)\, U'\big(g(b_1)\big)$$

úgy, hogy $U'\big(g(b_1)\big) > 0$, ahol a g függvény definíciója:

$$g(x) = X_0(1+r_0) + \beta x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vegyük észre, hogy $g(a) < g(b_2) < g(b_1)$ és ezért az eddig már U-ra tett feltételek mellett is meg lehet U-t úgy konstruálni, hogy az szigorúan konkáv és monoton növekvő legyen. Ezt fel is tesszük ettől kezdve az U függvényről. Továbbá még azt is feltehetjük, hogy a $\lim_{x\to\infty} U'(x) = 0$ és a $\lim_{x\to-\infty} U'(x) = \infty$ feltételek egyike is teljesül.

Természetesen az volt a célunk a fenti konstrukcióban, hogy teljesüljenek a 4.10 Lemma és a 4.12 Tétel feltételei. Hiszen ekkor tudjuk, hogy létezik és egyértelmű az optimális portfólió mindkét piacon. Továbbá, ha az elsőrendű (28) feltételeket felírjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\, U'\big(X_0(1+r_0) + \beta(r_1 - r_0)\big)(r_1 - r_0) = \frac{1}{2}\Big[U'\big(g(a)\big)(a - r_0) + U'\big(g(b_1)\big)(b_1 - r_0)\Big] = 0.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy a $\pi = (X_0 - \beta, \beta)$ portfólió lesz az optimális választás az első piacon. Ezzel szemben a második piacon azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\, U'\big(X_0(1+r_0) + \beta(r_2 - r_0)\big)(r_2 - r_0) &= \frac{1}{2}\Big[U'\big(g(a)\big)(a - r_0) + U'\big(g(b_2)\big)(b_2 - r_0)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[U'\big(g(a)\big)(a - r_0) + (10-\varepsilon)\, U'\big(g(b_1)\big)(b_1 - r_0 - \varepsilon)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[U'\big(g(a)\big)(a - r_0) + U'\big(g(b_1)\big)(b_1 - r_0)\Big] + \frac{1}{2}U'\big(g(b_1)\big)(9 + \varepsilon^2 - 11\varepsilon) \\
&> U'\big(g(b_1)\big)\frac{9 - 11\varepsilon}{2} > 0.
\end{aligned} \tag{42}$$

A (42) levezetésből pedig az következik, hogy az

$$F(x) = \mathbb{E}\, U\big(X_0(1 + r_0) + x(r_2 - r_0)\big), \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény egy olyan β^* pontban veszi fel a maximumát, amely bagyobb β-nál (a 4.10 Lemma bizonyítása alapján ez látható).

Megmutattuk tehát, hogy létezik olyan hasznosságfüggvény, hogy az ezzel rendelkező egyén a többet preferálja a kevesebbel szemben és kockázatkerülő is, de az egyén több pénzt kíván befektetni a második piacon kereskedve a második részvénybe, mint az első piacon kereskedve az első részvénybe (optimális portfóliója kialakításakor) annak ellenére, hogy az első részvény elsőrendben sztochasztikusan dominálja a második részvényt. (Idézzük itt fel, hogy ebben a helyzetben egyúttal az is igaz az előző részekben leírtak alaján, hogy az első és a második részvénybe való ugyanakkora értékű befektetés esetén már az első részvénybe való befektetést preferálná az egyén, bármely pénzösszegről is legyen szó, hiszen a hasznosságfüggvénye monoton növekvő.)

5.6. Megjegyzés. Tegyük fel ismét, hogy adott két értékpapírpiac, mindegyiken ugyanazon kockázatmentes kötvénnyel és e mellett egy-egy kockázatos részvénnyel. Legyen a kötvény hozamának a jelölése ismét $r_0 > 0$, és legyen az 5.5 Példában használt jelölésnek megfelelően az egyes piacokon a részvények hozamrátájának a jelölése r_1 illetve r_2. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}\, r_1 > r_0$ és $\mathbb{E}\, r_2 > r_0$.

Azt fogjuk most feltételezni, hogy az első részvény másodrendben sztochasztikusan dominálja a második részvényt, amit más szavakkal korábban úgy is kifejeztünk, hogy a második részvény kockázatosabb az elsőnél.

Most tekintsük ezen a két piacon az optimális portfólió választásának a problémáját egy olyan $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ hasznosságfüggvénnyel rendelkező egyén esetén, aki szigorúan kockázatkerülő és akinek a rendelkezésre álló tőkéje X_0. Továbbá azt is feltételezzük természetesen, hogy U alakja megfelelő ahhoz, hogy az optimális portfólió létezése és egyértelműsége a két piacon biztosított legyen. (Az ehhez szükséges feltételeket tartalmazza a 4.12 Tétel.)

Ha $(X_0-\beta, \beta)$ az optimális portfólió az első piacon (ekkor tudjuk, hogy β szükségképpen pozitív), akkor a (28) elsőrendű feltételek alapján azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\, U'\big(X_0(1+r_0)+\beta(r_1-r_0)\big)(r_1-r_0)=0.$$

Tekintsük ekkor az alábbi függvényt:

$$f(x)=U'\big(X_0(1+r_0)+\beta(x-r_0)\big)(x-r_0), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Az 5.3 Tétel alapján a következő állítást fogalmazhatjuk meg a részvények keresletével kapcsolatban.

Ha az f függvény –amelyről érdemes hangsúlyozni, hogy az egyén preferenciái határozzák meg– konkáv a valós számegyenes felett, akkor az első részvénynek a másik részvénnyel szembeni sztochasztikus dominanciájából következik, hogy az egyén a portfóliója optimalizálásakor több pénzt fog fektetni a kevésbé kockázatos részvénybe (azaz az első részvénybe), mint a kockázatosabb részvénybe (a másodikba).

Tehát meghatároztunk valóban egy olyan elégséges feltételt, amely mellett részvények sztochasztikus dominanciája és a keresletük alakulása között kapcsolatot találhatunk, s amiről már ezen rész elején említést tettünk. Ám jegyezzük meg, hogy a fenti módon értelmezett f függvény a hasznosságfüggvények jelentős részénél nem konkáv, így akkor a megállapításunk sem alkalmazható.

5.7. Példa. A fenti példában megvizsgáltuk, hogy milyen feltételek szükségesek ahhoz, hogy egy egyén több pénzt fektessen a kevésbé kockázatos értékpapírba, mint a kockázatosabba. Azt is leírtuk, hogy az ott talált szükséges feltételek nem teljesülnek több hasznosságfüggvény esetén. Ebben a példában mutatunk egy olyan hasznosságfüggvényt, amely esetén nem teljesül a kereslet és a dominancia megfogalmazott kapcsolata.

Ehhez az 5.6 Megjegyzésben megadott piacokat tekintjük az ottani jelölésekkel. Megadunk egy hasznosságfüggvényt, illetve megadjuk a részvények hozamának is az eloszlását.

Tehát tegyük fel, hogy

$$\mathbb{P}(r_1 = a_0) = \mathbb{P}(r_1 = b) = \frac{1}{2},$$

ahol $a_0 = -0.5 + r_0$ és $b = 1 + r_0$. A másik részvény esetén pedig legyen

$$\mathbb{P}(r_2 = a_1) = \mathbb{P}(r_2 = a_2) = \frac{1}{4} \qquad \text{és} \qquad \mathbb{P}(r_2 = b) = \frac{1}{2},$$

ahol $a_1 = -0.6 + r_0$ és $a_2 = -0.4 + r_0$.

Megmutatjuk ekkor, hogy az első részvény sztochasztikusan dominálja a második részvényt. Ehhez vegyük észre, hogy

$$\mathbb{E}\, r_1 = r_0 + \frac{1}{4} = \mathbb{E}\, r_2, \tag{43}$$

és azt, hogy

$$sgn\big(S(x)\big) = sgn\left(\int_{[-1,1+r_0]} F_1(x) - F_2(x)dx\right) = \mathbf{1}_{(a_1+r_0,a_2+r_0)}. \tag{44}$$

Ekkor a (43) és (44) sorokból az 5.3 Tétel alapján következik, hogy $r_1 \succcurlyeq_{SSD} r_2$.

