

Lajkó Károly

# Differenciálegyenletek

mobiDIÁK könyvtár



Lajkó Károly  
DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

**mobiDIÁK könyvtár**

SOROZATSZERKESZTŐ

Fazekas István

Lajkó Károly

# Differenciálegyenletek

egyetemi jegyzet, harmadik kiadás

**mobiDIÁK könyvtár**  
Debreceni Egyetem  
Informatikai Intézet

Copyright © Lajkó Károly, 2004

Copyright © elektronikus közlés mobiDIÁK könyvtár, 2004

**mobiDIÁK könyvtár**

Debreceni Egyetem

Informatikai Intézet

4010 Debrecen, Pf. 12

<http://mobidiak.inf.unideb.hu>

A mű egyéni tanulmányozás céljára szabadon letölthető. Minden egyéb felhasználás csak a szerző előzetes írásbeli engedélyével történhet.

A mű *A mobiDIÁK önszervező mobil portál* (IKTA, OMF-00373/2003) és a *GNU Iterátor, a legújabb generációs portál szoftver* (ITEM, 50/2003) projektek keretében készült.

# Tartalomjegyzék

<b>I.</b>	<b>Differenciálegyenlet, Cauchy-feladat fogalma</b>	<b>9</b>
1.	Bevezető feladatok . . . . .	9
2.	Differenciálegyenlet fogalma . . . . .	10
3.	Kezdeti érték probléma vagy Cauchy-feladat . . . . .	12
<b>II.</b>	<b>Elemi úton megoldható differenciálegyenlet-típusok</b>	<b>15</b>
1.	Szeparábilis differenciálegyenletek . . . . .	15
2.	Változóban homogén differenciálegyenletek . . . . .	17
3.	Az $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ differenciálegyenlet . . . . .	17
4.	Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek . . . . .	18
5.	Egzakt differenciálegyenletek . . . . .	22
6.	Integráló szorzó keresése . . . . .	25
7.	A Bernoulli- és Ricatti-egyenlet . . . . .	26
<b>III.</b>	<b>Egzisztencia-tételek Cauchy-feladatokra</b>	<b>29</b>
1.	Segédeszközök a funkcionálanalízisből . . . . .	29
2.	Egzisztencia és unicitiás tétel DER-KÉP-re . . . . .	31
3.	(L-DER-KÉP) megoldhatósága . . . . .	35
4.	( $n$ -KÉP) megoldhatósága . . . . .	36
5.	Egzisztenciátétel DER-KÉP-re . . . . .	38
<b>IV.</b>	<b>Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek</b>	<b>39</b>
1.	Az $n$ -edrendű lineáris homogén differenciálegyenletek általános elmélete . . . . .	39
2.	Konstansegütthetős lineáris homogén differenciálegyenletek	46
3.	$n$ -edrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek . . . . .	48
4.	Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek . . . . .	51
5.	Konstansegütthetős lineáris differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval . . . . .	58
<b>V.</b>	<b>Peremfeladatok, stabilitás</b>	<b>61</b>
1.	A peremfeladat fogalma . . . . .	61
2.	Sturm-Liouville rendszerek . . . . .	62
3.	Parciális differenciálegyenletek peremfeltételekkel . . . . .	65

4. Stabilitás . . . . .	67
<b>VI. Variációszámítás</b>	<b>75</b>
1. Alapfogalmak, alapeladatok . . . . .	75
2. Segédtelemek . . . . .	78
3. Funkcionálok variációi . . . . .	79
4. Az Euler-Lagrange differenciálegyenlet . . . . .	80
5. Az 1. alapeladat megoldása . . . . .	83
<b>Feladatsor</b>	<b>86</b>



# I. DIFFERENCIÁLEGYENLET, CAUCHY-FELADAT FOGALMA

## 1. Bevezető feladatok

- a) Legyen adott az egyenesen mozgó pont  $v$  sebességfüggvénye, mely folytonos. A  $t_0$  időpillanatban tartózkodjon a pont az  $S_0$  helyen. Határozzuk meg a pont  $S$  útfüggvényét!

*Megoldás:* A sebesség definíciójából következik az

$$(1.1) \quad S'(t) = v(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

egyenlet, ahol  $S$  az ismeretlen,  $v$  az ismert függvény.

Az egyenletben  $S'$  szerepel (ez nehézséget jelent), de (1.1) azt mutatja, hogy  $S$  primitív függvénye  $v$ -nek (ez viszont jó), így

$$(*) \quad S(t) = \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + C$$

teljesül. Ugyanakkor a feladat szerint  $S(t_0) = S_0$  is teljesül, így a probléma az

$$(1.2) \quad S'(t) = v(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad S(t_0) = S_0$$

alakban fogalmazható meg, azaz (1.1)-et az  $S(t_0) = S_0$  feltétel mellett kell megoldani, ami (\*) miatt adja, hogy  $C = S_0$ , így az

$$S(t) = S_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \quad (t \in \mathbb{R})$$

szerint adott a feladat megoldása.

- b) Mennyi ideig emelkedik egy  $v_0 = 100 \text{ m/sec}$  kezdősebességgel függőlegesen felfelé lőtt rakéta?

*Megoldás:* Fizikából ismeretes, hogy a rakéta  $v$  sebességfüggvénye és deriváltja kielégíti a

$$(1.3) \quad v'(t) = -g - k v^2(t)$$

egyenletet. Ennek a megoldását kell keresni a  $v(0) = 100$  feltétel mellett és meg kell határozni azt a  $T$  időpillanatot, amikor  $v(T) = 0$ . A feladat tehát

$$(1.4) \quad v'(t) = -g - k v^2(t), \quad v(0) = 100, \quad v(T) = 0$$

megoldása. Látható, hogy most a keresett  $v$  függvény és a  $v'$  deriváltfüggvénye is szerepel. A megoldás most nem nagyon „látszik”.

Az (1.1) és (1.3), illetve (1.2) és (1.4) általánosítása elvezet a differenciálegyenlet, illetve Cauchy-feladat fogalmához.

## 2. Differenciálegyenlet fogalma

Jelöljön  $y$  a továbbiakban egy keresett függvényt,  $y(x)$  ennek a helyettesítési értékét  $x$ -ben. Legyen  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  adott, ekkor a

$$(2.1) \quad y' = f(x, y) \quad (\text{illetve } y'(x) = f(x, y(x)))$$

egyenlet az (1.1) és (1.3) egyenletek általánosításának tekinthető. (2.1)-et elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenletnek is szokás nevezni.

Általánosabban:

**1. definíció.** Legyen  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény (ahol  $D$  egy tartomány). Az

$$(2.2) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

egyenletet  $n$ -edrendű közönséges explicit differenciálegyenletnek nevezzük, ennek speciális esete  $n = 1$ -re a (2.1) elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenlet.

Az  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  (ahol  $I \subset \mathbb{R}$  intervallum) függvény megoldása (2.2)-nek  $I$ -n, ha

- 1)  $y$   $n$ -szer differenciálható,
- 2)  $(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in D, \quad \forall x \in I,$
- 3)  $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \quad \forall x \in I$

teljesül.

További általánosítás:

**2. definíció.** Legyen  $F : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$  adott folytonos függvény. A

$$(2.3) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

egyenletet közönséges  $n$ -edrendű differenciálegyenletnek nevezzük.

Az  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény megoldása a (2.3) differenciálegyenletnek az  $I$  intervallumon, ha

- 1)  $y$   $n$ -szer differenciálható,
- 2)  $(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in D, \quad \forall x \in I,$
- 3)  $F(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I$

teljesül.

**Megjegyzés.** Ha (2.2), illetve (2.3)-ban  $f$ , illetve  $F$  az  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ , illetve  $y, y', \dots, y^{(n)}$  változóinak lineáris függvénye, akkor a (2.2), illetve (2.3) differenciálegyenlet lineáris, egyébként nemlineáris.

**3. definíció.** Legyen  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  tartomány,  $f = (f_1, \dots, f_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos függvény. A

$$(2.4) \quad y' = (y'_1, \dots, y'_n) = f(x, y) = f(x, y_1, \dots, y_n)$$

egyenletrendszert, amely az

$$(2.4') \quad y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

alakba is írható, elsőrendű közönséges ( $n$  ismeretlen függvényt tartalmazó) explicit differenciálegyenlet-rendszernek nevezzük.

Az  $y = (y_1, \dots, y_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény (függvényrendszer) a (2.4) (illetve (2.4')) differenciálegyenlet-rendszer megoldása  $I$ -n, ha

- 1)  $y$  (illetve az  $y_i$ -k) differenciálható(k),
- 2)  $(x, y(x)) = (x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \in D \quad \forall x \in I$ ,
- 3)  $y'(x) = f(x, y(x))$  (illetve  $y'_i(x) = f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$   
 $i = 1, \dots, n$ )  $\forall x \in I$

teljesül.

### 3. Kezdeti érték probléma vagy Cauchy-feladat

**1. definíció.** Legyen  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  tartomány,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény,  $(x_0, y_{01}, \dots, y_{0n}) \in D$  rögzített. A

$$(3.1) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

problémát egy  $n$ -edrendű explicit közönséges differenciálegyenletre vonatkozó kezdeti érték problémának vagy Cauchy-feladatnak nevezzük (ez  $n = 1$ -re  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  alakú).

Az  $y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1}$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) kikötéseket kezdeti feltételeknek nevezzük.

Az  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény megoldása (3.1) ( $n$ -KÉP)-nek, ha

- 1)  $y$   $n$ -szer differenciálható,
- 2)  $(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in D \quad \forall x \in I$ ,
- 3)  $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad \forall x \in I$ ,
- 4)  $y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \quad (i = 0, \dots, n-1)$

teljesül.

**Megjegyzés.** Hasonló a helyzet a nem explicit esetben is,  $F : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$  függvénnyel.

**2. definíció.** Legyen  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  tartomány,  $f = (f_1, \dots, f_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos függvény,  $(x_0, y_0) = (x_0, y_{01}, \dots, y_{0n}) \in D$  adott pont. A

$$(3.2) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (y = (y_1, \dots, y_n))$$

problémát egy differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdeti érték problémának vagy Cauchy-feladatnak nevezzük.

Az  $y = (y_1, \dots, y_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény megoldása a (3.2) (DER-KÉP)-nek, ha

- 1)  $y$  differenciálható,
- 2)  $(x, y(x)) = (x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \in D \quad \forall x \in I$ ,
- 3)  $y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in I$ ,
- 4)  $y(x_0) = y_0$

teljesül.

**Tétel (átviteli elv).** Legyen  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  tartomány,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény,  $(x_0, y_{01}, \dots, y_{0n}) = (x_0, y_0) \in D$  rögzített.

Az  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény akkor és csak akkor megoldása a (3.1) ( $n$ -KÉP)-nek  $I$ -n, ha az  $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$  vektorfüggvény (függvény  $n$ -es) megoldása a

$$(*) \quad \begin{cases} y_1' & = & y_2 \\ & \vdots & \\ y_{n-1}' & = & y_n \\ y_n' & = & f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad y_i(x_0) = y_{0i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

(DER-KÉP)-nek  $I$ -n.

**Bizonyítás.**

- a) Ha  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  megoldása (3.1)-nek  $I$ -n, akkor az

$$y_1(x) \doteq y(x), \quad y_2(x) \doteq y'(x), \quad \dots \quad y_n(x) \doteq y^{(n-1)}(x)$$

( $x \in I$ ) szerint definiált  $(y_1, \dots, y_n)$  vektorfüggvény megoldása  $(*)$ -nak, mert

$$y_1'(x) = y'(x) = y_2(x), \quad y_2'(x) = y''(x) = y_3(x), \quad \dots$$

$$y_{n-1}'(x) = y^{(n-1)}(x) = y_n(x),$$

$$\begin{aligned} y_n'(x) &= y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) = \\ &= f(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \end{aligned}$$

( $x \in I$ ), illetve  $y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1}$  ( $i = 0, \dots, n-1$ )-ből

$$y_1(x_0) = y_{01}, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_{0n},$$

azaz

$$y_i(x_0) = y_{0i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

adódik.

- b) Ha  $(y_1, \dots, y_n)$  megoldása (\*)-nak  $I$ -n, akkor  $y_i'(x) = y_{i+1}(x)$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ,  $x \in I$ ), így

$$y_n(x) = y_{n-1}'(x) = y_{n-2}''(x) = \dots = y_1^{(n-1)}(x), \quad x \in I,$$

azaz

$$y_1^{(n)}(x) = y_n'(x) = f(x, y_1(x), \dots, y_1^{(n-1)}(x)), \quad x \in I$$

és

$$y_1^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \quad (i = 0, \dots, n-1),$$

tehát  $y_1 \doteq y : I \rightarrow \mathbb{R}$  megoldása (3.1)-nek  $I$ -n.

**Megjegyzés.** Az átviteli elv lehetővé teszi, hogy  $(n$ -KÉP) feladatok megoldhatóságát (DER-KÉP) megoldhatóságára vezessük vissza.

## II. ELEMI ÚTON MEGOLDHATÓ DIFFERENCIÁLEGYENLET- TÍPUSOK

### 1. Szeparábilis differenciálegyenletek

**Definíció.** Legyenek  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $g \neq 0$ ) adott folytonos függvények. Az

$$(SZ) \quad y' = f(x)g(y)$$

differenciálegyenletet szeparábilis (szétválasztható változójú) differenciálegyenletnek nevezzük.

**Tétel.** Az  $y : [a, b] \rightarrow [c, d]$  differenciálható függvény akkor és csak akkor megoldása (SZ)-nek, ha

$$(SZMo) \quad \left( \left( \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} dt \right) \circ y \right) (x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

( $x, x_0 \in [a, b]$ ;  $y, y_0 \in [c, d]$ ) teljesül.

**Bizonyítás.**  $f$  és  $1/g$  folytonosak, így az

$$F(x) \doteq \int_{x_0}^x f(t) dt + C_1 \quad (x, x_0 \in [a, b]),$$
$$G(y) \doteq \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} dt + C_2 \quad (y, y_0 \in [c, d])$$

szerint definiált  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  függvényekre  $F' = f$ ,  $G' = 1/g$  teljesül.

a) Ha  $y$  teljesíti (SZMo)-t, akkor

$$G(y(x)) = F(x) + C_2 - C_1 \quad (x \in [a, b]),$$

ami  $y$ ,  $F$ ,  $G$  differenciálhatósága miatt adja, hogy

$$G'(y(x)) \cdot y'(x) = F'(x) \quad (x \in [a, b]),$$

azaz

$$y'(x) = f(x)g(y(x)) \quad (x \in [a, b])$$

teljesül, tehát  $y$  megoldása (SZ)-nek.

b) Ha  $y$  megoldása (SZ)-nek, akkor

$$f(x) = \frac{y'(x)}{g(y(x))} \quad (x \in [a, b])$$

és a helyettesítéses integrálás tétele miatt bármely  $x, x_0 \in [a, b]$  esetén

$$\int_{x_0}^x f(t)dt = \int_{x_0}^x \frac{y'(t)}{g(y(t))} dt = \left( \left( \int_{y_0=y(x_0)}^y \frac{1}{g(t)} dt \right) \circ y \right) (x)$$

következik, azaz (SZMo) teljesül.

### Megjegyzések.

- 1) A tétel szerint  $y(x_0) = y_0$  is teljesül, így az  $y' = f(x)g(y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  kezdeti érték probléma megoldását kaptuk meg.
- 2) A következő formális módszert gyakran használják:

$$(SZ) \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \longrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \quad (*),$$

amit megoldva  $y$ -ra kapjuk (SZ) megoldását. Az  $(x_0, y_0)$  ponton áthaladó megoldáshoz úgy kell megválasztani az integrációs konstansokat, hogy a (\*) egyenlőség teljesüljön  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  mellett. Ez teljesül, ha

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^x f(t)dt,$$

ami adja, hogy  $y$  teljesíti (SZMo)-t.