Legyen $\beta > 0$. Egy $X_0 > 0$ mennyiségű kezdeti tőke esetén tekintsük ismét az 5.5 Példában definiált g függvényt. Tegyük fel, hogy

$$0 < U'\big(g(a_0)\big) = 2U'\big(g(b)\big)$$

és

$$U'\big(g(a_1)\big) = U'\big(g(a_0)\big) + \varepsilon, \qquad U'\big(g(a_2)\big) = U'\big(g(b)\big) + \varepsilon,$$

ahol $0 < \varepsilon < U'\big(g(a_0)\big)/5$. Ekkor a hasznosságfüggvény még megválasztható úgy, hogy monoton növekvő legyen és a $\lim_{x\to\infty} U'(x) = 0$ és $\lim_{x\to-\infty} U'(x) = \infty$ feltételek egyikét is teljesítse. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, U'\big(X_0(1 + r_0)+&\beta(r_1 - r_0)\big)(r_1 - r_0) \\ &= \frac{1}{2}\, U'\big(g(a_0)\big)(a_0 - r_0) + \frac{1}{2}\, U'\big(g(b)\big)(b - r_0) = 0 \end{aligned} \tag{45}$$

és

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\, U'\big(X_0(1+r_0)+\beta(r_2-r_0)\big)(r_2-r_0)\\
&\quad=\frac{1}{4}\,U'\big(g(a_1)\big)(a_1-r_0)+\frac{1}{4}\,U'\big(g(a_2)\big)(a_2-r_0)+\frac{1}{2}\,U'\big(g(b)\big)(b-r_0)\\
&\quad=\frac{1}{4}\,\Big(U'\big(g(a_0)\big)+\varepsilon\Big)(-0.6)+\frac{1}{4}\,\left(\frac{1}{2}\,U'\big(g(a_0)\big)+\varepsilon\right)(-0.4)+\frac{1}{2}\,U'\big(g(b)\big)(b-r_0)\\
&\quad=\frac{U'\big(g(a_0)\big)}{20}+\frac{\varepsilon}{4}>0.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Az 5.5 Példában használt gondolatmenet analógiájára azt kapjuk a (45) és (46) egyenletekből, hogy ebben az esetben $\beta<\beta^*$, ahol $(X_0-\beta,\beta)$ és $(X_0-\beta^*,\beta^*)$ jelöli az első illetve a második piacon az optimális portfóliót.

Megmutattuk tehát, hogy egy kockázatkerülő egyén, aki a többet preferálja a kevesebbel szemben, akár több pénzt is befektethet a kockázatosabb részvénybe (másodrendű sztochasztikus dominancia értelmében értve a kockázatosabb szót), mint a kevésbé kockázatos részvénybe.

Az 5.5 és 5.7 Példákban két értékpapírpiacot tekintettünk. Mindkettő piacon egy kockázatmentes kötvény és egy kockázatos részvény volt vásárolható, továbbá a kötvény a piacokon azonos volt. Ekkor a két részvényt összevetettük, s megállapítottuk, hogy sztochasztikus dominancia jellemző a viszonyukra. Ennek ellenére azt tapasztaltuk, hogy egyes döntéshozók a sztochasztikus dominancia szerinti kockázatosabb értékpapírt preferálnák még akkor is, ha kockázatkerülő és a többet a kevesebbel szemben preferáló egyének közé tartoznak.

Ezt a megfigyelést különbözőképpen magyarázhatjuk. Egyrészt elképzelhetjük ezt a szituációt úgy, hogy valóban egyidejűleg adott két különböző piac a példákban leírt tulajdonságokkal, és az egyén mindkét piacon kialakít egy-egy optimális portfóliót. De ez az eset nem túl realisztikus valójában. Másrészt azonban úgy is elképzelhetjük a két piacot, hogy azok ugyanazon valós piac két különböző időpontra vonatkozó állapotait jelölik. Legyen mondjuk ez a két időpont t_1 és t_2, ahol $t_1 < t_2$. Ekkor a két piacon a portfólió optimalizálását úgy interpretálhatjuk, hogy az egyén a t_1 időpontban kialakította az optimális portfólióját, majd ezután a részvény kockázatosabb lett (például valamilyen további információhoz jutott az egyén és ezért megváltoztatta a hozam eloszlásáról alkotott elképzelését) és ezen változásoknak megfelelően átstrukturálta a portfólióját a t_2 időpontban. A korábbi megfigyeléseink alapján ekkor azt mondhatjuk, hogy a részvény kockázatosabbá válása ellenére sem lehetünk abban biztosak, hogy az egyén eladott valamennyi részvényt és cserébe a biztonságosabb kötvényből vett volna. Sőt, a példák mutatták, hogy akár még növelheti is az optimális portfólióban a részvény relatív arányát.

Végül azt is fontos megjegyezni, hogy a példában használt két piac modellje nem azonos azzal az esettel, amikor adott egy olyan értékpapírpiac, amely a korábbi két piac három értékpapírját tartalmazza, azaz a piacon a közös kötvény és bármelyik korábbi részvény megvásárolható. Ekkor egyetlen optimális portfólió lenne, amiről azonban már nem állíthatnánk még az 5.5 és 5.7 Példákban választott hasznosságfüggvény esetén sem, hogy az egyén az optimális portfólióban többet fektetne a kockázatosabb értékpapírba.

6. Kockázati mértékek

A pénzügy egyik központi kérdése, hogy olyan eszközöket biztosítson, amelyek lehetővé teszik pénzügyi eszközök és kiváltképp portfóliók összehasonlítását, értékelését és kockázatosságuk jellemzését. Az előző fejezetekben már láttuk, hogy az összehasonlításra számos eszközt adnak a különböző sztochasztikus dominancia fogalmak és tudjuk, hogy a klasszikus tőkepiaci elméletek is lehetőséget adnak mind portfóliók egyfajta összehasonlítására, mind azok kockázatának egyfajta jellemzésére.

Azonban ezeken túl természtes kívánalom az is, hogy egyszerű pénzügyi mutatókkal jellemezzük az eszközöket, és különösen azok kockázatosságát. A pénzügyi eszközökhöz és portfóliókhoz rendelt, a kockázatot jellemző mutatószámokat fogjuk a továbbiakban kockázati mértékeknek nevezni. Jegyezzük itt meg, hogy számos mutatót már sok évtizeddel ezelőtt használtak és használnak ma is. Gondoljunk csak a népszerű P/E (price/earning) mutatóra, mely némi információt ad a befektetőnek az adott értékpapírról. Azonban a klasszikus mutatók nem igazán adnak információt az eszköz kockázatosságáról.

Számos kockázati mérték jelent meg az irodalomban. Ezek közül minden kétséget kizáróan a Value at Risk terjedt el a leginkább, mind elméletben, mind gyakorlatban. Számos pénzpiaci, pénzintézeti törvény megköveteli a pénzintézetektől és esetleg egyéb piaci szereplőktől ennek számítását és ezzel kapcsolatos szabályok betartását. Az érdeklődő olvasónak megemlítjük, hogy a Bázeli Bizottság (Basel Committee on Banking Supervision) részletesen foglalkozott kockázati mértékekkel és azokhoz kapcsolódó problémákkal és egyben javaslatot tett számos standard bevezetésére (ld. International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards). Ezen standardok egyszerűen 'Basel I és Basel II' néven ismertek a szakmában, amely standardokban többek között a VaR és azzal kapcsolatos területek fontos szerepet kaptak és azok bevezetését és alkalmazását javasolják az egyes országoknak.

Azt is érdemes megjegyeznünk már most, hogy nem állíthatjuk, hogy a VaR lenne a legmegfelelőbb mérték azon célra, amelyeket a fentiekben említettünk, továbbá, hogy az alkalmasság kérdéséhez pontosan meg kell fogalmaznunk igényeinket is egy ilyen mutatóval szemben. A 6.1. részben éppen ezen felmerülő igényekkel foglalkozunk, míg azt követően a VaR és tulajdonságai kerülnek elemzésre a 6.2. részben. Végül a 6.3. részben rátérünk egy másik kockázai mérték, az expected shortfall tárgyalására, mely számos szerző által ajánlott a VaR alternatívájaként éppen a VaR egyes nem megfelelő tulajdonságai miatt.

Ennek fejezetnek a megírása során nagy segítséget jelentettek számunkra az alábbi munkák: [Acerbi], [Acerbi2], ahol a VaR és az expected shortfall tárgyalása igen részletes; [Delbaen], ahol a koherencia fogalmának egy rendkívül hasznos tárgyalását találhatjuk; [Dowd], amelyben egy nagy áttekintését olvashatjuk a VaR fogalmának, közgazdasági hasznosításának és becslésének. Megjegyezzük, hogy a kvantilisek tárgyalásához nagyszerű forrásnak bizonyult [Acerbi2] és [Major]. Végezetül kiemeljük Paul Embrechts munkáit (szakcikkek, előadás fóliák, stb.), amelyekben számos gyakorlati és elméleti kérdés tárgyalását találhatjuk kockázati mértékekkel kapcsolatban (ld. http://www.math.ethz.ch/˜embrechts/).

6.1. Koherens mértékek

Ahogy már említettük, számos igényt fogalmazhatunk meg egy kockázati mutatóval szemben. Természetesen ez szubjektív is egyben, nem állíthatjuk, hogy ugyanazon tulajdonságokat találja mindenki fontosnak. Az irodalomban is számos tulajdonság merül fel igényként. A leginkább előforduló, leggyakrabban megkövetelt tulajdonságokat tömöríti a koherencia fogalma, melyet az alábbiakban ismertetünk. Ezt követően pedig alternatív tulajdonságokat is tárgyalunk.

A kockázati mértékeket valószínűségi változók egy halmazán értelmezhetjük. Hiszen ha adott egy portfólió, befektetés vagy értékpapír, akkor egy valószínűségi változó reprezentálja az abból származó jövőbeli profitot. Ám hasonlóan, magát a jövőbeli értéket is jelölheti a valószínűségi változó, amelyhez a kockázatot meghatározzuk.

6.1. Definíció. *Legyen V (pénzügyi eszközök, portfóliók profitját reprezentáló) valószínűségi változók egy halmaza egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn.*

Ekkor egy $\varrho : V \to \mathbb{R}$ függvényt kockázati mértéknek nevezünk.

Egy V kockázati mérték

(1) *monoton, ha $X, Y \in V$ és $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, akkor $\varrho(X) \geq \varrho(Y)$;*

(2) *szubadditív, ha $X, Y, X + Y \in V$, akkor $\varrho(X + Y) \leq \varrho(X) + \varrho(Y)$;*

(3) *pozitív homogén, ha $h > 0$, $X, hX \in V$, akkor $\varrho(hX) = h\varrho(X)$;*

(4) *eltolás invariáns, ha $a \in \mathbb{R}$, $X, X + a \in V$, akkor $\varrho(X + a) = \varrho(X) - a$.*

Egy V kockázati mértéket koherensnek nevezünk, ha teljesíti az **(1)-(4)** *tulajdonságokat.*

Feltétel. *Az egész fejezetben az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy V zárt az összeadásra, pozitív skalárral való szorzásra és eltolásra, azaz $V + V, h \cdot V, a + V \subset V$ minden $h > 0$, $a \in \mathbb{R}$ esetén. Feltesszük továbbá, hogy V tartalmazza az $X \equiv 0$ ($\mathbb{P}(X = 0) = 1$) elemet.*

A kozkázati mértékek nevezetes tulajdonságait (monotonitás, szubadditivitás, stb.) néha axiómáknak is fogjuk nevezni.

A fenti tulajdonságokat az alábbi módon értelmezhetjük, az alábbi pénzügyi motivációt fedezhetjük fel bennük. Ha egy portfólió minden esetben többet ígér, mint egy másik, akkor annak ne legyen nagyobb a kockázata (monotonitás). Két portfóliót egybetéve ne növekedhessen a kockázat, azaz a portfóliók kocázatának összegét nem haladhatjuk meg (szubadditivitás). Megtöbbszörözve a portfópliót, ám megtartva annak összetételét, a kozkázatosság a nagysággal arányosan változzon (pozitív homogenitás). Ha biztosan realizálunk egy pótlólagos adott összegű pénzáramlást, akkor a portfólió kockázatossága éppen ennek a pénzáramlásnak a nagyságával csökkenjen (eltolás invariancia).

Azonban fontosnak tartjuk hangsúlyozni, hogy számos egyéb, a fentiekhez hasonlóan pénzügyi szempontból indokoltnak látszó tulajdonságot is lehetne még említenünk, mint ahogy a fentiek szükségességét is megkérdőjelezhetjük. Kettő a sok felmerülő tulajdonságok közül a következő.

6.2. Definíció. *Egy $\varrho : V \to \mathbb{R}$ kockázati mérték*

(5) pozitív, *ha* $X \in V$, $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$ *esetén* $\varrho(X) \leq 0$;

(6) konvex, *ha* $\lambda \in [0,1]$ *és* $X, Y, \lambda X + (1-\lambda)Y \in V$ *esetén* $\varrho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\varrho(X) + (1-\lambda)\varrho(Y)$.

6.3. Tétel. *Legyen ϱ egy kockázati mérték.*

(a) *Ha ϱ pozitív homogén és $X \equiv 0$, akkor $\varrho(X) = 0$.*

(b) *Ha ϱ pozitív homogén és eltolás invariáns, akkor $\varrho(a) = -a$ minden $a \in \mathbb{R}$ esetén.*

(c) *Ha ϱ szubadditív, pozitív homogén és eltolás invariáns, akkor $-\varrho(X) = \varrho(-X)$ minden $X, -X \in V$ esetén.*

(d) *Egy kockázati mérték akkor és csak akkor koherens, ha kielégíti a* **(2)-(5)** *axiómákat.*

(e) *Ha ϱ szubadditív és pozitív homogén akkor konvex.*

Bizonyítás. **(a)** Legyen $X \equiv 0$. Ekkor $X \in V$, így az első állítás rögtön adódik a pozitív homogenitásból, hiszen $\varrho(X) = \varrho(2X) = 2\varrho(X)$.

(b) Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor az eltolás invariancia és az **(a)** állítás miatt $\varrho(a) = \varrho(0 + a) = \varrho(0) - a = -a$.

(c) A szubadditivitást alkalmazva $0 = \varrho(0) \leq \varrho(-X) + \varrho(X)$. Tegyük fel indirekt, hogy $\varrho(-X) + \varrho(X) = b > 0$. Ekkor **(b)** és a szubadditivitás felhasználásával $\varrho(b) =$

$\varrho(X+b-X) \leq \varrho(X+b)+\varrho(-X) = \varrho(X)-b+\varrho(-X) = 0$, amiből viszont adódik a $b=0$ ellentmondás.

(d), **(1)-(4)** $\Rightarrow$ **(2)-(5)**. Ha ϱ koherens akkor egy nemnegatív X változó ($\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$) esetén a monotonitásból és az első állításból adódik, hogy $\varrho(X) \leq \varrho(0) = 0$, azaz beláttuk a pozitivitást.

(2)-(5) $\Rightarrow$ **(1)-(4)**. Legyen most $X, Y \in V$ úgy, hogy $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$. Tegyük fel indirekt, hogy $\varrho(Y) > \varrho(X)$. Vegyük észre, hogy a **(c)** állítás és a pozitivitás alapján $\varrho(X-Y) = -\varrho(Y-X) \geq 0$. Továbbá szubadditivitás miatt $0 \leq \varrho(X-Y) \leq \varrho(X)+\varrho(-Y) < \varrho(Y)+\varrho(-Y)$, ami ellentmond azzal, hogy a **(c)** állítás alapján $\varrho(Y)+\varrho(-Y) = 0$.

(e) Először a szubadditivitást, majd a pozitív homogenitást használva azonnal adódik az állítás. $\square$

A **(b)** állítás azt jelenti, hogy egy biztos pénzáramlás kockázati mértéke éppen -1-szerese önmagának. Tehát egy biztos veszteség kockázata pozitív és éppen a veszteség nagyságával egyenlő, miközben, ha egy befektetés biztos (fix) nyereséget hoz, annak kockázata negatív, 'nagysága' a nyereség nagysága. A **(d)** állításból láthatjuk, hogy a monotonitást felcseréljük a koherencia definíciójában a pozitivitással (úgy, hogy ezzel egy ekvivalens axiómarendszert kapunk). Végül megemlítjük, hogy számos szerző egy gyengébb axiómarendszert javasol a koherencia helyett, nevezetesen a koherencia 4 axiómájában a szubadditivitást és a pozitív homogenitást a gyengébb konvexitás tulajdonságával javasolják kicserélni (ld. **(e)**).

A pénzügyben a portfóliók és pénzügyi eszközök kockázatosságát szokás és korábban különösen elterjedt volt az eszköz jövőbeli értékének szórásával vagy szórásnégyzetével jellemezni. Fontos azonban kiemelni, hogy a mi céljainkra ezen fogalmak nem alkalmasak, hiszen azok számos kívánatos tulajdonságot nem teljesítenek. Nyilvánvaló például, hogy egyik sem monoton, mint ahogy azt is könnyű látni, hogy a pozitivitást sem elégítik ki.

6.2. Value at Risk – A kockáztatott érték

Jelölés. Egy X valószínűségi változó esetén F_X fogja jelölni annak eloszlásfüggvényét, azaz $F_X(z) = \mathbb{P}(X < z)$. Az eloszlásfüggvény jobbról folytonos verzióját pedig $\tilde{F}_X$ fogja jelölni, azaz $\tilde{F}_X(z) = \mathbb{P}(X \leq z)$. Ennek azért van jelentősége, mert számos szerző $\tilde{F}_X$-t definiálja X eloszlásfüggvényének. Ennéfogva a későbbiek során számos helyen felhívjuk az olvasó figyelmét azon kölünbségekre, amelyeket ezen különbségtétel okoz.

6.4. Definíció. *Legyen X egy valószínűségi változó, $\alpha \in (0,1)$. Ekkor az X alsó α-kvantilise*

$$q_\alpha(X) = \sup \{y \mid F_X(y) < \alpha\},$$

ahol F_X az X eloszlásfüggvényét jelöli, valamint

$$q^\alpha(X) = \inf \{y \mid F_X(y) > \alpha\}$$

az X felső α-kvantilise.