- 3) Vizsgálható olyan eset is, amikor valamilyen  $y_0 \in [c, d]$ -re  $g(y_0) = 0$  (ekkor  $y(x) = y_0$  nyilván megoldás, de lehetnek más megoldások is).



## 2. Változóban homogén differenciálegyenletek

**Tétel.** Legyen  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  adott folytonos függvény,  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  olyan, hogy  $0 \notin [a, b]$  és  $\exists y' [a, b]$ -n és  $y(x)/x \in [c, d]$ .  
 $y$  akkor és csak akkor megoldása  $[a, b]$ -n a

$$(VH) \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

változóban homogén differenciálegyenletnek, ha az

$$u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad u(x) \doteq \frac{y(x)}{x}$$

függvény megoldása  $[a, b]$ -n az

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

szeparábilis differenciálegyenletnek.

**Bizonyítás.** Nyilvánvaló.

## 3. Az $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ differenciálegyenlet

– Ha  $c = \gamma = 0$ , akkor a címben egy (VH) típusú egyenlet szerepel, mondjuk  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  típusú adott folytonos függvény esetén.

– Ha

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = a\beta - b\alpha = 0,$$

azaz ha  $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \lambda$ , illetve  $a = \lambda\alpha$ ,  $b = \lambda\beta$ , akkor a címben szereplő egyenlet átmegy az

$$y' = g(\alpha x + \beta y + \gamma)$$

alakba, melyet az

$$u(x) = \alpha x + \beta y(x) + \gamma$$

helyettesítéssel az

$$u' = \alpha + \beta y' = \alpha + \beta g(u)$$

alakba írhatunk, ami egy speciális (SZ) egyenlet.

– Ha

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0,$$

akkor az

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszernek pontosan egy  $\xi, \eta$  megoldása van. Ekkor belátható (igen egyszerűen), hogy az

$$y : H \rightarrow \mathbb{R} \quad (\xi \notin H, x \in H \Rightarrow \alpha x + \beta y + \gamma \neq 0)$$

függvény akkor és csakis akkor megoldása  $H$ -n az általános differenciálegyenletnek, ha a

$$\psi : H^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(t) = y(t + \xi) - \eta \quad (H^* = \{t \mid t + \xi \in H\})$$

függvény megoldása az

$$\psi'(x) = F\left(\frac{\psi(x)}{x}\right)$$

differenciálegyenletnek, ahol

$$F(z) = f\left(\frac{a + bz}{\alpha + \beta z}\right).$$

## 4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

A következőkben szükségünk lesz az alábbi, a paraméteres integrálok differenciálására vonatkozó, a korábbinál részben általánosabb, de kevesebb változószerű és egyszerűbb értelmezési tartományú függvényekre teljesülő tételre.

**Lemma.** Legyenek  $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható függvények, hogy

$$c \leq \varphi(x), \psi(x) \leq d, \quad x \in [a, b].$$

Legyen továbbá  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos és az első változója szerint folytonosan differenciálható függvény  $[a, b] \times [c, d]$ -n. Ekkor a

$$h(x) \doteq \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt \quad x \in [a, b]$$

függvény differenciálható, és  $\forall x \in [a, b]$  esetén

$$h'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} D_1 f(x, t) dt + f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \varphi(x))\varphi'(x).$$

**Bizonyítás.**

$$\text{Ha } \phi(x) \doteq \int_c^d f(x, t) dt \quad \Rightarrow \quad \exists \phi'(x) = \int_c^d D_1 f(x, t) dt.$$

$$\begin{aligned} \text{Ha } F(x, y, z) &= \int_y^z f(x, t) dt \quad \Rightarrow \quad \exists D_1 F = \int_y^z D_1 f; \\ &\quad \exists D_2 F = -f(x, y); \\ &\quad \exists D_3 F = f(x, z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mivel } h(x) &= F(x, \varphi(x), \psi(x)) \quad \text{és} \quad \exists D_1 F, D_2 F, D_3 F; \\ &\Rightarrow \exists h'(x) = D_1 F + D_2 F \varphi' + D_3 F \psi'; \\ &\Rightarrow \text{az állítás.} \end{aligned}$$

**Definíció.** Legyenek  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  adott folytonos függvények,  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható ismeretlen függvény. A

$$(LH) \quad y' = f(x)y + g(x)$$

differenciálegyenletet elsőrendű lineáris inhomogén, míg az

$$(LH) \quad y' = f(x)y$$

differenciálegyenletet elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletnek nevezzük.

**Tétel.** Az  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény akkor és csak akkor megoldása (LIH)-nek, ha  $\exists c \in \mathbb{R}$ , hogy

$$(LIHMo) \quad y(x) = cy_H(x) + y_P(x) \quad (x \in [a, b]),$$

ahol  $y_H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  az (LH) differenciálegyenlet sehol el nem tűnő,  $y_P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  pedig (LIH) egy (partikuláris) megoldása.

Továbbá, ha  $x_0 \in [a, b]$  rögzített, akkor bármely  $x \in [a, b]$ -re

$$(H) \quad y_H(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x f(t)dt\right),$$

$$(P) \quad \begin{cases} y_P(x) = \int_{x_0}^x g(\tau) \exp\left(\int_{\tau}^x f(t)dt\right) d\tau = \\ = \left[ \exp\left(\int_{x_0}^x f(t)dt\right) \right] \cdot \int_{x_0}^x g(\tau) \exp\left(-\int_{x_0}^{\tau} f(t)dt\right) d\tau . \end{cases}$$

**Bizonyítás.**

a) Legyen  $y$  megoldása (LIH)-nek,  $x_0 \in [a, b]$  adott, akkor

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x) \quad (x \in [a, b]),$$

melyet  $\exp\left(-\int_{x_0}^x f(t)dt\right) \neq 0$ -val szorozva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} y'(x) \exp\left(-\int_{x_0}^x f(t)dt\right) - f(x)y(x) \exp\left(-\int_{x_0}^x f(t)dt\right) &= \\ &= g(x) \exp\left(-\int_{x_0}^x f(t)dt\right), \end{aligned}$$

amiből látható, hogy  $x \in [a, b]$  esetén

$$\frac{d}{dx} \left[ y(x) \exp \left( - \int_{x_0}^x f(t) dt \right) \right] = g(x) \exp \left( - \int_{x_0}^x f(t) dt \right).$$

Ez pedig adja, hogy

$$y(x) \exp \left( - \int_{x_0}^x f(t) dt \right) = \int_{x_0}^x g(\tau) \exp \left( - \int_{x_0}^{\tau} f(t) dt \right) d\tau + c,$$

melyet  $\exp \left( \int_{x_0}^x f(t) dt \right)$ -vel szorozva

$$\begin{aligned} y(x) &= c \exp \left( \int_{x_0}^x f(t) dt \right) + \int_{x_0}^x g(\tau) \exp \left( \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^{\tau} f(t) dt \right) d\tau = \\ &= c \exp \left( \int_{x_0}^x f(t) dt \right) + \int_{x_0}^x g(\tau) \exp \left( \int_{\tau}^x f(t) dt \right) d\tau \end{aligned}$$

adódik, melyből (H) és (P) figyelembevételével jön (LIHMo).

b) Ha  $y$  (LIHMo) alakú, akkor ((H)-t és (P)-t tekintve)

$$y'_H(x) = f(x) \exp \left( \int_{x_0}^x f(t) dt \right) = f(x) y_H(x),$$

azaz (H) megoldása (LH)-nak.

Ugyanakkor (P)-ből, a lemma

$$\varphi(x) = x_0, \quad \psi(x) = x, \quad f(x, \tau) = g(\tau) \exp \left( \int_{\tau}^x f(t) dt \right)$$

speciális választása mellett bármely  $x, \tau \in [a, b]$  esetén

$$\begin{aligned} y'_P(x) &= \int_{x_0}^x g(\tau) \exp \left( \int_{\tau}^x f(t) dt \right) f(x) d\tau + g(x) \exp \left( \int_x^x f(t) dt \right) - 0 = \\ &= f(x) \left[ \int_{x_0}^x g(\tau) \exp \left( \int_{\tau}^x f(t) dt \right) d\tau \right] + g(x) = \\ &= f(x) y_P(x) + g(x) \end{aligned}$$

adódik, azaz  $y_P$  megoldása (LIH)-nek.

Végül pedig (LIHMo) differenciálásával bármely  $x \in [a, b]$  esetén

$$\begin{aligned}y'(x) &= [cy_H + y_P]'(x) = cy_H'(x) + y_P'(x) = \\ &= cf(x)y_H(x) + f(x)y_P(x) + g(x) = \\ &= f(x)[cy_H(x) + y_P(x)] + g(x) = f(x)y(x) + g(x),\end{aligned}$$

azaz a (LIHMo) alakú függvény valóban megoldása (LIH)-nek.

## 5. Egzakt differenciálegyenletek

**Definíció.** Legyen  $D \subset \mathbb{R}^2$  tartomány,  $P, Q : D \rightarrow \mathbb{R}$  adott függvények. Az

$$(E) \quad P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

egyenletet egzaktnek nevezzük, ha az  $f = (P, Q) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  függvénynek létezik primitív függvénye, azaz létezik  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvény, hogy

$$F' = f, \quad \text{azaz} \quad D_1F = P \quad \text{és} \quad D_2F = Q$$

teljesül.

**Megjegyzés.** (E)-t szokás az

$$(E') \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

alakban is írni.

**Tétel.** Az (E) egzakt differenciálegyenletnek az  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvény (melyre  $(x, y(x)) \in D$ , ha  $x \in I$ ) akkor és csak akkor megoldása  $I$ -n, ha  $\exists C \in \mathbb{R}$ , hogy

$$(EMo) \quad F(x, y(x)) = C \quad (x \in I),$$

ahol  $F$  az  $f = (P, Q)$  függvény primitív függvénye.

### Bizonyítás.

- a) Legyen  $y$  (EMo) alakú, akkor az összetett függvény differenciálási szabálya szerint

$$D_1F(x, y(x)) + D_2F(x, y(x))y'(x) = 0 \quad (x \in I)$$

következik, ami  $D_1F = P$  és  $D_2F = Q$ -val adja, hogy  $y$  megoldása (E)-nek.

- b) Ha  $y$  megoldása (E)-nek  $I$ -n és (E) egzakt, akkor

$$0 = D_1F(x, y(x)) + D_2F(x, y(x))y' = \frac{d}{dx}F(x, y(x)) \quad (x \in I)$$

teljesül, ami adja (EMo)-t.

### Megjegyzések.

- 1) Egy egzakt differenciálegyenlet megoldásához elegendő az  $F$  primitív függvény meghatározása.
- 2) Ha  $f = (P, Q) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  olyan, hogy  $D$  csillagszerű tartomány,  $f$  folytonosan differenciálható (azaz  $P$  és  $Q$  is), továbbá  $D_2P = D_1Q$   $D$ -n, akkor létezik  $f = (P, Q)$ -nak primitív függvénye. Ha  $(x_0, y_0)$  egy csillagközepűpont és  $g : [a, b] \rightarrow D$  olyan szakaszonként sima görbe, mely az  $(x_0, y_0)$ -t  $(x, y)$ -nal köti össze, akkor ez a primitív függvény az

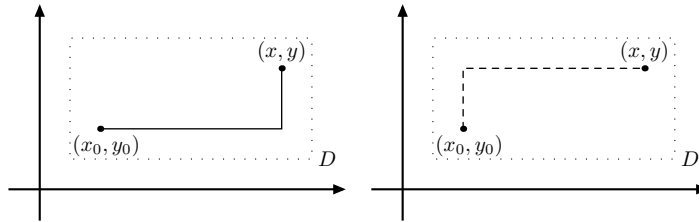
$$F(x, y) = \int_g f = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} f$$

integrálfüggvény (lásd Analízis III., III.4.2. tétel).

- 3) A 2) megjegyzés feltételein túl teljesüljön, hogy  $g(t) \doteq (x(t), y(t))$  folytonosan differenciálható ( $g(a) = (x_0, y_0)$ ,  $g(b) = (x, y)$ ), akkor a görbementi integrál kiszámítására vonatkozó ismert tétel (lásd például Analízis II.) alapján, ha  $\exists g^{-1}$ , úgy

$$F(x, y) = \int_a^{g^{-1}(x, y)} P(x(t), y(t))x'(t)dt + \int_a^{g^{-1}(x, y)} Q(x(t), y(t))y'(t)dt .$$

- 4) Ha  $D$  téglalap vagy körlap, akkor bármely rögzített  $(x_0, y_0)$ -ból bármely  $(x, y) \in D$  elérhető a tengelyekkel párhuzamos szakaszokból álló töröttvonal mentén, például:



A folytonos vonalra:

$$g(t) = g^1(t) \cup g^2(t) = (x^1(t), y^1(t)) \cup (x^2(t), y^2(t)) ,$$

ahol

$$\begin{cases} x^1(t) = t & t \in [x_0, x], \\ y^1(t) = y_0 & \\ \end{cases} \quad \begin{cases} x^2(t) = x & t \in [y_0, y], \\ y^2(t) = t & \end{cases}$$

így

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt$$

A szaggatott vonalra (hasonlóan):

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt$$

- 5)  $F(x, y)$  utóbbi két alakjában szokás az első integrálban  $t \rightarrow x$ , a másodikban  $t \rightarrow y$  használata is, ekkor

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy ,$$



illetve

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy .$$

- 6) Az (E) egzakt egyenlet  $(x_0, y_0)$ -on áthaladó megoldását  $C = 0$  mellett kapjuk.
- 7) Az  $y' = f(x)g(y)$  ( $g \neq 0$ ) szeparábilis egyenlet egzakt differenciálegyenlet.

## 6. Integráló szorzó keresése

**Definíció.** Ha  $y$  teljesíti (E)-t és  $\exists \mu : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\mu \neq 0$ ) függvény, hogy a  $(\mu P, \mu Q)$  függvénynek létezik primitív függvénye, azaz a

$$(*) \quad \mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

differenciálegyenlet egzakt, akkor  $\mu$ -t az (E) egyenlet integráló szorzójának (Euler-multiplikátorának) nevezzük.

**Megjegyzések.**

- 1) Ha létezik integráló szorzó, úgy ((E) és (\*)) ekvivalenciája miatt) (E) megoldása visszavezethető a (\*) egzakt differenciálegyenlet megoldására.
- 2) Integráló szorzót az alábbi módon kereshetünk:

$$D_2\mu P = D_1\mu Q \quad \Leftrightarrow \quad Q\mu_x - P\mu_y = (P_y - Q_x)\mu ,$$

melyből ha  $\mu = \mu(\omega(x, y))$  (pl.  $\omega(x, y) = x$  vagy  $y$  vagy  $x + y \dots$ )

$$Q \frac{d\mu}{d\omega} \omega_x - P \frac{d\mu}{d\omega} \omega_y = (P_y - Q_x)\mu ,$$

illetve

$$\frac{\mu'(\omega)}{\mu(\omega)} = \frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y}$$

következik, ami adja, hogy

$$\mu(\omega) = \exp \int \frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y}(\omega) d\omega ,$$

ha  $\frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y}$  az  $\omega$  függvénye.

## 7. A Bernoulli- és Ricatti-egyenlet

**1. tétel.** Legyenek  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  adott függvények,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\alpha \neq 1$ . Az  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $y > 0$ ) differenciálható függvény akkor és csak akkor megoldása  $[a, b]$ -n a

$$(B) \quad y'(x) + f(x)y(x) + g(x)y^\alpha(x) = 0$$

Bernoulli-féle differenciálegyenletnek, ha a

$$\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \psi(x) = y^{1-\alpha}(x)$$

függvény megoldása a

$$\psi'(x) + (1 - \alpha)f(x)\psi(x) + (1 - \alpha)g(x) = 0$$

lineáris differenciálegyenletnek  $[a, b]$ -n.