Ha X egy (portfólió, pénzügyi eszköz) profitját leíró valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn és $\alpha \in (0,1)$, akkor X alsó α-Value at Risk értéke alatt a

$$VaR_\alpha(X) = -q_\alpha(X)$$

mennyiséget értjük. Hasonlóan, X felső α-Value at Risk értékének definíciója:

$$VaR^\alpha(X) = -q^\alpha(X).$$

Az X α-kvantilisét leegyszerűsítve úgy értelmezhetjük, hogy az X jövőbeli lehetséges kimeneteit (profitértékeit) két részre osztja: az esetek legrosszabb α*100 százalékában ennél az értéknél kisebb lesz a profit, $1 - \alpha$*100 százalékában pedig nagyobb. Másképpen, $(1 - \alpha)$ valószínűséggel legalább a kvantilis által mutatott érték lesz a profit (kimenet). Ennélfogva, az α-VaR azt a veszteségértéket mutatja, aminél $(1 - \alpha)$ valószínűséggel nem fogunk nagyobb veszteséget realizálni. Tehát α*100 százaléknyi legrosszabb lehetséges vesztésegértékek legjobbikát mutatja a VaR, másképpen, az $(1-\alpha)$*100 százaléknyi legjobb lehetséges kimenetek legrosszabbikát mutatja a VaR. Azonban fontos hangsúlyozni, hogy ezek nem pontos állítások, ráadásul az alsó és felső VaR nem feltétlenül egyezik meg. A későbbiekben erre részletesen visszatérünk.

Az alábbiakban néhány kvantilisekkel kapcsolatos hasznos tulajdonságot foglalunk össze, majd áttekintjük az ezek következményeként adódó VaR tulajdonságokat.

6.5. Megjegyzés. Könnyű látni, hogy a kvantilisek más alakban is megadhatóak, hiszen

$$q_\alpha(X) = \inf\{y \mid F_X(y) \geq \alpha\}, \quad \text{ill.} \quad q^\alpha(X) = \sup\{y \mid F_X(y) \leq \alpha\}.$$

Továbbá jegyezzük meg, hogy ha a 6.4. Definícióban, vagy annak fenti átírásában az $y \mapsto F_X(y) = \mathbb{P}(X < y)$ eloszlásfüggvényt helyettesítenénk az $y \mapsto \tilde{F}_X(y) = \mathbb{P}(X \leq y)$ (jobbról folytonos) függvénnyel, az $q_\alpha(X)$ és $q^\alpha(X)$ értékét nem változtatná.

Vegyük észre, hogy $q^\alpha(X) = -q_{1-\alpha}(-X)$ és $q_\alpha(X) = -q^{1-\alpha}(-X)$. Ez azonnal adódik az előző megjegyzésünket is figyelmebe véve, hiszen például az első esetben:

$$\begin{aligned} q^\alpha(X) &= \inf\{y \mid F_X(y) > \alpha\} = \inf\{y \mid \mathbb{P}(-X \leq -y) < 1-\alpha\} \\ &= -\sup\{-y \mid \mathbb{P}(-X \leq -y) < 1-\alpha\} = -\sup\left\{y \mid \tilde{F}_{-X}(y) < 1-\alpha\right\} \\ &= -q_{1-\alpha}(-X). \end{aligned}$$

Mivel $\{y \mid F_X(y) > \alpha\} \subset \{y \mid F_X(y) \geq \alpha\}$, így ezek alsó korlátjára teljesül, hogy

$$q_\alpha(X) \leq q^\alpha(X).$$

Ebből azt is láthatjuk, hogy az alsó és felső kvantilisek nem feltétlenül azonosak, nevezetesen, figyelembe véve az eloszlásfüggvény monotonitását, adódik, hogy

$$q_\alpha(X) = q^\alpha(X) \iff \text{ ha az } \{y \in \mathbb{R} \mid F_X(y) = \alpha\} \text{ halmaz legfeljebb egyelemű}$$

(hiszen az eloszlásfüggvény monotonitása miatt $\{y \mid F_X(y) > \alpha\}$ és $\{y \mid F_X(y) \geq \alpha\}$ intervallumok, melyeknek jobb végpontja ∞). Az is nyilvánvaló, hogy az $\{y \in \mathbb{R} \mid F_X(y) = \alpha\}$ halmaz pontosan akkor legfeljebb egyelemű, ha a $\{y \in \mathbb{R} \mid \tilde{F}_X(y) = \alpha\}$ halmaz legfeljebb egyelemű.

Ez tehát azt jelenti, hogy ha az eloszlásfüggvény egy szakaszon konstans és értéke éppen α, akkor az azon α-hoz tartozó alsó és felső kvantilisek nem azonosak. Folytonos eloszlásoknál például ilyen esetet nem tapasztalhatunk, diszkrét eloszlásoknál viszont minden olyan $\alpha \in (0, 1)$ érték esetén eltérnek az alsó és felső kvantilisek, ahol α eleme az eloszlásfüggvény értékkészletének. Azt is mondhatjuk, hogy a két kvantilis ,,kifeszíti" azt az intervallumot, ahol az eloszlásfüggvény az α értéket veszi fel, pontosabban: ha $q_\alpha(X) < q^\alpha(X)$, akkor

$$\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) = \alpha\} = \begin{cases} (q_\alpha(X), q^\alpha(X)], & \text{ha } \mathbb{P}(X = q_\alpha(X)) > 0 \\ [q_\alpha(X), q^\alpha(X)], & \text{ha } \mathbb{P}(X = q_\alpha(X)) = 0, \end{cases}$$

vagy másképpen

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \tilde{F}_X(x) = \alpha\} = \begin{cases} [q_\alpha(X), q^\alpha(X)), & \text{ha } \mathbb{P}(X = q^\alpha(X)) > 0 \\ [q_\alpha(X), q^\alpha(X)], & \text{ha } \mathbb{P}(X = q^\alpha(X)) = 0. \end{cases}$$

6.6. Tétel. *Legyen U egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon és X egy tetszőleges valószínűségi változó. Ekkor $\eta_1 = q_U(X)$, $\eta_2 = q^U(X)$ és X azonos eloszlásúak.*

Szokás egy X valószínűségi változó esetén az eloszlásfüggvényének F_X^{-1} általánosított inverzét

$$F_X^{-1}(y) := q_y(X), \qquad y \in (0, 1),$$

módon definiálni, amely nyilvánvalóan megegyezik az eloszlásfüggvény inverzével, amennyiben az invertálható. Így a fenti tétel értelmében $F_X^{-1}(U)$ eloszlásfüggvénye F_X, ha U egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon.

A 6.6. Tétel bizonyítása. Mivel U eloszlása folytonos, így $\eta_1 = q_U(X)$, $\eta_2 = q^U(X)$ azonos eloszlásúak (hiszen csak egy nulla valószínűségű halmazon különböznek). Azt fogjuk belátni, hogy

$$A_y := \{\omega \in \Omega \mid U(\omega) < F_X(y)\} \subset B_y := \left\{\omega \in \Omega \mid F_X^{-1}(U(\omega)) < y\right\} \tag{47}$$

és

$$B_y \subset C_y := \{\omega \in \Omega \mid U(\omega) \leq F_X(y)\} \tag{48}$$

minden $y \in \mathbb{R}$ esetén. Ezekből ugyanis adódik az állítás, hiszen vegyük észre, hogy U eloszlása folytonos és $F_X(y) = F_U(F_X(y)) = \mathbb{P}(A_y) = \mathbb{P}(C_y)$, továbbá nyilván $F_{\eta_1}(y) = \mathbb{P}(B_y)$.

Tekintsük (47) bizonyítását. Legyen $\omega \in A_y$, azaz $U(\omega) < F_X(y)$ és legyen $H := \{z \mid F_X(z) < U(\omega)\}$. Ekkor $F_X^{-1}(U(\omega)) = \sup H$ és F_X balról való folytonossága miatt $F_X\left(F_X^{-1}(U(\omega))\right) \leq U(\omega) < F_X(y)$. Ha $y = F_X^{-1}(U(\omega))$ teljesülne, akkor ebből $F_X(y) \leq U(\omega)$ következne. Ha $y < F_X^{-1}(U(\omega))$ teljesülne, akkor pedig $y \in H$ is teljesülne, ami azt jelentené, hogy $F_X(y) < U(\omega)$. Másképpen fogalmazva, $y \leq F_X^{-1}(U(\omega))$ esetén F_X monotonitása alapján $F_X(y) \leq F_X\left(F_X^{-1}(U(\omega))\right) \leq U(\omega)$ lenne, ezért $F_X^{-1}(U(\omega)) < y$, így beláttuk (47)-et.