**Bizonyítás.**  $y(x) = [\psi(x)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$  és  $y'(x) = \frac{1}{1-\alpha}[\psi(x)]^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot \psi'(x)$  miatt (B) akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{1}{1-\alpha}[\psi(x)]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \psi'(x) + f(x)[\psi(x)]^{\frac{1}{1-\alpha}} + g(x)[\psi(x)]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 0 ,$$

azaz

$$\psi'(x) + (1 - \alpha)f(x)\psi(x) + (1 - \alpha)g(x) = 0$$

bármely  $x \in [a, b]$  esetén, amit bizonyítani kellett.

**2. tétel.** Legyenek  $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  adottak,  $y, y_P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálhatók és  $y_P$  egy megoldása az

$$(R) \quad y'(x) + f(x)y^2(x) + g(x)y(x) + h(x) = 0$$

Ricatti-féle differenciálegyenletnek.  $y$  akkor és csak akkor megoldása (R)-nek, ha a

$$\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x) \doteq y(x) - y_P(x)$$

függvény megoldása a

$$\psi'(x) + [2f(x)y_P(x) + g(x)]\psi(x) + f(x)\psi^2(x) = 0$$

(B) differenciálegyenletnek.

**Bizonyítás.** Egyszerű.



# III. EGZISZTENCIA-TÉTELEK CAUCHY-FELADATOKRA

## 1. Segédeszközök a funkcionálanalízisből

A lineáris tér, normált tér, metrikus tér, teljes metrikus tér fogalma már ismert az Analízis I-III.-ből.

Fontos lesz számunkra az alábbi két eredmény.

**1. tétel (Banach-féle fixponttétel).** Legyen  $(X, d)$  teljes metrikus tér,  $A : X \rightarrow X$  kontrakció, azaz olyan leképezés, hogy  $\exists \alpha \in (0, 1)$ , hogy

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y) \quad (\forall x, y \in X)$$

teljesül, akkor  $A$ -nak pontosan egy fixpontja van, azaz pontosan egy  $x \in X$  létezik, hogy  $Ax = x$ .

**Bizonyítás.** Legyen  $x_0 \in X$  tetszőleges,  $\langle x_n \rangle$  pedig

$$x_1 = Ax_0, \quad \dots, \quad x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0$$

szerint definiált sorozat  $X$ -ben.

- Először megmutatjuk, hogy  $\langle x_n \rangle$  Cauchy-sorozat:  
Legyen  $m \geq n$ , ekkor

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(A^n x_0, A^m x_0) \leq \alpha d(A^{n-1} x_0, A^{m-1} x_0) \leq \\ &\dots \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \leq \\ &\leq \alpha^n \{d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \leq \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) \{1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-n-1}\} \leq \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \\ &= \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1), \end{aligned}$$

ami  $\alpha^n \rightarrow 0$  miatt adja, hogy  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

–  $(X, d)$  teljessége miatt  $\langle x_n \rangle$  konvergencia, azaz  $\exists x \in X$ , hogy  

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

– Megmutatjuk, hogy  $x$  fixpontja  $A$ -nak. Egy kontrakció nyilván folytonos ( $d(Ax, Ax_0) \leq \alpha d(x, x_0)$  miatt), így

$$Ax = A\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x,$$

tehát  $x$  fixpontja  $A$ -nak.

– A fixpont egyértelműen meghatározott, mert ha  $Ax = x$  és  $Ay = y$  is teljesül, úgy

$$d(x, y) = d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y),$$

ami  $\alpha < 1$  miatt csak úgy lehetséges, ha  $d(x, y) = 0$ , azaz  $x = y$ .

**2. tétel.** Egy teljes metrikus tér bármely zárt altere is teljes metrikus tér.

Teljes metrikus térre fontos példa a  $C_k[a, b]$  tér:

- ennek alaphalmaza:  $C_k[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k \mid f \text{ folytonos}\}$ ;
- $C_k[a, b]$  lineáris tér a függvényekre értelmezett összeadásra és skálárral való szorzásra nézve;
- $C_k[a, b]$  normált tér az  $\|f\|_0 \doteq \sup_{x \in [a, b]} \{\|f(x)\|_{\mathbb{R}^k}\}$  szerint definiált normával (ami igen egyszerűen bizonyítható);
- $C_k[a, b]$  metrikus tér a  $d(f, g) \doteq \|f - g\|_0$  szerint definiált (a  $\|\cdot\|_0$  normából származtatott) metrikával.
- $C_k[a, b]$  ezen metrikával teljes metrikus tér.  
 Legyen  $\langle f_n \rangle$  ( $f_n \in C_k[a, b]$ ) Cauchy-sorozat, akkor  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_0 < \varepsilon$ , ami adja, hogy

$$(*) \quad \|f_n(x) - f_m(x)\|_{\mathbb{R}^k} \leq \|f_n - f_m\|_0 < \varepsilon \quad (\forall x \in [a, b]),$$

azaz az  $\langle f_n \rangle$  függvénysorozat egyenletesen konvergens  $[a, b]$ -n (a függvénysorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritérium

miatt), tehát  $\exists f \in C_k[a, b]$ , hogy  $f_n \rightarrow f$  egyenletesen. Ugyanakkor (mert folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatának határfüggvénye) az  $f$  folytonos. Ekkor (\*)-ból  $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$  és  $x \in [a, b]$  esetén

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^k} \leq \varepsilon,$$

illetve ebből

$$\|f_n - f\|_0 \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

következik, tehát  $\langle f_n \rangle$  konvergál az  $f \in C_k[a, b]$  elemhez a  $C_k[a, b]$  metrikus térben, ami adja az állítást.

**Megjegyzés.** Ha  $k = 1$ , úgy  $C_1[a, b]$ -t egyszerűen  $C[a, b]$ -vel jelöljük és az  $[a, b]$  feletti folytonos, valós értékű függvények terének nevezzük.

**Definíció.** Legyen  $G_1 \subset \mathbb{R}^m$ ,  $I = [a, b]$ ,  $G = I \times G_1$ ,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $f$  Lipschitz-feltételt teljesít  $G$ -n (az utolsó  $m$  változójában), ha  $\exists L > 0$ , hogy  $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in G$ -re

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\|_{\mathbb{R}^n} \leq L\|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^m}.$$

## 2. Egzisztencia és unicitás tétel DER-KÉP-re

Igen fontos a DER-KÉP probléma következő átfogalmazása (visszavezetése integrálegyenlet-rendszerre):

**Lemma.** Az  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenciálható függvény akkor, és csak akkor megoldása az

$$\text{(DER-KÉP)} \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

problémának, ha folytonos megoldása az

$$\text{(IER)} \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

integrálegyenlet-rendszernek. (Itt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos függvény.)

**Bizonyítás.**

a) Ha  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  megoldása (DER-KÉP)-nek, akkor

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (x \in I).$$

$f$  és  $y$  folytonossága adja, hogy  $f(x, y(x))$  folytonos  $I$ -n, így létezik az

$$\int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

integrál és

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (x \in I),$$

ahol  $y(x_0) = y_0$ , azaz teljesül (IER).

b) Ha  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos megoldása (IER)-nek  $I$ -n, akkor  $f(x, y(x))$  folytonossága miatt

$$\int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

differenciálható és deriváltja  $f(x, y(x))$ , másrészt (IER) adja, hogy  $y$  differenciálható és  $y'(x) = f(x, y(x))$  ( $x \in I$ ), továbbá (IER) szerint  $y(x_0) = y_0$  is igaz, ebből pedig következik, hogy  $y$  megoldása (DER-KÉP)-nek.

**Megjegyzés.** A lemma miatt (DER-KÉP) megoldhatósága és a megoldás egyértelműsége (egzisztencia és unicitás) egyet jelent (IER) megoldhatóságával és a megoldás egyértelműségével.

**Tétel (Picard-Lindelöf egzisztencia és unicitás tétel).**

Legyen  $G_1 \subset \mathbb{R}^m$  nyílt halmaz,  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $D = I \times G_1$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos függvény, hogy létezik  $L > 0$ , hogy

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\|_{\mathbb{R}^n} < L \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^m} \quad (\forall (x, y_1), (x, y_2) \in D),$$



azaz Lipschitz-tulajdonságú  $D$ -n. Legyen továbbá  $x_0 \in I$  és  $y_0 \in G_1$  rögzített. Akkor  $\exists \alpha > 0$ , hogy az

$$(DER-KÉP) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Cauchy-feladatnak az  $I_1 = I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  intervallumon létezik megoldása és az egyértelmű.

**Bizonyítás.** A lemma szerint elegendő az (IER) integrálegyenlet-rendszer folytonos megoldásainak létezését és annak egyértelműségét bizonyítani.

a) A létezés bizonyítása:

- $G_1$  nyílt, így  $\exists r > 0$ , hogy  $T = \{y \mid \|y - y_0\| \leq r\} \subset G_1$ , és így az  $I \times T \subset D$  teljesül és  $I \times T$  zárt. Ekkor  $f$  folytonossága miatt  $\exists K > 0$ , hogy  $\|f\| < K$   $I \times T$ -n.
- Legyen  $\alpha = \min \left\{ \frac{r}{K}, \frac{1}{L+1} \right\}$ ,  $I_1 = I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ .
- Tekintsük az

$$X = C_n^* = \{\varphi \mid \varphi : I_1 \rightarrow T, \varphi \text{ folytonos}\}$$

halmazt a

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{x \in I_1} \{\|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\|\}$$

metrikával.  $(X, d)$  zárt altere a korábbiakban tekintett,  $C_n(I_1)$  teljes metrikus térnek, így teljes metrikus tér.

- Értelmezzük  $(X, d)$ -n az  $A$  leképezést

$$(A\varphi)(x) \doteq y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \quad (x \in I_1)$$

szerint.  $A : X \rightarrow X$  típusú, mert  $\psi \doteq A\varphi$  folytonos  $I_1$ -en (az integrálfüggvény ismert tulajdonsága miatt), továbbá

$$\begin{aligned} \|\psi(x) - y_0\| &= \left\| \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \right\| \leq \int_{x_0}^x \|f(t, \varphi(t))\| dt \leq \\ &\leq K \|x - x_0\| \leq K\alpha \leq r \end{aligned}$$

miatt  $\psi(I_1) \subset T$  is igaz, így  $\psi = A\varphi \in X$ .

–  $A$  kontrakció, mert ha  $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ , úgy

$$\begin{aligned} \|(A\varphi_1)(x) - (A\varphi_2)(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x [f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))] dt \right\| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x \|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))\| dt \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x L d(\varphi_1, \varphi_2) dt \leq \\ &\leq L \|x - x_0\| d(\varphi_1, \varphi_2) \leq \\ &\leq L \alpha d(\varphi_1, \varphi_2) \leq \frac{L}{L+1} d(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned}$$

(hiszen  $L/(L+1) \in (0, 1)$ ).

– Az 1. tétel (Banach-féle fixponttétel) miatt  $A$ -nak létezik fixpontja, azaz  $\exists y \in X$  folytonos függvény, hogy  $(Ay)(x) = y(x)$  ( $\forall x \in I_1$ ), vagyis

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (x \in I_1)$$

teljesül, tehát létezik megoldása (IER)-nek, és így (DER-KÉP)-nek  $I_1$ -en.

b) A megoldás egyértelműségének bizonyítása:

A Banach-féle fixponttétel miatt a megoldás egyértelmű is az  $I_1$ -en differenciálható függvények körében  $I_1$ -en.

### Megjegyzések.

1) A tétel feltételei mellett a (DER-KÉP) megoldását (az  $A$  leképezés fixpontját) az

$$y_0(x) \doteq y_0, \quad y_k(x) \doteq y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{k-1}(t)) dt \quad (k = 1, 2, \dots; x \in I_1)$$

szerint definiált  $\langle y_k \rangle$  függvénysorozat határfüggvénye adja.

Az eljárást Picard-féle szukcesszív approximációnak nevezzük.

2)  $n = 1$  mellett az elsőrendű explicit differenciálegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatra vonatkozó Picard-féle egzisztencia és unicitás tételt kapjuk.

3) Egy példa: A

$$(KÉP) \quad y' = xy, \quad y(0) = 1$$

Cauchy-feladatnak megfelelő integrálegyenlet:

$$(IE) \quad y(x) = 1 + \int_0^x ty(t) dt$$

Ekkor

$$y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = 1 + \int_0^x t dt = 1 + \frac{x^2}{2}, \dots$$

$$y_k(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k, \dots,$$

és  $y_k(x) \rightarrow \exp(x^2/2)$  egyenletesen, így (KÉP) megoldása:

$$y(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

### 3. (L-DER-KÉP) megoldhatósága

Legyenek  $g_{ij}, \varphi_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) adott folytonos függvények, akkor

$$y'_i = \sum_{j=1}^n g_{ij}(x)y_j + \varphi_i(x), \quad y_i(x_0) = y_{0i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

egy lineáris differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó Cauchy-feladat, mely az

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \quad \underline{g} = (g_{ij})_{n \times n}$$

jelöléssel az

$$(L\text{-DER-KÉP}) \quad y' = \underline{g}(x)y + \varphi(x), \quad y(x_0) = y_0$$

alakba is írható.  
Ez ekvivalens az

$$(L\text{-IER}) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x [\underline{g}(t)y(t) + \varphi(t)] dt$$

integrálegyenlet-rendszerrel.

Legyen  $D = I \times \mathbb{R}^n$ , akkor az

$$f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(x, y) \doteq \underline{g}(x)y + \varphi(x)$$

folytonos függvényre  $\forall (x, y^1), (x, y^2) \in D$  esetén

$$\begin{aligned} \|f(x, y^1) - f(x, y^2)\| &= \|\underline{g}(x)(y^1 - y^2)\| = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n g_{ij}(x)(y_j^1 - y_j^2) \right]^2} \leq nK \|y^1 - y^2\| = L \|y^1 - y^2\| \end{aligned}$$

teljesül, azaz Lipschitz-tulajdonságú, így az (L-DER-KÉP) megoldható és a megoldás egyértelmű  $I_1 \subset I$ -n.

## 4. ( $n$ -KÉP) megoldhatósága

**Tétel (egzisztencia és unicitás tétel ( $n$ -KÉP)-re).**

Legyen  $G_1 \subset \mathbb{R}^n$  nyílt halmaz,  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $D = I \times G_1$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos függvény, hogy  $\exists L > 0$ , hogy

$$|f(x, y^1) - f(x, y^2)| < L \|y^1 - y^2\| \quad (\forall (x, y^1), (x, y^2) \in D),$$

azaz Lipschitz-tulajdonságú  $D$ -n. Legyen továbbá  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in G_1$  rögzített.

Akkor  $\exists \alpha > 0$ , hogy az

$$(n\text{-KÉP}) \quad y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}), \quad y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1}$$

( $i = 0, \dots, n-1$ ) Cauchy-feladatnak az  $I_1 = I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  intervallumon létezik megoldása és az egyértelmű.

**Bizonyítás.** Az átviteli elv szerint ( $n$ -KÉP) ekvivalens az

$$(\Delta) \quad \begin{cases} y'_1 = y_2 \\ \vdots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad y_i(x_0) = y_{0i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Cauchy-feladattal, azaz  $y : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  akkor, és csak akkor megoldása ( $n$ -KÉP)-nek, ha  $(y, y', \dots, y^{(n-1)}) : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  megoldása a  $(\Delta)$  (DER-KÉP)-nek, ahol

$$\underline{f} = (f_1, \dots, f_n), \quad f_k(x, y) = y_{k+1}, \quad (k = 1, \dots, n-1), \quad f_n = f.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy teljesülnek a Picard-Lindelöf-tétel feltételei, így a kapott (DER-KÉP)-nek (és így ( $n$ -KÉP)-nek) létezik megoldása és egyértelmű.

**Következmény (L- $n$ -KÉP megoldhatósága).** Legyenek

$a_1, \dots, a_n, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények,  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  rögzített. Akkor az

$$(L-n\text{-KÉP}) \quad \begin{cases} y^{(n)} = a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y + b(x) \\ y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \quad (i = 0, \dots, n) \end{cases}$$

Cauchy-feladatnak egy és csak egy megoldása van  $I$ -n.

**Bizonyítás.** Most az (L- $n$ -KÉP)-nek megfelelő (DER-KÉP)

$$y'(x) = \underline{\underline{A}}(x)y(x) + B(x), \quad y(x_0) = y_0$$

alakú, ahol

$$\underline{\underline{A}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & & & \dots & 1 \\ a_n(x) & & & \dots & a_1(x) \end{pmatrix} \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

és ekkor alkalmazható tételünk.

## 5. Egzisztenciátétel DER-KÉP-re

**Tétel (Cauchy-Peano egzisztencia tétel).** Legyen  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  tartomány  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos függvény,  $(x_0, y_0) \in D$ . Akkor az

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Cauchy-feladatnak létezik megoldása.

(De nem feltétlenül egyértelmű, lásd például az  $y' = \sqrt{|y|}$  differenciálegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatot.)

**Bizonyítás.** Nem kell.

## IV. MAGASABBRENDŰ LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

### 1. Az $n$ -edrendű lineáris homogén differenciálegyenletek általános elmélete

**1. definíció.** Legyenek  $a_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) folytonos függvények. A

$$(H_n D) \quad y^{(n)} + \sum_{i=1}^n a_i(x)y^{(n-i)} = 0$$

egyenletet  $n$ -edrendű lineáris homogén differenciálegyenletnek nevezzük.

Egyszerű számolással bizonyítható a következő tétel:

**1. tétel.** Ha az  $y_1, \dots, y_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvények megoldásai  $(H_n D)$ -nek  $I$ -n, akkor  $\forall c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  esetén az

$$y = \sum_{i=1}^k c_i y_i$$

függvény is megoldás  $I$ -n.

**2. definíció (lineáris függőség és függetlenség).**

Az  $y_1, \dots, y_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvények lineárisan függőek  $I$ -n, ha létezik

$c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  ( $\sum_{i=1}^k c_i^2 > 0$ ) konstansrendszer, hogy

$$(*) \quad \sum_{i=1}^k c_i y_i(x) = 0 \quad (\forall x \in I).$$

$y_1, \dots, y_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  lineárisan függetlenek, ha  $(*)$  csak úgy teljesül, ha  $c_i = 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ).

**3. definíció.** Az  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n - 1$ -szer differenciálható függvények Wronski-determinánsa:

$$W = W(y_1, \dots, y_n) \doteq \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

**2. tétel (Liouville-formula).** Ha az  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvények megoldásai (H<sub>n</sub>D)-nek  $I$ -n és  $x_0 \in I$  adott, akkor

$$W(x) = W(y_1(x), \dots, y_n(x)) = W(x_0) \exp \left[ - \int_{x_0}^x a_1(t) dt \right].$$

**Bizonyítás.** Könnyen belátható, hogy

$$\begin{aligned} W'(x) &= \begin{vmatrix} y_1' & \dots & y_n' \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \dots + \\ &+ \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ - \sum_{i=1}^n a_i(x) y_1^{(n-i)} & \dots & - \sum_{i=1}^n a_i(x) y_n^{(n-i)} \end{vmatrix} = \\ &= - \sum_{i=1}^n a_i(x) \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-i)} & \dots & y_n^{(n-i)} \end{vmatrix} = -a_1(x)W(x) \quad (x \in I). \end{aligned}$$



Így  $W$  az

$$y'(x) = -a_1(x)y(x), \quad y(x_0) = W(x_0)$$

(1-KÉP) probléma egyértelműen létező

$$W(x) = W(x_0) \exp \left[ - \int_{x_0}^x a_1(t) dt \right]$$

megoldása, és ezt kellett bizonyítani.

**1. következmény.** (H<sub>n</sub>D) egy  $y_1, \dots, y_n$  megoldásrendszerének Wronski-determinánsa vagy  $\equiv 0$ , vagy sehol sem 0.

**4. definíció (alaprendszer).** Az  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvények (H<sub>n</sub>D) alaprendszerét alkotják, ha megoldásai annak és lineárisan függetlenek.

**3. tétel.**  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  akkor, és csak akkor alaprendszere (H<sub>n</sub>D)-nek, ha  $\forall y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) megoldás  $I$ -n, és  $W(x) \neq 0$ .

**Bizonyítás.**

a) Ha  $W(x) \neq 0$  ( $x \in I$ ) és  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  olyan, hogy

$$\sum_{i=1}^n c_i y_i(x) = 0 \quad (\forall x \in I),$$

akkor

$$(\square) \quad \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(j)}(x) = 0 \quad (\forall x \in I, j = 0, \dots, n-1)$$

teljesül, ami egy lineáris egyenletrendszer  $c_1, \dots, c_n$ -re, melynek determinánsa éppen  $W(x) \neq 0$  ( $x \in I$ )  $\Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0 \Rightarrow$  az  $y_1, \dots, y_n$  megoldások lineárisan függetlenek  $\Rightarrow y_1, \dots, y_n$  alaprendszer.

b) Ha  $y_1, \dots, y_n$  alaprendszere (H<sub>n</sub>D)-nek és létezne  $x_0 \in I$ , hogy

$W(x_0) = 0$ , akkor léteznének  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  ( $\sum_{i=1}^n c_i^2 > 0$ ) konstansok,

hogy

$$\sum_{i=1}^n c_i y_i^{(j)}(x_0) = 0 \quad (j = 1, \dots, n-1)$$

egyenletrendszer megoldásai.

Legyen  $y$  ( $H_nD$ ) olyan megoldása  $I$ -n, melyre

$$y^{(j)}(x_0) = \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(j)}(x_0) = 0 \quad (j = 0, \dots, n-1).$$

Az így kapott ( $n$ -KÉP)-nek csak egy megoldása van. De  $y \equiv 0$  és

$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$  is megoldás, így

$$\sum_{i=1}^n c_i y_i(x) = 0 \quad (\forall x \in I),$$

azaz  $y_1, \dots, y_n$ -ek lineárisan függőek, ami ellentmondás.

Így  $W(x) \neq 0 \forall x \in I$ .

**4. tétel ( $H_nD$  általános megoldása).** Legyen  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $H_nD$ ) alaprendszere  $I$ -n, akkor ( $H_nD$ )  $\forall y : I \rightarrow \mathbb{R}$  megoldása

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x) \quad (x \in I)$$

alakú, ahol  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  konstansok.

#### **Bizonyítás.**

Ha  $y_1, \dots, y_n$  ( $H_nD$ ) alaprendszere, akkor  $W(x_0) \neq 0 \forall x_0 \in I$ . Ha  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  egy tetszőleges megoldása ( $H_nD$ )-nek, akkor legyen  $c_1, \dots, c_n$  a

$$(\circ) \quad \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(j)}(x_0) = y^{(j)}(x_0) \quad (j = 0, \dots, n-1)$$

egyenletrendszer ( $W(x_0) \neq 0$  miatt létező) megoldása.

Ekkor a

$$\psi(x) \doteq \sum_{i=1}^n c_i y_i(x) \quad (x \in I)$$

szerint definiált függvény olyan megoldása ( $H_nD$ )-nek  $I$ -n, melyre teljesülnek a

$$\psi^{(j)}(x_0) = y^{(j)}(x_0) \quad (j = 0, \dots, n-1)$$

kezdeti feltételek (o) miatt.

Így  $\psi$  és  $y$  ugyanazon  $(H_n D)$ -re vonatkozó ( $n$ -KÉP) megoldásai, ezért megegyeznek, azaz

$$y(x) = \psi(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x) \quad (x \in I),$$

amit bizonyítani kellett.

### Megjegyzések.

- 1) Az általános megoldáshoz így elég az alaprendszert meghatározni.
- 2) Belátható (lásd Kósa 90. oldal), hogy alaprendszer mindig létezik.
- 3) Az alaprendszer meghatározására nincs általános módszer.

Fontos viszont az alábbi, D'Alembert-től származó fokszámcsökkentő eljárás:

**5. tétel.** Ha ismert  $(H_n D)$   $m$  számú lineárisan független  $y_1, \dots, y_m : I \rightarrow \mathbb{R}$  megoldása  $I$ -n, akkor  $(H_n D)$  megoldásainak meghatározása visszavezethető egy  $(n - m)$ -edrendű lineáris homogén differenciálegyenlet megoldására.

### Bizonyítás.

– Legyenek  $y_1, \dots, y_m (\neq 0)$  lineárisan független megoldásai  $(H_n D)$ -nek, míg  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  egy tetszőleges megoldás, akkor legyen

$$(\Delta) \quad u \doteq \left( \frac{y}{y_1} \right)',$$

azaz

$$y(x) = y_1(x) \int u(x) dx .$$

Innen

$$y' = y_1' \int u(x) dx + y_1 u, \quad \dots, \quad y^{(n)} = y_1^{(n)} \int u(x) dx + \dots + y_1 u^{(n-1)}$$

következik.  $y, y', \dots, y^{(n)}$  kapott értékeit  $(H_n D)$ -be helyettesítve:

$$\left[ y_1^{(n)} + \sum_{i=1}^n a_i(x) y_1^{(n-i)} \right] \int u dx + y_1 u^{(n-1)} + \dots + A(x) u = 0$$

adódik, melyből – felhasználva, hogy  $y_1 \neq 0$  megoldása  $(H_n D)$ -nek – kapjuk, hogy  $u$  teljesíti a

$$(H_{(n-1)} D) \quad u^{(n-1)} + Q_1(x)u^{(n-2)} + \cdots + Q_{n-1}(x)u = 0$$

$(n-1)$ -edrendű differenciálegyenletet és viszont: ha  $u$  teljesíti  $(H_{(n-1)} D)$ -t, akkor a  $(\Delta)$ -ben definiált  $y$  teljesíti  $(H_n D)$ -t.

– Válasszuk most  $(\Delta)$ -ben  $y$ -nak rendre az  $y_2, \dots, y_m$  függvényeket, akkor a

$$(\Delta') \quad u_k \doteq \left( \frac{y_k}{y_1} \right)' \quad (k = 2, \dots, m)$$

függvények megoldásai  $(H_{(n-1)} D)$ -nek, továbbá lineárisan függetlenek, mert ellenkező esetben  $\exists \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$  ( $\sum \alpha_i^2 > 0$ ), hogy

$$\sum_{i=2}^m \alpha_i u_i(x) = 0 \quad (x \in I),$$

ami adja, hogy

$$\sum_{i=2}^m \alpha_i \int u_i + \alpha_1 = 0 \quad (x \in I).$$

Ebből, a  $(\Delta')$ -ből adódó

$$\frac{y_k}{y_1} = \int u_k(x) dx$$

egyenlőség miatt

$$\sum_{i=2}^m \alpha_i \frac{y_i}{y_1} + \alpha_1 = 0 \quad (x \in I),$$

illetve

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i(x) = 0 \quad (x \in I)$$

következne, ellentétben azzal, hogy  $y_1, \dots, y_m$  lineárisan függetlenek.

– Így  $(H_{(n-1)}D)$ -nek ismert  $m - 1$  lineárisan független megoldása, ezek  $u_2, \dots, u_m$ . Ebből az előbbi eljárással meghatározható  $(H_{(n-2)}D)$   $m - 2$  számú lineárisan független megoldása. Az eljárást folytatva egy  $(H_{(n-m)}D)$   $n - m$ -edrendű differenciálegyenlethez jutunk.

Ha  $(H_{(n-m)}D)$  megoldásait meghatározzuk, akkor azokból  $(H_{(n-m+1)}D)$ ,  $\dots, (H_{(n-1)}D)$  és így  $(H_nD)$  megoldásai is adottak lesznek ( $\Delta$ ) szerint.

**2. következmény.** Legyen  $y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $y_1 \neq 0$ ) megoldása az

$$(H_2D) \quad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

differenciálegyenletnek. Az  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény akkor, és csak akkor megoldása  $(H_2D)$ -nek, ha az

$$u : I \rightarrow \mathbb{R} \quad u \doteq \left( \frac{y}{y_1} \right)'$$

függvény megoldása az

$$(H_1D) \quad u' + \left( a_1(x) + 2 \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} \right) u = 0$$

differenciálegyenletnek. Így  $(H_2D)$  általános megoldása

$$\begin{aligned} y &= cy_1 \int \exp \left[ - \int \left( a_1(x) + 2 \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} \right) dx \right] dx = \\ &= cy_1 \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp \left[ - \int a_1(x) dx \right] dx . \end{aligned}$$

**Bizonyítás.** Az előbbi eljárás azonnal adja  $(H_1D)$ -t, ami egy szeparábilis differenciálegyenlet, az

$$\begin{aligned} u &= c \int \exp \left[ - \int (a_1(x) + 2) dx \right] dx = \\ &= cy_1 \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp \left[ - \int a_1(x) dx \right] dx . \end{aligned}$$

megoldással, ami  $y = y_1 \int u dx$  szerint adja az állítást.

## 2. Konstansegütthetős lineáris homogén differenciálegyenletek

**Definíció.** Ha  $(H_n D)$ -ben

$$a_i(x) = a_i \in \mathbb{R} \quad (x \in I),$$

akkor a kapott

$$(KH_n D) \quad y^{(n)} + \sum_{i=1}^n a_i y^{(n-i)} = 0$$

egyenletet  $n$ -edrendű konstansegütthetős lineáris homogén differenciálegyenletnek nevezzük.

$(KH_n D)$  karakterisztikus polinomja:

$$(KP) \quad P(\lambda) \doteq \lambda^n + \sum_{i=1}^n a_i \lambda^{n-i},$$

míg karakterisztikus egyenlete:

$$(KE) \quad \lambda^n + \sum_{i=1}^n a_i \lambda^{n-i} = 0.$$

**Tétel.** Ha  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$   $p_1, \dots, p_k$  ( $\in \mathbb{N}$ )-szeres (különböző) gyökei  $(KH_n D)$  karakterisztikus egyenletének, hogy  $p_1 + \dots + p_n = n$ , akkor

$$(AR) \quad \begin{cases} e^{\lambda_1 x}, & x e^{\lambda_1 x}, & \dots, & x^{p_1-1} e^{\lambda_1 x} \\ \vdots & & & \\ e^{\lambda_k x}, & x e^{\lambda_k x}, & \dots, & x^{p_k-1} e^{\lambda_k x} \end{cases}$$

alapszere  $(KH_n D)$ -nek, ha  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  valósak.

Ha például  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  konjugált komplex gyökei  $(KE)$ -nek, hogy  $p_1 = p_2 = p$ -szeresek, akkor  $(AR)$  első két sora helyett

$$\begin{aligned} & e^{\alpha x} \cos \beta x, & x e^{\alpha x} \cos \beta x, & \dots, & x^{p-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \\ & e^{\alpha x} \sin \beta x, & x e^{\alpha x} \sin \beta x, & \dots, & x^{p-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned}$$

szerepel. (Hasonló a helyzet a további komplex gyökök esetén is.)

**Bizonyítás.** (Csak a valós esetre)

- a) (AR) elemei megoldásai (KH<sub>n</sub>D)-nek:  
 –  $e^{\lambda_i x}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) esetén egyszerű helyettesítéssel győződhetünk meg erről.  
 –  $x e^{\lambda_i x}, \dots, x^{p_i-1} e^{\lambda_i x}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) esetén fel kell használni azt is, hogy ha  $\lambda_i$   $p_i$ -szeres gyöke (KE)-nek, akkor

$$P(\lambda_i) = P'(\lambda_i) = \dots = P^{(p_i-1)}(\lambda_i) = 0$$

teljesül.