Most nézzük (48) igazolását. Legyen most $\omega \in B_y$, azaz $F_X^{-1}(U(\omega)) < y$ és H jelölje ugyanazt a halmazt, amelyet a fentiekben. Ekkor $y \notin H$, ennélfogva $F_X(y) \geq U(\omega)$, így adódik (48). $\square$

6.7. Megjegyzés. Természetesen F_X helyett az $\tilde{F}_X$ függvényt is használhatjuk a 6.6. Tétel bizonyításához. Ekkor például az alábbiakat könnyű belátni:

$$\tilde{A}_y := \left\{\omega \in \Omega \mid U(\omega) < \tilde{F}_X(y)\right\} \subset \tilde{B}_y := \left\{\omega \in \Omega \mid F_X^{-1}(U(\omega)) \leq y\right\} \tag{49}$$

és

$$\tilde{B}_y \subset \tilde{C}_y := \left\{\omega \in \Omega \mid U(\omega) \leq \tilde{F}_X(y)\right\} \tag{50}$$

minden $y \in \mathbb{R}$ esetén.

Ekkor a (48) tartalmazáshoz hasonlóan látható be (49). Tekintsük F_X^{-1} egy alkalmas felírását: legyen $\bar{H} := \left\{z \mid \tilde{F}_X(z) \geq U(\omega)\right\}$, hiszen ekkor $F_X^{-1}(U(\omega)) = \inf \bar{H}$. Továbbá, $\tilde{F}_X$

jobbról való folytonossága miatt $\tilde{F}\left(F_X^{-1}(U(\omega))\right) \geq U(\omega)$. Tegyük fel, hogy $y < F_X^{-1}(U(\omega))$. Ekkor $y < \inf \bar{H}$ miatt $y \notin \bar{H}$, ezért azt kapjuk, hogy $\tilde{F}(y) < U(\omega)$, ami ellentmondás.

Az (50) tartalmazás pedig a (47) tartalmazáshoz hasonlóan adódik. Hiszen $\tilde{F}_X$ monotonitása alapján $y \geq F_X^{-1}(U(\omega))$ esetén $\tilde{F}_X(y) \geq \tilde{F}_X(F_X^{-1}(U(\omega))) \geq U(\omega)$.

6.8. Tétel. *Az alsó és felső VaR egyaránt monoton, pozitív homogén és eltolás invariáns (egy valószínűségi mező összes valószínűségi változóinak halmazán).*

A Value at Risk felírható $VaR_\alpha(X) = q^{1-\alpha}(-X)$ és $VaR^\alpha(X) = q_{1-\alpha}(-X)$ alakokban is.

Továbbá egy X valószínűségi változó esetén az $\alpha \mapsto VaR_\alpha(X)$ és $\alpha \mapsto VaR_\alpha(X)$ függvények ($\alpha \in (0,1)$) monoton csökkenőek.

Bizonyítás. Az alsó VaR esetére ismertetjük a bizonyítást, a felső VaR esetére hasonlóan egyszerűen adódnak az állítások.

Monotonitás. Ha $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, akkor $F_X(y) \geq F_Y(y)$ minden $y \in \mathbb{R}$ esetén. Ezért $\{y \mid F_X(y) < \alpha\} \subset \{y \mid F_Y(y) < \alpha\}$, azaz

$$-VaR_\alpha(X) = \sup\{y \mid F_X(y) < \alpha\} \leq \sup\{y \mid F_Y(y) < \alpha\} = -VaR_\alpha(Y).$$

Pozitív homogenitás. Ha $h > 0$, akkor $F_{hX}(y) = F_X(y/h)$, $y \in \mathbb{R}$, ezért $-VaR_\alpha(hX) = \sup\{y \mid F_{hX}(y) < \alpha\} = \sup\{y \mid F_X(y/h) < \alpha\} = h \sup\{z \mid F_X(z) < \alpha\} = -hVaR_\alpha(X)$.

Eltolás invariancia. Egy $a \in \mathbb{R}$ esetén $F_{X+a}(y) = F_X(y-a)$, $y \in \mathbb{R}$, ezért $-VaR_\alpha(X + a) = \sup\{y \mid F_{X+a}(y) < \alpha\} = \sup\{y \mid F_X(y-a) < \alpha\} = a + \sup\{z \mid F_X(z) < \alpha\} = a - VaR_\alpha(X)$.

A VaR ekvivalens átírásai adódnak a 6.5. Megjegyzésben leírtakból.

Végül, $\alpha < \beta$ esetén $\{z \mid F_X(z) < \alpha\} \subset \{z \mid F_X(z) < \beta\}$, ezért $q_\alpha(X) < q_\beta(X)$, amiből pedig adódik a VaR monotonitása.

A bizonyítás az eloszlásfüggvény jobbról folytonos változatát ($\tilde{F}$) használva a balról folytonos (F) helyett lényegében teljesen azonos. $\square$

6.9. Megjegyzés. A 6.8. tétel bizonyításában láthattuk, hogy az alsó és felső kvantilisek egyaránt pozitív homogén mutatók, továbbá $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$ esetén $q_\alpha(X) \leq q_\alpha(Y)$, $q^\alpha(X) \leq q^\alpha(Y)$, végül bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $q_\alpha(X+a) = q_\alpha(X)+a$, $q^\alpha(X+a) = q^\alpha(X)+a$.

A fentiekben a szubadditivitás kivételével bizonyítottuk, hogy a VaR teljesíti a koherenciához szükséges 3 axiómát. Azonban a VaR nem szubadditív, így nem is koherens. A VaR szubadditivitásának cáfolására könnyű példát konstruálni, ilyeneket ismertetünk most.

6.10. Példa. Tekintsünk egy egyszerű $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőt, ahol $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, és legyen $\mathbb{P}(\omega_1) = 0,01$, $\mathbb{P}(\omega_2) = \mathbb{P}(\omega_3) = 0,03$. Legyen X és Y egy-egy portfólióból származó nyereség, ahol

$$X(\omega_1) = -30, \quad X(\omega_2) = -20, \quad X(\omega_3) = -5, \quad X(\omega_4) = 20, \tag{51}$$

$$Y(\omega_1) = -30, \quad Y(\omega_2) = -5, \quad Y(\omega_3) = -20, \quad Y(\omega_4) = 20. \tag{52}$$

Ekkor $VaR_{0,05}(X) = VaR^{0,05}(X) = VaR_{0,05}(Y) = VaR^{0,05}(X) = 5$, viszont

$$\mathbb{P}(X+Y=-60) = 0,01, \quad \mathbb{P}(X+Y=-25) = 0,06, \quad \mathbb{P}(X+Y=40) = 0,93,$$

azaz $VaR_{0,05}(X+Y) = VaR^{0,05}(X+Y) = 25$.

A következő példa ötlete Paul Embrechtstől származik.

6.11. Példa. Legyenek az Y_i valószínűségi változók ($i = 1, \ldots, 100$) függetlenek és azonos eloszlásúak az alábbi eloszlással:

$$\mathbb{P}(Y_i = 2) = 0,99 \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(Y_i = -100) = 0,01.$$

Képzeljük például azt, hogy egy pénzintézet hiteleket ad, 1 évre, 2%-os kamatra, 100 ezer dollár értékben. Ekkor Y_i a pénzintézet egy ilyen szerződésből származó nyereségét írja le: egy év alatt keres 2 ezer dollárt a szerződésen nagy valószínűséggel, ám 1 % esélye van annak, hogy a hitel nem kerül visszafizetésre, mert például fizetésképtelenné válik az ügyfél. (Az egyszerűség kedvéért eltekintünk jelenértékek kalkulálásától az esetlegesen különböző időben érkező pénzforgalom miatt.)

Ekkor nyilvánvaló, hogy $VaR_{0,05}(Y_i) = -2$. Tekintsük most annak az L_1 portfóliónak a VaR értékét, amely tartalmazza a fenti 100 hitelszerződést, azaz $L_1 = \sum_{i=1}^{100} Y_i$. Ekkor a portfóliót másképpen is felírhatjuk, nevezetesen

$$L_1 = \sum_{i=1}^{100} Y_i = \sum_{i=1}^{100} (102\xi_i - 100) = -100^2 + 102 \sum_{i=1}^{100} \xi_i,$$

ahol a ξ változók alkalmas Bernoulli eloszlású változók, paraméterük 0,99, függetlenek. Másképpen, $\sum_{i=1}^{100} \xi_i = \eta$, ahol η binomiális eloszlású $(100;\ 0,99)$ paraméterértékekkel. Az eltolásinvarianciát és a pozitív homogenitást használva

$$VaR_{0,05}(L_1) = 102 VaR_{0,05}(\eta) + 100^2.$$

Továbbá vegyük észre, hogy

$$VaR_{0,05}(\eta) = -q_{0,05}(\eta) > -100,$$

hiszen η legnagyobb lehetséges értéke 100.

Azt kaptuk tehát, hogy

$$VaR_{0,05}\left(\sum_{i=1}^{100} Y_i\right) > \sum_{i=1}^{100} VaR_{0,05}(Y_i),$$

tehát ezen esetben sem teljesül a szubadditivitás.

Ezen példa több szempontból is meglepő, sőt, a szakemberek és a pénzintézetek számára valósággal rémisztő. Egyrészt azért, mert a szubadditivitás egy független és azonos eloszlású esetben nem teljesül, szemben az előző példával.