- b) (AR) függvényei lineárisan függetlenek:

Tegyük fel, hogy lineárisan függőek. Ekkor léteznek  $c_i$  ( $\sum_{i=1}^n c_i^2 > 0$ ) konstansok, melyekkel képezve (AR) függvényeinek lineáris kombinációját, az azonosan 0-nak adódik, ami adja, hogy

$$(1) \quad e^{\lambda_1 x} P_{n_1}(x) + \dots + e^{\lambda_m x} P_{n_m}(x) \equiv 0,$$

ahol  $m \leq k$ ,  $P_{n_k}$  fokszáma  $\leq n_k$  és létezik  $P_{n_k}$ , hogy abban létezik 0-tól különböző együttható. Legyen ez  $P_{n_1} = P_l$   $l$ -edfokú. Szorozzuk meg (1)-et  $e^{-\lambda_m x}$ -szel, akkor

$$P_l(x) e^{(\lambda_1 - \lambda_m)x} + \dots + P_{n_{m-1}}(x) e^{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)x} + P_{n_m}(x) \equiv 0$$

következik, ahol  $\lambda_i - \lambda_m \neq 0$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ). Az utóbbi egyenletet  $n_m + 1$ -szer differenciálva kapjuk, hogy

$$P_l^1(x) e^{(\lambda_1 - \lambda_m)x} + \dots + P_{n_{m-1}}^1(x) e^{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)x} \equiv 0,$$

ahol  $P_l^1(x)$  is  $l$ -edfokú, azaz  $x^l$  együtthatója nem 0. Ebből  $e^{\lambda_m x}$ -szel való szorzás után

$$(2) \quad P_l^1(x) e^{\lambda_1 x} + \dots + P_{n_{m-1}}^1(x) e^{\lambda_{m-1} x} \equiv 0$$

adódik.

Az eljárást  $m - 1$ -szer ismételve ( (2)-vel kezdve) kapjuk, hogy

$$P_l^{m-1}(x) e^{\lambda_1 x} \equiv 0,$$

ahol  $P_l^{m-1}$  is  $l$ -edfokú, ami viszont azt jelentené, hogy egy  $l$ -edfokú polinom azonosan nulla, ami lehetetlen.

Így (AR) függvényei lineárisan függetlenek.

**Következmény.** Az

$$(KH_2D) \quad y'' + a_1y' + a_2y = 0$$

karakterisztikus egyenlete a másodfokú

$$(KE_2) \quad \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

egyenlet, így ha ennek gyökei:

a)  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , akkor  $(KH_2D)$  általános megoldása

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x};$$

b)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \in \mathbb{R}$ , akkor  $(KH_2D)$  általános megoldása

$$y = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2 x e^{\lambda_0 x};$$

c)  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ), akkor  $(KH_2D)$  általános megoldása

$$y = [c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x] e^{\alpha x}.$$

### 3. $n$ -edrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek

**Definíció.** Legyenek  $a_i, b : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) adott folytonos függvények, akkor az

$$(IH_nD) \quad y^{(n)} + \sum_{i=1}^n a_i(x)y^{(n-i)} = b(x)$$

differenciálegyenletet  $n$ -edrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletnek nevezzük.

**1. tétel.** Legyen  $y_p$  partikuláris megoldása  $(IH_nD)$ -nek. Az  $y$  akkor, és csak akkor megoldása  $(IH_nD)$ -nek, ha az

$$y_H : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_H(x) = y(x) - y_p(x)$$

szerint definiált függvény megoldása az  $(IH_nD)$ -ből képzett  $(H_nD)$ -nek.



### Bizonyítás.

- a) Ha  $y$  és  $y_p$  megoldásai  $(\text{IH}_n\text{D})$ -nek, akkor az  $y$ -ra és  $y_p$ -re felírt  $(\text{IH}_n\text{D})$ -t kivonva egymásból

$$(y - y_p)^{(n)} + \sum_{i=1}^n a_i(x)(y - y_p)^{(n-i)} = 0$$

adódik, azaz  $y - y_p \doteq y_H$  valóban megoldása  $(\text{H}_n\text{D})$ -nek.

- b) Ha  $y_p$  megoldása  $(\text{IH}_n\text{D})$ -nek és  $y_H$  megoldása  $(\text{H}_n\text{D})$ -nek, akkor a két egyenlet összeadása adja, hogy  $y \doteq y_H + y_p$  is megoldása  $(\text{IH}_n\text{D})$ -nek.

**Következmény.** Ha  $y_p$   $(\text{IH}_n\text{D})$  egy partikuláris megoldása,  $y_1, \dots, y_n$  pedig  $(\text{H}_n\text{D})$  alaprendszere, akkor  $(\text{IH}_n\text{D})$  általános megoldása

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i + y_p.$$

Hogyan határozható meg  $y_p$ ?

**2. tétel (a konstansvariálás módszere  $(\text{IH}_n\text{D})$ -re).** Ha  $y_1, \dots, y_n$  az  $(\text{IH}_n\text{D})$ -ből képzett  $(\text{H}_n\text{D})$  alaprendszere és a  $c_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) függvények kielégítik a

$$(C) \quad \sum_{i=1}^n c'_i(x) y_i^{(j)}(x) = 0 \quad (j = 0, \dots, n-2), \quad \sum_{i=1}^n c'_i(x) y_i^{(n-1)}(x) = b(x)$$

egyenletrendszert  $I$ -n, akkor

$$(P) \quad y_p : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_p(x) \doteq \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i(x)$$

megoldása  $(\text{IH}_n\text{D})$ -nek.

**Bizonyítás.** (P)-ből (C) felhasználásával:

$$\begin{aligned}
 y_p'(x) &= \sum_{i=1}^n c_i'(x)y_i(x) + \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i'(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i'(x) \\
 &\vdots \\
 y_p^{(n-1)}(x) &= \sum_{i=1}^n c_i'(x)y_i^{(n-2)}(x) + \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i^{(n-1)}(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i^{(n-1)}(x) \\
 y_p^{(n)}(x) &= \sum_{i=1}^n c_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i^{(n)}(x) = \\
 &= \sum_{i=1}^n c_i(x) \left[ - \sum_{j=1}^n a_j(x)y_i^{(n-j)}(x) \right] + b(x) = \\
 &= - \sum_{j=1}^n a_j(x) \left[ \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i^{(n-j)}(x) \right] + b(x) = \\
 &= - \sum_{j=1}^n a_j(x)y_p^{(n-j)}(x) + b(x),
 \end{aligned}$$

azaz  $y_p$  teljesíti (IH<sub>n</sub>D)-t, amit bizonyítani kellett.

**Megjegyzések.**

- 1) (C)  $c_1', \dots, c_n'$ -re egy inhomogén lineáris egyenletrendszer, melynek determinánása a Wronszki-determináns, melyre  $W(x) \neq 0$  ( $I$ -n). Így léteznek  $\phi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) függvények, hogy

$$c_i'(x) = \phi_i(x) \quad (x \in I, i = 1, \dots, n),$$

amiből

$$c_i(x) = \int \phi_i(x) dx \quad (i = 1, \dots, n)$$

adja a  $c_i$  függvényeket.

- 2) (IH<sub>2</sub>D) esetén

$$(IH_2D) \quad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x),$$

és ha  $y_1, y_2$  alaprendszer, akkor (C)

$$(C') \quad \begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = b(x) \end{cases}$$

alakú. Ebből pedig

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ b(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(y_1(x), y_2(x))} = -\frac{b(x)y_2(x)}{W(y_1(x), y_2(x))};$$

$$c_2'(x) = \frac{b(x)y_1(x)}{W(y_1(x), y_2(x))},$$

illetve

$$c_1(x) = \int -\frac{b(x)y_2(x)}{W(y_1(x), y_2(x))} dx; \quad c_2(x) = \int \frac{b(x)y_1(x)}{W(y_1(x), y_2(x))} dx$$

következik. Továbbá ezen  $c_1$  és  $c_2$  függvényekkel a partikuláris megoldás

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \quad (x \in I).$$

## 4. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

**1. definíció.** Legyenek  $g_{ij}, \varphi_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) folytonos függvények. A

$$(LIHDER) \quad y_i' + \sum_{j=1}^n g_{ij}(x)y_j = \varphi_i(x) \quad (i = 1, \dots, n),$$

illetve az  $(y_1, \dots, y_n)^\top \doteq \underline{y}$ ,  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)^\top \doteq \underline{\varphi}$ ,  $(g_{ij})_{n \times n} \doteq \underline{g}$  jelölésekkel a

$$(LIHDER') \quad \underline{y}' + \underline{g}(x)\underline{y} = \underline{\varphi}$$

egyenletrendszert lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszernek, míg az

$$(LHDER) \quad \underline{y}' + \underline{g}(x)\underline{y} = 0$$

egyenletrendszert lineáris homogén differenciálegyenlet-rendszernek nevezük.

### Megjegyzések.

- 1) (LIHDER), illetve (LHDER) megoldásainak meghatározása visszavezethető az  $n$ -edrendű lineáris differenciálegyenletek elméletére.
- 2) Ugyanakkor önálló elmélet is kidolgozható, mely szoros analógiát mutat az  $n$ -edrendű lineáris differenciálegyenletek elméletével. A következőkben kimondott tételek bizonyítása is hasonló, természetesen bizonyos módosításokkal (például más egzisztencia és unicitás tételt kell használni, módosul a Wronski-determináns fogalma is).

**1. tétel.** Ha  $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_k$  megoldásai (LHDER)-nek, akkor

$$\underline{y} = c_1 \underline{y}_1 + \dots + c_k \underline{y}_k \quad (c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R})$$

is az.

**2. tétel.** Ha  $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$  lineárisan független megoldásai (LHDER)-nek, akkor bármely  $\underline{y}$  megoldásra létezik  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , hogy

$$\underline{y} = c_1 \underline{y}_1 + \dots + c_n \underline{y}_n.$$

**2. definíció.** Az (LHDER)  $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$  ( $\underline{y}_1 = (y_{11}, \dots, y_{n1})^\top, \dots, \underline{y}_n = (y_{1n}, \dots, y_{nn})^\top$ ) lineárisan független megoldásaiból képzett

$$\psi = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

mátrixot alap-, vagy megoldásmátrixnak, míg a

$$W \doteq \det \psi$$

determinánst az  $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$  függvények Wronski-determinánsának nevezzük.

**3. tétel.** Ha  $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  megoldásai (LHDER)-nek és  $x_0 \in I$  rögzített, akkor

$$W(x) = W(x_0) \exp \left[ - \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^n g_{ii}(t) dt \right] \quad (x \in I)$$

teljesül. Így  $W(x) \equiv 0$ , vagy  $W(x) \neq 0$  ( $x \in I$ ).

**4. tétel.**  $\psi$  akkor, és csak akkor alapmátrixa (LHDER)-nek, ha  $W(x) \neq 0$  ( $x \in I$ ).

**Megjegyzés.** Itt is a fő feladat az alapszisztem meghatározása, melyre általános módszer nincs, de itt is használható D’Alambert redukciós módszere, melynek lényege: ha ismert (LHDER) egy megoldása, akkor az egyenletrendszer eggyel kevesebb egyenletből álló differenciálegyenlet-rendszerre vezethető vissza.

**5. tétel.** Ha  $\underline{y}_p$  megoldása (LIHDER)-nek, úgy  $\underline{y}$  akkor, és csak akkor megoldása, ha  $\underline{y} - \underline{y}_p \doteq \underline{y}_H$  megoldása a (LIHDER)-ből képzett (LHDER)-nek. Azaz (LIHDER) általános megoldása  $\underline{y} = \underline{y}_H + \underline{y}_p$  alakú.

**6. tétel (a konstansvariálás módszere).** Ha  $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$  (LHDER) alapszisztere és  $c_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) olyan függvények, hogy teljesül a

$$\sum_{i=1}^n c'_i \underline{y}_i = \underline{\varphi},$$

azaz a

$$\left\{ \begin{array}{l} c'_1(x)y_{11}(x) + \dots + c'_n(x)y_{1n}(x) = \varphi_1(x) \\ \vdots \\ c'_1(x)y_{n1}(x) + \dots + c'_n(x)y_{nn}(x) = \varphi_n(x) \end{array} \right\} \quad (x \in [a, b])$$

egyenletrendszer, akkor

$$\underline{y}_p(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x) \underline{y}_i(x) \quad (x \in [a, b])$$

megoldása (LIHDER)-nek.

**Megjegyzések.**

- 1) Ha (LHDER) konstansgyűthetős, azaz  $\underline{g} = A$  konstans mátrix, azaz  $g_{ij}(x) = a_{ij} \in \mathbb{R}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), akkor az

$$\text{(KLHDER)} \quad \underline{y}' + A\underline{y} = 0$$

megoldásait az

$$\underline{y}(x) = ce^{\lambda x} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda x} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda x} \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

alakban keressük, ahol  $\lambda \in \mathbb{R}$  vagy  $\mathbb{C}$ .

Ekkor (KLHDER)-ből kapjuk, hogy

$$\underline{y}' = \lambda ce^{\lambda x} = -Ace^{\lambda x},$$

azaz  $Ac = -\lambda c$ , illetve  $(A + \lambda E)c = 0$  egyenletrendszer teljesül. Másképpen fogalmazva  $y = ce^{\lambda x}$  akkor, és csak akkor megoldása (KLHDER)-nek, ha

$$(*) \quad (A + \lambda E)c = 0,$$

ahol  $E$  az egységmátrix. Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer  $c$ -re.

Lineáris algebrából ismert, hogy  $(*)$ -nak akkor, és csak akkor létezik nemtriviális megoldása, ha

$$\det(A + \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

azaz  $\lambda$  megoldása a

$$P_n(\lambda) = \det(A + \lambda E) = 0$$

karakterisztikus egyenletnek, ami  $n$ -edfokú.

Ennek  $n$  (valós vagy komplex) megoldása van, melyekhez meghatározhatók a  $c \neq 0$  vektorok (ezek csak egy multiplikatív konstansból eltekintve egyértelműek).

Ezután eljuthatunk (KLHDER) alaprendszeréhez is (ha  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  mind valósak, akkor egyszerűbb az eset most is).

2) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert:

$$(IH) \quad \begin{cases} y_1' - y_1 - y_2 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 = x \end{cases} \quad \left( n = 2, A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right)$$

Tekintsük a homogén

$$(H) \quad \begin{cases} y_1' - y_1 - y_2 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszert. Ennek megoldásait az

$$(*) \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda x} \\ c_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix}$$

alakban keresve kapjuk, hogy  $(*)$  akkor, és csak akkor megoldása  $(H)$ -nak, ha

$$\begin{cases} (\lambda - 1)c_1 - c_2 = 0 \\ -c_1 + (\lambda - 1)c_2 = 0 \end{cases} .$$

Ez egy lineáris homogén egyenletrendszer  $c_1, c_2$ -re, melynek akkor, és csak akkor létezik triviálistól különböző megoldása, ha

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0 ,$$

azaz, ha  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$ .