Másrészt azért, mert másképpen is értelmezhetjük az eredményt. Legyen L_2 egy olyan portfólió, amely egyetlen hitelszerződésből áll, ennek feltételei megegyeznek a fenti Y_1 szerződéssel, ám annak értéke legyen 10000 dollár, azaz $L_2 = 100Y_1$. Mivel a pozitív homogenitás miatt $VaR_{0,05}(L_2) = 100VaR_{0,05}(Y_1)$, így a fentieket úgy is interpretálhatjuk, hogy

$$VaR_{0,05}(L_1) > VaR_{0,05}(L_2).$$

Azaz a példánk éppen az ellenkezőjét mondja annak, amit hittünk és hiszünk portfóliók diverzifikálásáról. Kisebb a VaR-ban kifejezett kockázata egy egyösszegű nagy kölcsönnek, mint annak a portfóliónak, ahol ugyanilyen kölcsönöket diverzifikálnak független ügyfelek között azonos teljes összegben! Ráadásul jegyezzük meg azt is, hogy $VaR_\alpha(Y_1) = -2$ minden olyan esetben, amikor $0,01 < \alpha < 1$. Miközben ugyanezen tartományban $VaR_\alpha(L_2)$ értéke érzékenyen változik α változtatásával.

Mint láthatjuk, a VaR a fentiek miatt nem koherens kockázati mérték. Ráadásul éppen a sokak által legfontosabbnak tartott szubadditivitást nem teljesíti. Azaz, ezen mutatóval két portfólió kockázatosságát külön mérve, majd összeadava kevesebbet kaphatunk, mint a portfóliók egyesítésével létrehozott mutató esetén. Pedig azt várnánk, hogy az egyesítés során a kockázat egy részét elimináltuk. A fentiek miatt újabb kockázati mutatókat hoztak létre és vizsgáltak a szakirodalomban. Ezek közül az expected shortfall vált –tulajdonságai miatt– a legelfogadottabbá.

6.3. Az expected shortfall – A nagy veszteségek átlaga

Az expected shortfall egy egyszerű ötleten alapszik: tekintsük a portfólió jövőbeli lehetséges kimeneteleinek legrosszabb α*100 százalékát, akárcsak a VaR esetén. Ám most ezek felső határa (legjobbika) helyett vegyük ezek átlagát. Azaz, az expected shortfall a legrosszabb α*100 százalék esetén mutatja a profit (veszteség) várhatóértékét. A pontos definíció az alábbi.

6.12. Definíció. *Legyen X egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X)^- < \infty$ és legyen $\alpha \in (0,1)$, ahol $(X)^-$ az X negatív részét jelöli*[12]*. Ekkor az X α-expected shortfall értéke*

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\left(\mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_{\{X \le q_\alpha(X)\}}\right] + q_\alpha(X)\left[\alpha - \mathbb{P}(X \le q_\alpha(X))\right]\right).$$

Az expected shortfall megértésében segít a következő állítás, amely egy ekvivalens átírását adja a fogalomnak.

6.13. Tétel. *Legyen X egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X)^- < \infty$ és legyen $\alpha \in (0,1)$. Ekkor*

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_u(X)du = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F_X^{-1}(u)du.$$

Bizonyítás. Legyen U egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon és legyen $\eta := F_X^{-1}(U)$. Tudjuk, hogy ekkor X és U eloszlása megegyezik. Tekintve, hogy az F_X^{-1} függvény monoton növekvő, a következő egyszerű állítások adódnak:

$$\{U \le \alpha\} \subset \{\eta \le q_\alpha(X)\},$$

továbbá, $U(\omega) > \alpha$, $\omega \in \Omega$, (és ezért $\eta(\omega) \ge q_\alpha(X)$) és $\eta(\omega) \le q_\alpha(X)$ csak úgy teljesülhet egyszerre, ha $\eta(\omega) = q_\alpha(X)$. Ezek alapján

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha q_u(X)du &= \mathbb{E}\left(\eta\mathbf{1}_{\{U\le\alpha\}}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\eta\mathbf{1}_{\{\eta\le q_\alpha(X)\}}\right) - \mathbb{E}\left(\eta\mathbf{1}_{\{U>\alpha\}\cap\{\eta\le q_\alpha(X)\}}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{\{X\le q_\alpha(X)\}}\right) - q_\alpha(X)\mathbb{P}\left(\{U>\alpha\}\cap\{\eta\le q_\alpha(X)\}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{\{X\le q_\alpha(X)\}}\right) - q_\alpha(X)\left(\mathbb{P}(X\le q_\alpha(X)) - \alpha\right).
\end{aligned}$$

[12]Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor x pozitív része:

$$(x)^- = \begin{cases} x & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az x negatív része pedig $(x)^- = (-x)^+$.

Innen pedig $-\alpha$-val osztva adódik az állítás. $\square$

Az 6.13. Tétel állítását átírhatnánk felső kvantilisekre is. Könnyen látható, hogy $\int_0^\alpha q_u(X)du = \int_0^\alpha q^u(X)du$, így $ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q^u(X)du$. Hasonlóan, a 6.12. Definícióban is kicserélhetnénk az alsó kvantiliseket a megfelelő felső kvantilisekre, ettől az expected shortfall értéke nem változna. Ennek megmutatásához először jegyezzük meg, hogy $q^\alpha(X) = q_\alpha(X)$ esetén az állítás triviális. Ha pedig $q^\alpha(X) > q^\alpha(X)$, akkor $\mathbb{P}(X \leq q_\alpha(X)) = \alpha$ és ezért azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_{\{X\leq q^\alpha(X)\}}\right] + q^\alpha(X)\left[\alpha - \mathbb{P}(X \leq q^\alpha(X))\right] \\
&\quad= \mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_{\{X\leq q_\alpha(X)\}}\right] + q^\alpha(X)\mathbb{P}(X = q^\alpha(X)) + q^\alpha(X)\left[\alpha - \mathbb{P}(X \leq q_\alpha(X)) - \mathbb{P}(X = q^\alpha(X))\right] \\
&\quad= \mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_{\{X\leq q_\alpha(X)\}}\right] = ES_\alpha(X).
\end{aligned}$$

Tehát, a VaR-ral ellentétben itt nincs megkülönböztetve alsó és felső expected shortfall. Sőt, azt is láthatjuk, hogy egyéb formában is felírhatjuk az expected shortfallt, nevezetesen:

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\left(\mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_{\{X<q_\alpha(X)\}}\right] + q_\alpha(X)\left[\alpha - \mathbb{P}(X < q_\alpha(X))\right]\right),$$

vagy

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\left(\mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_{\{X\leq s\}}\right] + s\left[\alpha - \mathbb{P}(X \leq s)\right]\right), \quad \forall s \in [q_\alpha(X), q^\alpha(X)].$$

6.14. Megjegyzés. Az expected shortfall legfontosabb tulajdonságainak tárgyalása előtt néhány technikai jellegű megjegyzést teszünk. Legyen X egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X)^- < \infty$ és legyen $\alpha \in (0,1)$. Vezessük be az alábbi függvényt minden $y \in \mathbb{R}$ és $\omega \in \Omega$ esetére:

$$\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X(\omega)\leq y\}} := \begin{cases} \mathbf{1}_{\{X(\omega)\leq y\}}, & \text{ha } \mathbb{P}(X = y) = 0 \\ \mathbf{1}_{\{X(\omega)\leq y\}} + \frac{\alpha - \mathbb{P}(X\leq y)}{\mathbb{P}(X=y)}\mathbf{1}_{\{X(\omega)=y\}}, & \text{ha } \mathbb{P}(X = y) > 0. \end{cases}$$

Most ennek néhány egyszerű tulajdonságát foglaljuk össze. Ha $X(\omega) > y$, akkor $\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X(\omega)\leq y\}} = 0$, ha pedig $X(\omega) < y$, akkor $\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X(\omega)\leq y\}} = 1$. Továbbá az $X(\omega) = q_\alpha(X)$ esetben, ha $\mathbb{P}(X = y) > 0$, akkor $0 \leq \mathbb{P}(X \leq q_\alpha(X)) - \alpha < \mathbb{P}(X = q_\alpha(X))$. A fentiek miatt

$$\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X\leq q_\alpha(X)\}} \in [0,1]. \tag{53}$$

A definícióból közvetlenül adódnak még az alábbiak:

$$\mathbb{E}\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X\leq q_\alpha(X)\}} = \alpha, \tag{54}$$

$$ES_\alpha(X) = -\alpha^{-1}\mathbb{E}X\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X\leq q_\alpha(X)\}}. \tag{55}$$

6.15. Tétel. *Legyen* $V = \{X \, \textit{valószínűségi változó} \mid \mathbb{E}(X)^- < \infty\}$ *egy valószínűségi mezőn. Ekkor az expected shortfall koherens a* V *halmazon.*

Bizonyítás. A kvantilisek 6.9. Megjegyzésben ismertetett tulajdonságai a 6.13. Tétellel együtt azt eredményezik, hogy az expected shortfall kielégíti a monotonitást, pozitív homogenitást és az eltolás invarianciát.

Így a szubadditivitást kell csak belátnunk. Legyen X, Y két valószínűségi változó, melyekre $\mathbb{E}(X)^- < \infty$, $\mathbb{E}(Y)^- < \infty$, és legyen $Z = X + Y$. Ekkor (53) miatt

$$(X - q_\alpha(X))\left(\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z\leq q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X\leq q_\alpha(X)\}}\right) \geq 0. \tag{56}$$

Hiszen $X(\omega) > q_\alpha(X)$ esetén $\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X(\omega)\leq q_\alpha(X)\}} = 0$ és $X(\omega) < q_\alpha(X)$ esetén $\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X(\omega)\leq q_\alpha(X)\}} = 1$. Továbbá

$$\begin{aligned}
&\alpha[ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y) - ES_\alpha(Z)] \\
&\quad= \mathbb{E}\left(Z\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z\leq q_\alpha(Z)\}} - X\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X\leq q_\alpha(X)\}} - Y\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Y\leq q_\alpha(Y)\}}\right) \\
&\quad= \mathbb{E}\left(X\left[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z\leq q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X\leq q_\alpha(X)\}}\right] + Y\left[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z\leq q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Y\leq q_\alpha(Y)\}}\right]\right) \\
&\quad= \mathbb{E}\left([X - q_\alpha(X)]\left[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z\leq q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X\leq q_\alpha(X)\}}\right] + [Y - q_\alpha(Y)]\left[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z\leq q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Y\leq q_\alpha(Y)\}}\right]\right) \\
&\qquad+ \mathbb{E}\left(q_\alpha(X)\left[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z\leq q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X\leq q_\alpha(X)\}}\right] + q_\alpha(Y)\left[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z\leq q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Y\leq q_\alpha(Y)\}}\right]\right) \\
&\quad\geq q_\alpha(X)\mathbb{E}\left[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z\leq q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X\leq q_\alpha(X)\}}\right] + q_\alpha(Y)\mathbb{E}\left[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z\leq q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Y\leq q_\alpha(Y)\}}\right] \\
&\quad= q_\alpha(X)(\alpha - \alpha) + q_\alpha(Y)(\alpha - \alpha) = 0,
\end{aligned}$$

ahol az első egyenlőséget (55) alapján, az egyenlőtlenséget (56) alapján kaptuk, majd (54) felhasználásával adódott az utolsó sor. □

6.16. Tétel. *Ha X egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X)^- < \infty$, akkor az*

$$\alpha \mapsto ES_\alpha(X), \qquad \alpha \in (0,1)$$

függvény folytonos és monoton növekvő.

Bizonyítás. A 6.13. Tételből látszik, hogy az expected shortfall folytonos függvénye az α biztonsági szintnek. Mivel $-q_\alpha(X)$ csökkenő α-ban, ezért

$$\frac{\int_0^\alpha -q_u(X)du}{\alpha}$$

is az, amiből adódik, hogy az expected shortfall monoton α-ban. Ennek részletesebb bizonyításához legyen $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. A kvantilis monotonitásából adódóan létezik egy olyan $m \in \mathbb{R}$, amelyre teljesül, hogy $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -q_u(X)\,du = m\,(\alpha_2 - \alpha_1)$ és $m \le -q_{\alpha_1}(X)$. Ezért az is teljesül, hogy $m \le ES_{\alpha_1}(X)$. Ennélfogva

$$\begin{aligned} ES_{\alpha_2}(X) &= \frac{1}{\alpha_2}\int_0^{\alpha_2} -q_u(X)\,du + \frac{1}{\alpha_2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -q_u(X)\,du \\ &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2} ES_{\alpha_1}(X) + \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) m \le ES_{\alpha_1}(X). \end{aligned}$$

□

7. Bibliográfiai megjegyzések

A jegyzetben tárgyalt kérdések hasznosságelméleten alapuló pénzügyi modelleket igényelnek. Láthattuk, hogy különösen Neumann-Morgenstern típusú hasznosságfüggvényekre volt szükségünk. Ezen elmélet történeti áttekintésével és jelenlegi kutatási problémáival kapcsolatos kérdésekkel is foglalkoznak a [Berde és Petró] és [Eső és Lóránd] cikkek, amelyek az egész jegyzet írása során nagyon hasznosnak bizonyultak. Nyilvánvaló, hogy hasznosságelméleti bevezetőnek a mikroökonómia könyvek nagy része használható, a munkánkat az alábbiak segítették: [Kreps] és [Nordhaus és Samuelson]. A hasznosság és a várható hasznosság modelljének precíz axiomatikus leírásában Jos Potters munkái ([Potters] és [Potters2]) nagyon sokat segítettek, bár az [Ingersoll] és a [Huang és Litzenberger] könyvekben is találhatunk egy-egy rövid bevezetőt erről a kérdésről. Az axiomatikus felépítés számos kérdését tárgyalja [Schmidt] is, sokkal inkább a mikroökonómiai aspektusokra, mint a matematikai szempontból általános és bizonyításokat részletező tárgyalásmódra koncentrálva.

A dolgozat legfontosabb kérdéskörét kitevő portfóliókkal, kockázatkerüléssel kapcsolatos témákban számos munkát találhatunk az irodalomban, amelyeket munkánkhoz is használtunk. Például: a bevezető jellegű, kevés matematikai hátteret feltételező [Elton és Gruber]; a sokkal komolyabb matematikai hátteret igénylő [Duffie] vagy [Korn], ahol utóbbiban elsősorban a folytonos idejű portfólió-menedzsment problémáival találkozhatunk. A jegyzet írása során leginkább a [Huang és Litzenberger] és az [Ingersoll] könyvek nyújtottak segítséget, bár azt is meg kell jegyezni, hogy ezek matematikai szempontból nem mindig szolgáltatnak pontos, precíz levezetéseket, állításokat. Jegyezzük itt meg, hogy a portfólió- és kockázatmenedzsment

A kockáyati mértékekről szóló 6. fejezet írása során nagy segítséget jelentettek az alábbi művek: [Acerbi], [Acerbi2], ahol a VaR és az expected shortfall sok kérdésre kiterjedő ismertetése található; [Delbaen], ahol a kockázati mértékek koherenciájának részletes tárgyalása található; [Dowd], amely egy nagzszerű áttekintést ad a VaR-ról, annak közgazdasági alkalmazásáról és becsléséről. A kvantilisek és tulajdonságaik leírásához nagy segítséget nyújtott [Acerbi2] és [Major]. Végül megemlítjük Paul Embrechts nagyon hasznos munkáit (szakcikkek, fóliák, stb.), amelyekben számos gyakorlati és elméleti kérdés kerül tárgyalásra a kockázati mértékek témakörében (ld. http://www.math.ethz.ch/~embrechts/).

A jegyzetben tárgyalt problémák precíz ismertetéséhez és az állítások levezetéséhez szükséges matematikai háttér természetesen számos matematikai monográfiában megtalálható. A jegyzett elkészítésében nagyszerű segítséget nyújtottak az alábbi művek: [Cohn] a mértékelméleti kérdésekben, [Rockafellar] a konvex analízis problémáiban és végül [Lang] az analízis tárgykörében.

8. Függelék

Az alábbi két alapvető tétel jól ismert a klasszikus analízis tárgykörében. Ennélfogva ezek bizonyítása is megtalálható számos bevezető matematikai analízis könyvben vagy egyetemi jegyzetben (például a [Lang] monográfiában).

8.1. Tétel. (A Lagrange féle multiplikátor módszer) *Legyen U egy nyílt halmaz $\mathbb{R}^p$-ben ($p \in \mathbb{N}^+$) és tegyük fel, hogy $f, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{C}^1(U)$. Legyen továbbá*

$$S = \{x \in U \mid g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, k\}.$$

Ha $c \in S$ egy olyan pont, ahol f-nek lokális maximuma van, akkor a

$$\bigtriangledown g_1(c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1(c) \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial}{\partial x_p} g_1(c) \end{pmatrix}, \ldots, \bigtriangledown g_k(c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g_k(c) \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial}{\partial x_p} g_k(c) \end{pmatrix}, \bigtriangledown f(c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(c) \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial}{\partial x_p} f(c) \end{pmatrix}$$

gradiens vektorok lineárisan függőek.