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0 &\Rightarrow -c_1 - c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -c_1 \text{ (} c_1 \text{ tetsz.)}, \\ &\Rightarrow \underline{y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} . \\ \lambda_2 = 2 &\Rightarrow c_1 - c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = c_1 , \\ &\Rightarrow \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_1 e^{2x} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Az alapmátrix:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2x} \\ -1 & e^{2x} \end{pmatrix} .$$

A Wronski-determináns:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2x} \\ -1 & e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{2x} \neq 0 .$$

Így

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

alaprendszere a homogén differenciálegyenlet-rendszernek, ami adja, hogy

$$\underline{y}_H(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_{1H}(x) = c_1 + c_2 e^{2x} \\ y_{2H}(x) = -c_1 + c_2 e^{2x} \end{cases}$$

a vizsgált (H) konstans együtthatós lineáris homogén differenciálegyenlet általános megoldása. Ekkor (a 6. tétel miatt)

$$\underline{y}_p(x) = c_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

megoldása (IH)-nak, ha

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot 1 + c_2'(x) \cdot e^{2x} = 0 \\ c_1'(x) \cdot (-1) + c_2'(x) \cdot e^{2x} = x \end{cases}$$

teljesül, melyből

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ x & e^{2x} \end{vmatrix}}{2e^{2x}} = -\frac{x}{2}; \quad c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & x \end{vmatrix}}{2e^{2x}} = \frac{x}{2}e^{-2x},$$

illetve

$$\begin{cases} c_1(x) = -\frac{x^2}{4}, \\ c_2(x) = \int \frac{x}{2} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \frac{x}{2} e^{-2x} - \int -\frac{1}{2} \frac{1}{2} e^{-2x} = \\ = -\frac{x}{4} e^{-2x} - \frac{1}{8} e^{-2x}. \end{cases}$$

következik. Így (az 5. tétel miatt) (IH) általános megoldását az

$$\begin{aligned} \underline{y}(x) &= \underline{y}_H(x) + \underline{y}_p(x) = \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} + c_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



alakban kapjuk, amiből következik, hogy

$$y_1(x) = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{8}$$

$$y_2(x) = -c_1 + c_2 e^{2x} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{8}.$$

- 3) Az előbbi példa differenciálegyenlet-rendszerének másik megoldása:  
Az

$$(H) \quad \begin{cases} y_1' - y_1 - y_2 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 = x \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszer első egyenletét differenciálva (az egyenletek adják, hogy  $y_1$  és  $y_2$  is kétszer, sőt akárhányszor differenciálható)

$$y_1'' - y_1' - y_2' = 0$$

következik, melyet összehasonlítva a differenciálegyenlet-rendszerrel eliminálható  $y_2'$  és  $y_2$ , és az

$$y_1'' - 2y_1' = x$$

másodrendű konstanssegýtthetős lineáris inhomogén differenciálegyenlet adódik  $y_1$ -re.

A homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete:  $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ , ami akkor, és csak akkor teljesül, ha  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 2$ , amiből kapjuk, hogy

$$y_{1H}(x) = c_1 + c_2 e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Keressük  $y_{1p}$ -t

$$y_{1p}(x) = c_1(x) + c_2(x)e^{2x}$$

alakban, ez megoldás, ha  $c_1'(x)$  és  $c_2'(x)$  teljesíti a

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot 1 + c_2'(x) \cdot e^{2x} &= 0 \\ c_1'(x) \cdot 0 + c_2'(x) \cdot 2e^{2x} &= x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert, amiből következik, hogy

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ x & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{2x} \\ 0 & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = -\frac{xe^{2x}}{2e^{2x}} = -\frac{x}{2} \Rightarrow c_1(x) = -\frac{x^2}{4},$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix}}{2e^{2x}} = \frac{x}{2}e^{-2x} \Rightarrow c_2(x) = \frac{x}{4}e^{-2x} - \frac{1}{8}e^{-2x}.$$

Így

$$y_1(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{8} + c_1 + c_2 e^{2x}$$

és

$$y_2(x) = y_1'(x) - y_1(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{8} - c_1 + c_2 e^{2x}.$$

## 5. Konstansegyütthetős lineáris differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval

**Definíció.** Az  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény Laplace-transzformáltján az

$$F(s) \doteq \mathcal{L}[f(t)] \doteq \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (s \in \mathbb{R}_+)$$

szerint definiált  $F \doteq \mathcal{L}[f] : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt értjük, ha az improprius integrál konvergens. Inverzét (ha létezik)  $\mathcal{L}^{-1}$ -gyel jelöljük.

A Laplace-transzformált tulajdonságai:

- 1) Ha  $\exists \mathcal{L}[f(t)]$  és  $\mathcal{L}[g(t)]$ , akkor  $\exists \mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$ .
- 2) Ha  $\exists \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , akkor  $\exists \mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s - a)$ .
- 3) Ha  $\exists \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , akkor  $\exists \mathcal{L}[f(ct)] = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$ .

4) Ha  $f$  „elég jó”, akkor

$$\mathcal{L} [f^{(n)}(t)] = s^n \mathcal{L} [f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

speciálisan:  $\mathcal{L} [f'(t)] = s \mathcal{L} [f(t)] - f(0)$ .

$$5) \mathcal{L} [c] = \frac{c}{s}; \quad \mathcal{L} \left[ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right] = \frac{1}{s^n}.$$

$$6) \mathcal{L} [e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \quad \mathcal{L} \left[ \frac{t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!} \right] = \frac{1}{(s-a)^n} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

$$7) \mathcal{L} [\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}; \quad \mathcal{L} [\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

8) Egy folytonos függvény egyértelműen meghatározott Laplace-transzformáltja által.

Alkalmazás (KIH<sub>n</sub>D) megoldására:

Képezzük

$$(KIH_n D) \quad y^{(n)} + \sum_{i=1}^n a_i y^{(n-i)} = b(t)$$

mindkét oldalának Laplace-transzformáltját, akkor  $\mathcal{L}$  1. tulajdonsága miatt

$$\mathcal{L} [y^{(n)}] + \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L} [y^{(n-i)}] = \mathcal{L} [b(t)]$$

illetve 4. tulajdonsága miatt

$$\left( s^n + \sum_{i=1}^n a_i s^{n-i} \right) \mathcal{L} [y(t)] = y(0) \left[ s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i s^{n-i-1} \right] + y'(0) \left[ s^{n-2} + \sum_{i=1}^{n-2} a_i s^{n-i-2} \right] + \dots + y^{(n-1)}(0) + \mathcal{L} [b(t)]$$

adódik, melyből  $\mathcal{L} [y(t)]$  meghatározható. Ennek ismeretében pedig – a 8. tulajdonság miatt – valamint az 5-7. tulajdonságok felhasználásával meghatározható  $y(t)$  is.

**Példa.**

Oldjuk meg a következő (KIH<sub>3</sub>D)-re vonatkozó Cauchy-feladatot:

$$(*) \quad y''' - 3y' + 2y = 3e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2.$$

Képezve a Laplace-transzformáltat

$$\mathcal{L}[y'''] - 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^t]$$

adódik, illetve ebből (4. miatt)

$$s^3 \mathcal{L}[y] - s - 2 - 3s\mathcal{L}[y] + 2\mathcal{L}[y] = \frac{3}{s-1}$$

következik, melyből egyszerű számolással (parciális törtekre bontással)

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s+2 + \frac{3}{s-1}}{(s-1)^2(s+2)} = -\frac{1}{9(s+2)} + \frac{1}{9(s-1)} + \frac{2}{3(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^3}$$

adódik. Végül

$$y(t) = -\frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{1}{9}e^t + \frac{2}{3}te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$$

adja (\*) megoldását (8-at is felhasználva).

# V. PEREMFELADATOK, STABILITÁS

## 1. A peremfeladat fogalma

Általában, ha egy

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

alakú differenciálegyenletnél azon feltételek, melyek esetén a megoldás egyértelműen jellemezhető, nem egy helyre vonatkoznak (mint a kezdeti-érték-feladatnál), hanem azon  $[a, b]$  intervallum két végpontjára, amelyen a megoldást keressük, akkor peremfeladról beszélünk.

Az alkalmazások miatt különösen fontos a másodrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó peremfeladat definiálása.

Tekintsük az

$$(1) \quad y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \quad (x \in [a, b])$$

differenciálegyenletet a következő peremfeltételek valamelyikével:

elsőrendű peremfeltétel:  $y(a) = \eta_1, y(b) = \eta_2,$

másodrendű peremfeltétel:  $y'(a) = \eta_1, y'(b) = \eta_2,$

harmadrendű peremfeltétel:  $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \eta_1,$   
 $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \eta_2.$

Nyilván az első-, és másodrendű peremfeltétel speciális esete a harmadrendű peremfeltételnek, melyet Sturm-féle peremfeltételnek nevezünk.

Szokás még  $y(a) - y(b) = \eta_1,$   $y'(a) - y'(b) = \eta_2$  alakú peremfeltételt is tekinteni, melyet  $\eta_1 = \eta_2 = 0$  esetén periódikus peremfeltételnek is neveznek.

Sturmtól származik a következő alakú peremfeladat:

$$(S) \quad (p(x)y')' + q(x)y = b(x) \quad (x \in [a, b]),$$

$$(SPF) \quad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 p(a)y'(a) = \eta_1 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 p(b)y'(b) = \eta_2 \end{cases},$$

ahol  $p$  folytonosan differenciálható,  $q, b$  folytonos függvények  $[a, b]$ -n, továbbá  $p > 0$ ,  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$ ,  $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$ .  
 Megjegyezzük, hogy (1) a  $p(x) = e^{\int a_1(x) dx}$  szorzással adja (S)-t. A  $p(a), p(b)$  szorzók bevezetésének a peremfeltételekben praktikus okai vannak.

Ha  $b(x) \equiv 0$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , akkor a fenti (S)+(SPF)-hez tartozó homogén peremfeladatot kapjuk.

**Megjegyzés.** A peremfeladat megoldásában alapvető feladat a homogén egyenlet alaprendszerének meghatározása. Megmutatható, hogy ha  $y_1$  és  $y_2$  a homogén differenciálegyenlet alaprendszere, akkor az inhomogén peremfeladatnak akkor, és csak akkor létezik egyértelmű megoldása, ha

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 p(a) y_1'(a) & \alpha_1 y_2(a) + \alpha_2 p(a) y_2'(a) \\ \beta_1 y_1(b) + \beta_2 p(b) y_1'(b) & \beta_1 y_2(b) + \beta_2 p(b) y_2'(b) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Ekkor a homogén peremfeladatnak csak triviális megoldása van.

Az általános elméletet nem vizsgáljuk.

## 2. Sturm-Liouville rendszerek

A következőkben egy szabad paramétert is tartalmazó peremfeladatot tekintünk.

Az

$$y'' + a_1(x)y' + [a_2(x) + \lambda]y = 0, \quad x \in [a, b]$$

másodrendű differenciálegyenlet, melyben egy  $\lambda$  paraméter is van, a

$$p(x) \doteq \exp \left[ \int a_1(t) dt \right], \quad q(x) \doteq a_2(x)p(x), \quad s(x) = p(x)$$

( $x \in [a, b]$ ) jelölésekkel a vele ekvivalens

$$(S-L) \quad (p(x)y')' + [q(x) + \lambda s(x)]y = 0, \quad x \in [a, b]$$

alakba írható, melyet Sturm-Liouville egyenletnek is neveznek.

Feltesszük, hogy  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $q$  és  $s$  folytonos,  $p$  folytonosan differenciálható

függvények az  $I = [a, b]$  intervallumon.

(S-L) reguláris, ha  $p$  és  $s$  pozitívak, míg ha a jobboldalon 0-tól különböző függvény van, úgy inhomogén (S-L) egyenletről beszélünk.

(S-L)-t az

$$(PF) \quad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 p(a)y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 p(b)y'(b) = 0 \end{cases}$$

peremfeltételek mellett vizsgáljuk, ahol  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  nem mind zérus valós konstansok.

(S-L)-t és (PF)-et együtt Sturm-Liouville rendszernek nevezzük, jelölése: (S-L-R).

Azon  $\lambda$ -kat, melyekre (S-L-R)-nek létezik 0-tól különböző megoldása sajátértékeknek, a hozzájuk tartozó megoldásokat pedig sajátfüggvényeknek nevezzük.

**Példa.** Tekintsük az

$$(S-L-R) \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

speciális Sturm-Liouville rendszert.

- a) Ha  $\lambda \leq 0$ , úgy az alaprendszer  $e^{\sqrt{|\lambda|x}}$ ,  $e^{-\sqrt{|\lambda|x}}$ , és így az általános megoldás:

$$y = c_1 e^{\sqrt{|\lambda|x}} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|x}},$$

de a peremfeltételek miatt  $c_1 = c_2 = 0$ , ezért  $y \equiv 0$ .

- b) Ha  $\lambda > 0$ , akkor az alaprendszer  $\cos \sqrt{\lambda}x$ ,  $\sin \sqrt{\lambda}x$ , és így az általános megoldás:

$$y = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x.$$

A peremfeltételek miatt:

$$\begin{aligned} y(0) = A \cos 0 + B \sin 0 = 0 & \Rightarrow A = 0, \\ y'(\pi) = -A\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\pi + B\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\pi = 0 & \Rightarrow B\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\pi = 0. \end{aligned}$$

Ha  $B = 0$  lenne, úgy  $y = 0$  adódna, ha  $B \neq 0$ , akkor  $\cos \sqrt{\lambda}\pi = 0$  miatt

$$\sqrt{\lambda}\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{2n+1}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

azaz az (S-L-R) sajátértékei a

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)^2}{4} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

valós számok, míg a hozzájuk tartozó sajátfüggvények

$$y_n(x) = \sin \frac{2n+1}{2}x \quad (n = 0, 1, \dots).$$

### Megjegyzések.

- 1) Ha (S-L)-ben  $p(a) = p(b)$  és (PF) az  $y(a) = y(b)$ ,  $y'(a) = y'(b)$  alakot ölti, akkor periódikus Sturm-Liouville rendszerről beszélünk.
- 2) Adott sajátértékhez több (lineárisan független) sajátfüggvény is tartozhat.
- 3) Vizsgálható a különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények ortogonalitása a  $p$  súlyfüggvényre, ami azt jelenti, hogy ha például  $\varphi_j$  és  $\varphi_k$  különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények, akkor

$$\int_a^b \varphi_j(x)\varphi_k(x)p(x)dx = 0 \quad (j \neq k).$$

A példában  $p = 1$ ,  $[a, b] = [0, \pi]$ , így azt kell megmutatni, hogy

$$\int_0^\pi \sin \frac{2i+1}{2}x \sin \frac{2j+1}{2}x = 0 \quad (i, j = 0, 1, \dots; i \neq j).$$

- 4) Vizsgálható a sajátértékek elhelyezkedése is (pl. egy reguláris (S-L-R) sajátértékei  $s(x) > 0$  esetén valósak).
- 5) Egy reguláris (S-L-R) sajátfüggvényei egy konstans szorzóig egyértelműen meghatározottak.
- 6) Egy reguláris (S-L-R) általános megoldása a sajátfüggvények segítségével az

$$y = \sum_i c_i y_i$$

függvénysorral állítható elő (lásd Fourier-sorok).



### 3. Parciális differenciálegyenletek peremfeltételekkel

Legyen adott az  $(0, 0)$  és  $(l, 0)$  pontban rögzített húr, melynek  $x$  pontja a  $t$  időpillanatban az  $u(x, t)$  magasságban van. A rezgést az

$$(RHD) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

parciális differenciálegyenlet írja le, ahol  $a = \sqrt{F/\mu}$  ( $F$  a feszítőerő,  $\mu$  az egységnyi hosszra eső tömeg.) A rögzítettséget a

$$(P) \quad u(0, t) = 0 \quad u(l, t) = 0$$

peremfeltételek fejezik ki.

A  $t = 0$ -ban a húr alakját egy  $f$ , sebességét egy  $\varphi$  függvény írja le, azaz teljesülnek a

$$(K) \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi(x) \quad (x \in [a, b])$$

kezdeti feltételek is.

Megoldandó tehát (RHD) a (P) perem-, illetve a (K) kezdeti feltételek mellett (ez egy hiperbólikus parciális differenciálegyenletre vonatkozó vegyes feladat).

Keressük (RHD) megoldását az

$$(SZ) \quad u(x, t) = X(x)T(t) \quad (x \in [0, l], t \in \mathbb{R}_+)$$

alakban. Ezt (RHD)-be helyettesítve

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

adódik, melyből következnek a

$$(H_2D_1) \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (x \in [0, l]),$$

$$(H_2D_2) \quad T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

másodrendű homogén differenciálegyenletek.

(P) most az  $X(0)T(t) = 0$ ,  $X(l)T(t) = 0$  alakot ölti, amiből  $u(x, t) \neq 0$  miatt kapjuk (H<sub>2</sub>D<sub>1</sub>)-re a

$$(P_1) \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

peremfeltételt.

Az előbb már láttuk, hogy  $(H_2D_1)$  megoldása

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x \quad (x \in [0, l]),$$

amiből  $(P_1)$  miatt jön, hogy csak

$$\lambda_k = \frac{k^2 \cdot \pi^2}{l^2}$$

mellett van megoldás és ez  $A = 0$  miatt

$$X_k(x) = B_k \sin \frac{k\pi}{l} x \quad (k = 1, 2, \dots).$$

$(H_2D_2)$ -re pedig, adott  $\lambda_k = (k^2 \pi^2)/(l^2)$  esetén (azaz adott  $X_k$ -hoz) a

$$T_k(t) = C_k \cos a \frac{k\pi}{l} t + D_k \sin a \frac{k\pi}{l} t$$

megoldás következik. Így  $u$ -ra:

$$u_k(x, t) = \left[ E_k \cos a \frac{k\pi}{l} t + F_k \sin a \frac{k\pi}{l} t \right] \sin \frac{k\pi}{l} x$$

adódik, mely teljesíti  $(RHD)$ -t és a  $(P)$  peremfeltételeket.

Megmutatható, hogy

$$E_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx ,$$

$$F_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx$$

mellett az

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ E_k \cos a \frac{k\pi}{l} t + F_k \sin a \frac{k\pi}{l} t \right] \sin \frac{k\pi}{l} x$$

függvény megoldása  $(RHD)$ -nek és teljesíti a  $(P)$  perem- és  $(K)$  kezdeti feltételeket is.

Ez a megoldási módszer a Fourier-módszer (ami felhasználja a Fourier-sorok elméletét is).

## 4. Stabilitás

Legyen adott az  $y' = y$  differenciálegyenlet és  $y(t)$  az egyenlet  $y(0) = \eta$ , míg  $z(t)$  a  $z(0) = \eta + \varepsilon$  kezdeti feltételt kielégítő megoldása. Ekkor

$$\int_{\eta}^y \frac{1}{y} dy = \int_0^t 1 dt \quad \Rightarrow \quad y(t) = \eta e^t \quad (t \geq 0),$$

$$\int_{\eta+\varepsilon}^z \frac{1}{y} dy = \int_0^t 1 dt \quad \Rightarrow \quad z(t) = (\eta + \varepsilon)e^t \quad (t \geq 0)$$

adja, hogy

$$z(t) - y(t) = \varepsilon e^t \quad (t \geq 0).$$

Az adott differenciálegyenletnél a változó kezdeti feltételekhez tartozó megoldások különbsége  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^t = +\infty$  miatt  $+\infty$ -hez tart.

Ha most az  $y' = -y$  differenciálegyenletet tekintjük, úgy az  $y(0) = \eta$ , illetve  $z(0) = \eta + \varepsilon$  kezdeti feltételeket teljesítő  $y(t)$ , illetve  $z(t)$  megoldások különbségére (az előbbivel azonos módon) kapjuk, hogy

$$z(t) - y(t) = \varepsilon e^{-t} \quad (t \geq 0),$$

ami adja, hogy  $\lim_{t \rightarrow \infty} (z(t) - y(t)) = 0$ , hiszen  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0$ .

**Cél:** Megadni annak kritériumát, hogy egy adott differenciálegyenlet megoldása folytonosan függ a kezdeti feltételektől abban az értelemben, hogy  $z(0)$  és  $y(0)$  kis eltérése esetén az  $|z(t) - y(t)|$  eltérés is kicsi a  $t \geq 0$  intervallumon.

Az ilyen típusú problémák a differenciálegyenletek stabilitáselméletéhez tartoznak.

**1. definíció (stabilitás, aszimptotikus stabilitás).** Legyen  $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  adott függvény, mely legalább az

$$S_\alpha = \{(t, \underline{y}) \mid t \geq 0, \|\underline{y} - \underline{x}(t)\| < \alpha\}$$

halmazon értelmezett és folytonos, ahol  $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  az

$$\underline{y}' = f(t, \underline{y})$$

differentiálegyenlet megoldása a  $0 \leq t < \infty$  intervallumon.

Az  $\underline{x}(t)$  megoldást stabilnak nevezzük, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists \delta$ , melyre  $\|\underline{y}_0 - \underline{x}(0)\| < \delta$  esetén az  $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$  kezdeti feltételt teljesítő  $\underline{y}$  megoldás minden  $t \geq 0$ -ra értelmezett és

$$\|\underline{y}(t) - \underline{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, \infty)$$

teljesül. Az  $\underline{x}(t)$  megoldást aszimptotikusan stabilnak nevezzük, ha stabil és  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{y}(t) - \underline{x}(t)\| = 0$ .

Egy  $\underline{x}(t)$  megoldást instabilnak nevezzük, ha nem stabil.

**2. definíció (mátrix polinomja).** Legyen

$$P_n(x) \doteq a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

egy valós polinom,  $B = (B_{ij})$  egy  $n \times n$ -es mátrix, akkor  $P_n(B)$  alatt a

$$P_n(B) \doteq a_0E + a_1B + \dots + a_nB^n$$

mátrixot értjük és a  $B$  mátrix polinomjának nevezzük.

Ha  $B = At$  (ahol  $A = (a_{ij})$   $n \times n$ -es mátrix), akkor

$$P_n(At) \doteq a_0E + a_1At + \dots + a_nA^n t^n$$

egy  $t$ -től függő mátrix.

**Megjegyzés.**  $\frac{d}{dt}P_n(At) = AP'_n(At)$ , ahol  $P'_n(x)$  a  $P_n(x)$  deriváltja.

**3. definíció (mátrix hatványsora).** Legyen

$$f(x) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (|x| < r)$$

adott hatványsor az  $r$  konvergenciasugárral, akkor rendeljük hozzá a  $B = (B_{ij})$  mátrixhoz az  $f(B)$  mátrixot, hogy

$$(MH) \quad f(B) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} a_k B^k \quad \left( \|B\|_e \doteq \sqrt{\sum_{i,j} |B_{ij}|^2} < r \right).$$

Tekintsük a  $C_k$   $n \times n$ -es mátrixok  $C = \sum_{k=0}^{\infty} C_k$  végtelen sorát. Ha  $C_k = (c_{ij}^k)$  és  $C = (c_{ij})$ , úgy ez az egyenlőség a következő  $n^2$  „darab”  $c_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}^k$  végtelen számsor rövidítése.

Azt mondjuk, hogy a  $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$  mátrix sor konvergens, illetve abszolút konvergens, ha az  $n^2$  „darab”  $\sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}^k$  számsor is ilyen tulajdonságú.

### Megjegyzések.

- 1)  $\|B\|_e$ -t a  $B$  mátrix euklideszi normájának nevezzük, melyre – a norma szokásos tulajdonságain túl –  $\|AB\|_e \leq \|A\|_e \|B\|_e$ ,  $\|Ax\|_e \leq \|A\|_e \|x\|_e$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ) is teljesül.
- 2) Az (MH) hatványsor abszolút konvergens, ha  $s = \|B\|_e < r$ , mert akkor  $\|B^2\|_e \leq \|B\|_e^2 = s^2, \dots, \|B^k\|_e \leq s^k, \dots$ , ami adja az abszolút konvergenciát a majoráns kritérium miatt.
- 3) Az

$$f(At) \doteq a_0 E + a_1 At + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k t^k$$

$t$ -től függő sor abszolút konvergens, ha  $|t| < r/(\|A\|_e) = t_0$  és egyenletesen konvergens a  $(-t_0, t_0)$  bármely zárt intervallumán, azaz az  $n^2$  számú számsor mindegyike egyenletesen konvergens, továbbá  $f(At)$  tagonként differenciálható és

$$\frac{d}{dt} f(At) = A f'(At) .$$

### Következmény.

$$e^B = E + B + \frac{B^2}{2!} + \dots ,$$

továbbá  $(e^{At})' = Ae^{At}$ ;  $e^{B+C} = e^B e^C$  (ha  $BC = CB$ )  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .

Ezek segítségével egy másik (a korábitól eltérő) utat találhatunk a konstansgyűthetős lineáris homogén differenciálegyenlet-rendszerek alaprendszerének és a konstansgyűthetős lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszerek általános megoldásának meghatározására.

**1. tétel.** legyen  $(A)_{n \times n}$  konstans mátrix, akkor a

$$(KLHDER) \quad \underline{y}' = A\underline{y}$$

megoldása  $[0, \infty)$ -en  $\underline{y}(0) = E$  mellett

$$(KLHDER-Mo) \quad \underline{y}(x) = e^{Ax}.$$

Továbbá a

$$(KLIHDER-KÉP) \quad \underline{y}' = A\underline{y} + \underline{\varphi}, \quad (\underline{y}(0) = \underline{y}_0)$$

megoldása:

$$(KLIHDER-KÉP-Mo) \quad \underline{y}(x) = e^{Ax}\underline{y}_0 + \int_0^x e^{A(x-t)}\underline{\varphi}(t) dt .$$

### Bizonyítás.

a)  $(e^{Ax})' = Ae^{Ax}$  adja az állítás első felét, és nyilván  $\underline{y}(0) = E$  is igaz.

b) Ismeretes, hogy (lásd konstansvariálás módszere (LIHDER)-re) ha  $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$  (LHDER) alaprendszere, úgy (LIHDER) általános megoldása

$$(*) \quad \underline{y} = \sum_{i=1}^n c_i \underline{y}_i(x) + \sum_{i=1}^n c_i(x) \underline{y}_i(x) ,$$

ahol  $c_i'(x)$  teljesíti a

$$\sum_{i=1}^n y_{ij}(x) c_i'(x) = \varphi_j(x) \quad (j = 1, \dots, n)$$

egyenletrendszert, mely az

$$y_H = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & & \\ y_{n1} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} (c_1'(x) \dots c_n'(x))^\top = \underline{c}'(x) \\ (\varphi_1(x) \dots \varphi_n(x))^\top = \underline{\varphi}(x) \end{cases}$$

jelölések mellett az

$$y_H(x) \underline{c}'(x) = \underline{\varphi}(x)$$

alakba írható, ahol  $\det y_H \neq 0$  (mert  $y_H$  alaprendszer), így  $\exists y_H^{-1}$  és

$$\underline{c}'(x) = y_H^{-1}(x)\underline{\varphi}(x) .$$

Ebből

$$\underline{c}(x) = \underline{c}(0) + \int_0^x y_H^{-1}(t)\underline{\varphi}(t) dt .$$

Így (\*) a  $\underline{c} = (c_1 \dots c_n)^\top$  jelölés mellett az

$$\underline{y}(x) = y_H(x)(\underline{c} + \underline{c}(0)) + \int_0^x y_H(x)y_H^{-1}(t)\underline{\varphi}(t) dt$$

alakot ölti, amiből  $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$  miatt  $\underline{y}_0 = y_H(0)(\underline{c} + \underline{c}(0))$ , illetve

$$\underline{c} + \underline{c}(0) = y_H^{-1}(0)\underline{y}_0$$

következik. Így

$$\underline{y}(x) = y_H(x)y_H^{-1}(0)\underline{y}_0 + \int_0^x y_H(x)y_H^{-1}(t)\underline{\varphi}(t) dt$$

teljesül. Ebből pedig

$$y_H(x) = e^{Ax}, \quad y_H^{-1}(x) = e^{-Ax}$$

felhasználásával jön az állítás.

**2. tétel.** Ha az  $A$  mátrix  $\lambda_i$  sajátértékei teljesítik a  $\operatorname{Re} \lambda_i < \alpha$  egyenlőtlenségeket, akkor

$$\|e^{At}\| \leq ce^{\alpha t} \quad (t \geq 0),$$

ahol  $c > 0$  alkalmas konstans.

**3. tétel.** A

$$(KLHDER) \quad \underline{y}' = A\underline{y}$$

minden megoldása akkor, és csak akkor tart  $\underline{0}$ -hoz  $t \rightarrow \infty$  esetén, ha  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  az  $A$  bármely  $\lambda_i$  sajátértékére.

**4. tétel (stabilitási tétel (KLHDER)-re).** Legyenek  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  ( $p \leq n$ ) az  $A$  mátrix sajátértékei és  $\gamma = \max\{\operatorname{Re} \lambda_i\}$ . Akkor az  $\underline{x}(t) \equiv \underline{0}$  triviális megoldása (KLHDER)-nek

- $\gamma < 0$ -ra aszimptótikusan stabil,
- $\gamma > 0$ -ra instabil,
- $\gamma = 0$  esetén nem aszimptótikusan stabil (de lehet stabil vagy instabil is).

**Gronwall-lemma.** A  $\phi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény legyen folytonos és teljesüljön, hogy

$$\phi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \phi(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, a], \beta > 0.$$

Akkor

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\beta t} \quad (t \in [0, a]).$$

**Bizonyítás.** Nem kell.

**5. tétel (általános stabilitási tétel).** A  $g(t, \underline{x})$  függvény legyen értelmezett  $t \geq 0$ ,  $\|\underline{x}\| \leq \alpha$  ( $\alpha > 0$ ) esetén, folytonos és

$$(*) \quad \lim_{\|\underline{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|g(t, \underline{x})\|}{\|\underline{x}\|} = 0$$

egyenletesen  $t \geq 0$ -ra és  $g(t, \underline{0}) = \underline{0}$ . Az  $A$  mátrix legyen konstans és olyan, hogy  $A \forall \lambda_i$  sajátértékére  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ . Akkor a

$$(**) \quad \underline{y}' = A\underline{y} + g(t, \underline{y})$$

differenciálegyenlet  $\underline{x}(t) \equiv \underline{0}$  megoldása aszimptótikusan stabil.

**Bizonyítás.** A feltételek és a 2. tétel miatt léteznek  $c > 1$  és  $\beta > 0$  konstansok, hogy  $\operatorname{Re} \lambda_i < -\beta$  és

$$\|e^{At}\| \leq ce^{-\beta t} \quad (t \geq 0).$$



Másrészt (\*) miatt  $\exists \delta$ ,  $0 < \delta < \alpha$ , hogy

$$(***) \quad \|g(t, \underline{x})\| \leq \frac{\beta}{2c} \|\underline{x}\| \quad (\|\underline{x}\| \leq \delta, t \geq 0).$$

Megmutatjuk, hogy

$$(\Rightarrow) \quad \|\underline{y}(0)\| \leq \varepsilon < \frac{\delta}{c} \quad \Rightarrow \quad \|\underline{y}(t)\| \leq c\varepsilon e^{-\frac{\beta t}{2}}.$$

Az 1. tétel szerint (\*\*) megoldása (mivel  $\varphi(s) = g(s, \underline{y}(s))$ ) teljesíti az

$$\underline{y}(t) = e^{At} \underline{y}(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} g(s, \underline{y}(s)) ds$$

integrálegyenletet, így (\*\*\*) miatt a

$$(****) \quad \|\underline{y}(t)\| \leq \|\underline{y}(0)\| c e^{-\beta t} + \int_0^t c e^{-\beta(t-s)} \frac{\beta}{2c} \|\underline{y}(s)\| ds$$

egyenlőtlenség teljesül, ha  $\|\underline{y}\| \leq \delta$ .