Azt is jegyezzük itt meg, hogy a 8.1 Tétel feltételei mellett még az is igaz, hogy léteznek olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ konstansok, hogy

$$\bigtriangledown f(c) = \lambda_1 \bigtriangledown g_1(c) + \ldots + \lambda_k \bigtriangledown g_k(c).$$

Ennélfogva az alábbi egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg f lokális maximumainak helyeit.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f(x)+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j(x)\right)=0, \qquad i=1,\dots,p,$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_t}\left(f(x)+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j(x)\right)=0, \qquad t=1,\dots,k.$$

8.2. Tétel. (Az implicit függvény tétel) *Legyen $U\subset\mathbb{R}^{p+q}$ egy üres halmaz, $p,q\in\mathbb{N}^+\cup\{\infty\}$, és tegyük fel, hogy $f\in\mathcal{C}^n(U\to\mathbb{R}^q)$. Továbbá legyen $S=\{x\in U\mid f(x)=0\}$. Tegyük fel, hogy $a\in S$ úgy, hogy*

$$det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{p+1}}f_1(a) & \frac{\partial}{\partial x_{p+2}}f_1(a) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{p+q}}f_1(a)\\ \cdot & & & \cdot\\ \cdot & & & \cdot\\ \cdot & & & \cdot\\ \frac{\partial}{\partial x_{p+1}}f_q(a) & \frac{\partial}{\partial x_{p+2}}f_q(a) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{p+q}}f_q(a)\end{pmatrix}\neq 0.$$

Ekkor van olyan $U_0\subset\mathbb{R}^{p+q}$ környezete az a pontnak és létezik olyan g függvény az $W\subset\mathbb{R}^p$ értelmezési tartománnyal úgy, hogy $g\in\mathcal{C}^n(W\to\mathbb{R}^q)$ és

$$S\cap U_0=\Big\{\big(w,g(w)\big)\ \Big|\ w\in W\Big\}.$$

Továbbá $a_I\in W$, $g(a_I)=a_{II}$, ahol az alábbi jelölésekkel élünk: $a=(a_1,\dots,a_{p+q})$, $a_I=(a_1,\dots,a_p)$, $a_{II}=(a_{p+1},\dots,a_{p+q})$. Végül, $f(w,g(w))=0$ minden $w\in W$ esetén.

Az alábbiakban a parciális integrálás tételének egyik alakját mondjuk ki. Több mértékelméleti könyvben megtalálható a bizonyítása, mi a nagyszerű [Cohn] műnek az 5. fejezetére hivatkozunk itt.

8.3. Tétel. (Parciális integrálás) *Legyen F és G monoton növekvő, balról folytonos, korlátos, valós értékű függvény a valós intervallumon értelmezve, melyekre teljesül, hogy $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$. Legyen továbbá $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.*
Ekkor

$$\int_{[a,b]} G(x)dF(x) + \int_{[a,b]} F(x+)dG(x) = F(b+)G(b+) - F(a)G(a), \tag{57}$$

ahol $F(x+)$ és $G(x+)$ F illetve G jobboldali határértékeit jelölik az x pontban.

A (57) egyenlőségből kapható az alábbi egyenlőség:

$$\int_{[a,b]} \frac{G(x) + G(x+)}{2} dF(x) + \int_{[a,b]} \frac{F(x) + F(x+)}{2} dG(x) = F(b+)G(b+) - F(a)G(a).$$

Jegyezzük meg továbbá, hogy abban az esetben, ha nincs olyan pont, ahol F és G sem folytonos, akkor egyszerűbb alakban is írhatjuk a parciális integrálás formuláját, nevezetesen:

$$\int_{[a,b]} G(x)dF(x) + \int_{[a,b]} F(x)dG(x) = F(b+)G(b+) - F(a)G(a).$$

Fontosabb jelölések

$\mathbb{N}$:	a természetes számok halmaza
$\mathbb{R}$:	a valós számok halmaza
$\mathbb{P}$:	valószínűség (valószínűségi mérték)
$\mathbb{E}\,\xi$:	a ξ valószínűségi változó várható értéke
$\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$:	az n-szer folytonosan differenciálható valós függvények halmaza
$sgn(x)$:	az x valós szám előjele
$\mathcal{B}$:	az összes jószágkosarak halmaza
$\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ vagy $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$:	az $\mathbf{y}$ kosár szigorúan preferált az $\mathbf{x}$ kosárral szemben
$\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ vagy $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$:	az $\mathbf{y}$ kosár preferált az $\mathbf{x}$ kosárral szemben
$\mathbf{x} \approx \mathbf{y}$:	az $\mathbf{y}$ és az $\mathbf{x}$ kosarak közömbös viszonyban állnak
U:	hasznosságfüggvény
$\mathcal{L}$:	lottó
$\mathbb{L}$:	az összes lottók halmaza
$\mathcal{L}_1 \prec \mathcal{L}_2$ vagy $\mathcal{L}_2 \succ \mathcal{L}_1$:	az $\mathcal{L}_2$ lottó szigorúan preferált az $\mathcal{L}_1$ lottóval szemben
$\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$ vagy $\mathcal{L}_1 \succeq \mathcal{L}_2$:	az $\mathcal{L}_2$ lottó preferált az $\mathcal{L}_1$ lottóval szemben
$\mathcal{L}_1 \approx \mathcal{L}_2$:	az $\mathcal{L}_1$ és $\mathcal{L}_2$ lottók közömbös viszonyban állnak
$\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, n\}$:	értékpapírpiac $n+1$ értékpapírral
r_i:	a piac i-edik értékpapírjának a hozama
$R(P)$:	relatív kockázatkerülés a P jövedelemszinten
$R_A(P)$:	abszolút kockázatkerülés a P jövedelemszinten
$\pi = (\beta_0, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_n)$:	portfólió, benne az i-edik értékpapírba fektetett összeg β_i
$\varepsilon(X)$:	keresletrugalmasság az X jövedelemszint mellett
$r_i \succcurlyeq_{FSD} r_j$:	az i-edik részvény elsőrendben sztochasztikusan dominálja a j-edik részvényt
$r_i \succcurlyeq_{SSD} r_j$:	az i-edik részvény másodrendben sztochasztikusan dominálja a j-edik részvényt
$\mathbf{1}_A$	az A halmaz indikátor függvénye
$\square$:	a bizonyítás vége

Hivatkozások

[Acerbi] Acerbi, C.: „Coherent Representations of Subjective Risk Aversion", in Giorgio Szegö (Ed): *Risk Measures for the 21st Century*, Wiley, New York, 2004.

[Acerbi2] Acerbi, C.: *„On the coherence of Expected Shortfall"*, http://www.gloriamundi.org/detailpopup.asp?ID=453054765, 2002.

[Arató] Arató, M.: *„Általános biztosításmatematika"*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1997.

[Berde és Petró] Berde, É. és Petró, K.: „A különféle hasznosságfogalmak szerepe a közgazdaságtanban", *Közgazdasági Szemle*, 1995, 5, pp. 511-529.

[Cohn] Cohn, D. L.: *„Measure Theory"*, Birkhäuser Boston, 1980.

[Delbaen] Delbaen, F.: *„Coherent risk measures on general probability spaces"*, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich, 2000.

[Dowd] Dowd, K.: *„Beyond Value at Risk"*, The New Science of Risk Management, John Wiley & Sons, 1999.

[Duffie] Duffie, D.: *„Dynamic Asset Pricing Theory"*, Princeton University Press, New Jersey, 1992.

[Elton és Gruber] Elton, E. J. and Gruber M. J.: *„Modern portfolio theory and investment analysis"*, John Wiley & Sons, Inc., 1995.

[Eső és Lóránd] Eső, P. és Lóránd, G.: „A racionalitás közgazdasági értelmezéséről" *Közgazdasági Szemle*, 1993, 4, pp. 311-324.

[Huang és Litzenberger] Huang, Chi-Fu and Litzenberger, R. H.: *„Foundations for financial economics"*, Prentice Hall, 1988.

[Hull] Hull, J. C.: *„Options, futures, and other derivative securities”*, Prentice-Hall International, Inc., 1993.

[Ingersoll] Ingersoll, J. E.: *„Theory of Financial Decision Making”*, Rowman & Littlefield, 1987.

[Korn] Korn, R.: *„Optimal portfolios”*, World Scientific, 1998.

[Kreps] Kreps, D. M.: *„A course in microeconomic theory”*, Princeton University Press, Princeton, 1990.

[Lang] Lang, S.: *„Analysis”* I., II., Addison-Wesley Publishing Company, 1968,1969.

[Major] Major, P.: *„ The relation between the closeness of random variables and their distributions”*, http://www.renyi.hu/ major/probability/couple.html, 2005.

[Nordhaus és Samuelson] Nordhaus, W. D. and Samuelson, P. A.: *„Economics”*, McGraw-Hill, Inc., 1992.

[Potters] Potters, J.A.M.: *„Mathematische economie”*, Universiteit Nijmegen, 1996.

[Potters2] Potters, J.A.M.: *„Preferences on stochastic outcomes”*, kézirat, Universiteit Nijmegen, 1998.

[Rockafellar] Rockafellar, R. T.: *„Convex Analysis”*, Princeton, New Jersey, 1970.

[Schmidt] Schmidt, U.: *„Axiomatic Utility Theory under Risk”*, Springer, Berlin, 1998.