Legyen  $\underline{y}(t)$  olyan megoldása (\*\*)-nak, hogy  $\|\underline{y}_0\| < \varepsilon$  és legyen  $\phi(t) = \|\underline{y}(t)\| e^{\beta t}$ . Ekkor a (\*\*\*) egyenlőtlenség adja, hogy

$$\phi(t) \leq c\varepsilon + \frac{\beta}{2} \int_0^t \phi(s) ds \quad (\text{ha } \|\underline{y}\| \leq \delta),$$

ami a Gronwall-lemma miatt adja, hogy

$$\phi(t) \leq c\varepsilon e^{\frac{\beta t}{2}},$$

vagyis

$$(\circ) \quad \|\underline{y}(t)\| \leq c\varepsilon e^{-\frac{\beta t}{2}} < \delta.$$

Ebből látható, hogy  $\|\underline{y}(t)\|$   $\delta$ -t pozitív  $t$ -re nem veszi fel és így  $(\circ)$  teljesül, ami adja  $(\Rightarrow)$  fennállását is.

$\underline{y}(t)$  a  $g$  függvény értelmezési tartományának határáig, így  $(\circ)$  miatt az egész  $0 \leq t < \infty$  intervallumra folytatható.

Így

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{y}(t) - \underline{x}(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{y}(t)\| \leq c\varepsilon \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{\beta t}{2}} = 0$$

adja, hogy  $\underline{x}(t) \equiv \underline{0}$  aszimptótikusan stabil.



# VI. VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS

## 1. Alapfogalmak, alapfeladatok

A variációszámítás általánosabb függvénykapcsolatokra (funkcionálokra) vizsgál szélsőérték-problémákat.

**1. definíció.** Legyen  $M$  a valós függvények egy osztálya. Egy  $\mathcal{J} : M \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt funkcionálnak nevezünk.

**Megjegyzések.**

1)  $M$  lehet például:

$C^0[a, b]$ , az  $[a, b]$  felett értelmezett folytonos függvények halmaza.

$C^1[a, b]$ , az  $[a, b]$  felett értelmezett folytonosan differenciálható függvények halmaza.

$C^2[a, b]$ , az  $[a, b]$  felett értelmezett kétszer folytonosan differenciálható függvények halmaza.

2)  $C^0[a, b]$ ,  $C^1[a, b]$ ,  $C^2[a, b]$  is lineáris terek (a függvények körében értelmezett összeadásra és skalárral való szorzásra nézve). Másrészt értelmezhető bennük norma, illetve ebből távolság is.

Például  $C^0[a, b]$ -ben az  $y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvények távolsága:

$$\varrho_0(y_1, y_2) \doteq \max_{x \in [a, b]} |y_1(x) - y_2(x)|$$

szerint értelmezhető.  $C^1[a, b]$ -ben pedig

$$\varrho_1 \doteq \max\{\varrho_0(y_1, y_2), \varrho_0(y'_1, y'_2)\}$$

szerint is.

3) Általánosabban lineáris normált tér felett értelmezett függvényekkel (funkcionálokkal), illetve azokra tekintett szélsőérték-problémákkal is foglalkozhatnánk.

**2. definíció.** Az  $\mathcal{J} : M \rightarrow \mathbb{R}$  funkcionálnak az  $y_0 \in M$  függvényen abszolút minimuma (maximuma) van, ha  $\forall y \neq y_0$ -ra ( $y \in M$ )

$$\mathcal{J}(y(x)) > \mathcal{J}(y_0(x)) \quad (\mathcal{J}(y(x)) < \mathcal{J}(y_0(x)))$$

teljesül.

**3. definíció.** Az  $\mathfrak{J} : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funkcionálnak az  $y_0 \in C^1[a, b]$  függvényen relatív erős (illetve relatív gyenge) minimuma van, ha  $\exists \varepsilon > 0$ , hogy

$$\mathfrak{J}(y(x)) > \mathfrak{J}(y_0(x)) \quad (x \in [a, b])$$

teljesül az  $y_0$  függvény  $\varepsilon$ -sugarú  $\varrho_0$  (illetve  $\varrho_1$ ) környezetébe eső  $\forall y \in C^1[a, b]$  ( $y \neq y_0$ ) függvényre. (A maximum ugyanígy értelmezhető.)

### Alapfeladatok:

- 1) A sík adott  $P_1(a, A)$ ,  $P_2(b, B)$  pontjait összekötő síkgörbék közül határozzuk meg azokat, melyeket az  $x$ -tengely körül megforgatva a legkisebb felszínű forgásfelület adódik.

Keressük a megoldást először, amikor a görbe az

$$\{(x, y(x)) \mid y \in C^1[a, b], x \in [a, b]\}$$

halmaz, azaz egy  $y \in C^1[a, b]$  függvény gráfja, hogy

$$(1) \quad y(a) = A, \quad y(b) = B$$

is teljesül.

Ismeretes, hogy az (1)-et teljesítő  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $y \in C^1[a, b]$ ) függvény  $x$ -tengely körüli megforgatásával keletkezett forgásfelület felszínét az  $y$  függvényében az

$$(FF) \quad \mathfrak{J}(y(x)) \doteq 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

szerint definiált  $\mathfrak{J} : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funkcionál adja meg.

Az 1. alapfeladat tehát: Az (FF) szerint definiált funkcionál minimumát adó, (1)-et is teljesítő  $y \in C^1[a, b]$  függvények meghatározása.

Az 1. alapfeladat általánosítása, amikor egy

$$(2) \quad \mathfrak{J}(y(x)) \doteq \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$$

szerint értelmezett  $\mathfrak{J} : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funkcionál minimumát adó, (1)-et is teljesítő,  $y \in C^1[a, b]$  függvényt keresünk, ahol az alapfüggvénynek is nevezett  $F$  függvény elég jó függvény. Ez az általános síkbeli nemparaméteres probléma.

Kereshetjük a minimális forgásfelületet adó görbéket az általánosabb,

$$g(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [\alpha, \beta]$$

alakban is, ahol  $g \in C^1[\alpha, \beta]$  és

$$(3) \quad x(\alpha) = 0, \quad x(\beta) = b, \quad y(\alpha) = A, \quad y(\beta) = B$$

is teljesül.

Ekkor (ahogy ez szintén ismeretes) az

$$(4) \quad \mathfrak{J}(x(t), y(t)) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

szerint definiált funkcionál minimumát adó  $g$  függvényeket kell meghatározni, ez a 2. alapeladat. Ennek általánosítása, ha egy

$$(5) \quad \mathfrak{J}(x(t), y(t)) \doteq \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t), y(t), x'(t), y'(t)) dt$$

szerint definiált funkcionál minimumát szolgáltató, (3)-at is teljesítő  $g$  függvényeket kell meghatározni, adott  $F$  elég jó alapfüggvény esetén.

Ez egy síkbeli paraméteres probléma.

- 2) Vizsgálhatók az úgynevezett térbeli (paraméteres, vagy nemparaméteres) problémák is. Ilyenkor például (nemparaméteres esetben) egy

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(\underline{y}(x)) &= \mathfrak{J}(y_1(x), \dots, y_n(x)) \doteq \\ &\doteq \int_a^b F(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)) dx \end{aligned}$$

szerint értelmezett funkcionál szélsőértékét (mondjuk minimumát) adó függvényeket keressük ( $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  típusú és  $y \in C^1[a, b]$ , illetve  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ ).

- 3) Vizsgálhatók feltételes szélsőérték-problémák is funkcionálokra. Például az úgynevezett Lagrange-feladat: határozzuk meg egy felület két adott pontját összekötő görbék közül a minimális ívhosszúságúakat.

## 2. Segédtelemek

### 1. lemma (paraméteres integrál differenciálhatósága).

Legyen  $F : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos és második változójában folytonosan parciálisan differenciálható függvény. Akkor a

$$\phi(x_2) \doteq \int_a^b F(\tau, x_2) d\tau, \quad x_2 \in [c, d]$$

szerint értelmezett  $\phi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény ( $F$  paraméteres integrálja) differenciálható és

$$\phi'(x_2) = \int_a^b F_{x_2}(\tau, x_2) d\tau \quad x_2 \in [c, d].$$

**Bizonyítás.** Lásd Analízis II., I/7 fejezet tétele  $n = 1$  mellett ( $f(x, t) \rightarrow F(\tau, x_2)$  átírással).

**2. lemma (Lagrange).** Ha az  $m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  olyan folytonos függvény, hogy bármely  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h \in C^2[a, b]$  és  $h(a) = h(b) = 0$ -t teljesítő függvényre

$$\int_a^b m(x) h(x) dx = 0,$$

akkor  $m(x) \equiv 0$   $[a, b]$ -n.

**Bizonyítás.** Lásd Kósa: Differenciálegyenletek (jegyzet), 133. oldal.

### 3. Funkcionálok variációi

Ismeretesek a következők:

Az  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény  $x_0 \in D$ -beli  $e \in \mathbb{R}^n$  iránymenti deriváltja

$$D_e f(x_0) \doteq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t e) - f(x_0)}{t}$$

(ha a határérték létezik).

Továbbá, ha  $\exists f'(x_0)$ , akkor

- $df(x, x_0) \doteq f'(x_0)(x - x_0)$  az  $f$  első differenciálja;
- $\forall e$ -re  $\exists D_e f(x_0) = f'(x_0) \cdot e$ .

Mivel  $x_0$  belső pontja a  $D$  (nyílt) halmaznak, így  $\exists \delta > 0$ , hogy a

$$\varphi(t) \doteq f(x_0 + t(x - x_0)), \quad |t| < \delta$$

szerint definiálható a  $\varphi : K(0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  valós függvény, melyre az előbbiek szerint

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} = \\ &= D_{(x-x_0)} f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) = df(x, x_0) \end{aligned}$$

teljesül, ha  $\exists f'(x_0)$ , azaz  $f$  első differenciálja  $\varphi'(0)$ .

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele és az előbbiek adják, hogy ha  $f$ -nek lokális szélsőértéke van  $x_0$ -ban és  $\exists f'(x_0)$ , akkor  $\varphi'(0) = 0$ . Ha  $\exists f''$ , akkor  $\exists \varphi''(0) = d^2 f(x, x_0)$ , azaz  $f$  második differenciálja éppen  $\varphi''$ . Miután pedig egy  $f$  többváltozós függvény lokális szélsőértékeinek meghatározásában az első- és második differenciálnak (azaz  $\varphi'(0)$  és  $\varphi''(0)$ -nak) van alapvető szerepe, így természetes, hogy funkcionálokra is bevezessük ezen fogalmak analógiáit, az első és második variációt.

**Definíció.** Legyen  $F$  kétszer folytonosan differenciálható a  $D \subset [a, b] \times \mathbb{R}^2$  nyílt halmazon,  $\mathfrak{J}$  pedig

$$(*) \quad \mathfrak{J}(y(x)) \doteq \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$$

( $y \in C^1[a, b]$ ,  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ ) szerint értelmezett funkcionál  $C^1[a, b]$ -n. Legyen továbbá  $\eta \in C^2[a, b]$ , hogy  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ , míg  $\delta > 0$  olyan, hogy ha adott  $y \in C^1[a, b]$ -re  $(x, y(x), y'(x)) \in D$ , akkor  $|t| < \delta$  esetén az  $\tilde{y}(x) = y(x) + t\eta(x)$  szerint definiált  $\tilde{y}$  függvényre  $(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) \in D$  (és  $\tilde{y}(a) = A$ ,  $\tilde{y}(b) = B$ ) teljesül. Ekkor a

$$(\circ) \quad \varphi(t) \doteq \mathfrak{J}(y(x) + t\eta(x)) \doteq \int_a^b F(x, y(x) + t\eta(x), y'(x) + t\eta'(x)) dx$$

( $|t| < \delta$ ) szerint értelmezett (kétszer differenciálható)  $\varphi$  függvényre létező  $\varphi'(0)$  és  $\varphi''(0)$  értékeket a (\*) szerint értelmezett  $\mathfrak{J}$  funkcionál első, illetve második variációjának nevezzük és rendre  $\delta\mathfrak{J}$ , illetve  $\delta^2\mathfrak{J}$ -vel jelöljük.

**Tétel.** Ha a definíció feltételei mellett  $\mathfrak{J}$  az  $y$  függvényen lokális szélsőértéket vesz fel, akkor  $\delta\mathfrak{J} = 0$ . (A lokális minimum szükséges feltétele miatt.)

**Bizonyítás.** Ha a (\*) szerint értelmezett  $\mathfrak{J}$  funkcionálnak  $y$ -ban lokális minimuma van, akkor  $\exists r > 0$ , hogy

$$\mathfrak{J}(y) \leq \mathfrak{J}(\psi) \quad \forall \psi \in C^1[a, b], \psi(a) = A, \psi(b) = B$$

esetén, melyre  $\varrho_1(y, \psi) < r$ . Mivel

$$\varrho_1(y, y + t\eta) = |t| \sup_{x \in [a, b]} \{|\eta(x)|, |\eta'(x)|\},$$

így  $\exists r_0 > 0$ , hogy  $\varrho_1(y, y + t\eta) < r$ , ha  $|t| < r_0$ , azaz  $\mathfrak{J}(y) \leq \mathfrak{J}(y + t\eta)$ , ha  $|t| < r_0$ , ami  $\varphi$  0-beli definíciója miatt adja, hogy  $\varphi(0) \leq \varphi(t) \forall |t| < r_0$ , azaz  $\varphi$ -nek 0-ban lokális szélsőértéke van. Másrészt  $\exists \varphi'(0)$  (az 1. lemma miatt), így  $\delta\mathfrak{J} \doteq \varphi'(0) = 0$ , amit bizonyítani kellett.

## 4. Az Euler-Lagrange differenciálegyenlet

**Tétel (a lokális szélsőérték egy szükséges feltétele).**

Legyen  $F : D \subset [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kétszer folytonosan differenciálható



függvény,  $\mathfrak{J} (*)$  szerint értelmezett funkcionál  $C^1[a, b]$ -n. Ha  $\mathfrak{J}$ -nek  $y$ -ban ( $y \in C^1[a, b]$ ,  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ ) lokális extrémuma van, akkor  $y$ -ra  $[a, b]$ -n teljesül az

$$(E-L) \quad F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} [F_{y'}(x, y(x), y'(x))] = 0$$

Euler-Lagrange differenciálegyenlet.

**Bizonyítás.** Az adott feltételek mellett, a  $\varphi$  definíciója miatt  $\exists \varphi'(0)$ , melyet az 1. lemma és a láncszabály miatt

$$\varphi'(0) = \int_a^b [F_y(x, y(x), y'(x))\eta(x) + F_{y'}(x, y(x), y'(x))\eta'(x)] dx$$

szerint kapunk.

Ugyanakkor a parciális integrálás tétele szerint

$$\begin{aligned} \int_a^b F_{y'}(x, y(x), y'(x))\eta'(x) dx &= [F_{y'}(x, y(x), y'(x))\eta(x)]_a^b - \\ &- \int_a^b \eta(x) \frac{d}{dx} [F_{y'}(x, y(x), y'(x))] dx = \\ &= - \int_a^b \eta(x) \frac{d}{dx} [F_{y'}(x, y(x), y'(x))] dx. \end{aligned}$$

Ezt  $\varphi'(0)$  előbbi alakjába helyettesítve:

$$\varphi'(0) = \int_a^b \left\{ F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} [F_{y'}(x, y(x), y'(x))] \right\} \eta(x) dx$$

adódik. Az előző tétel miatt  $\varphi'(0) = 0$  és akkor a Lagrange lemma adja a tétel állítását.

### Megjegyzések.

- 1) Ha a tétel feltételei mellett  $F$ -re még az is teljesül, hogy

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b],$$

akkor  $\exists y''$  és folytonos.

- 2) Ha pedig  $y \in C^2[a, b]$  is teljesül, akkor (E-L)-ben elvégezve a differenciálást

$$F_y - [F_{y'x} + F_{y'y}y' + F_{y'y'}y''] = 0,$$

illetve átrendezéssel

$$(E-L') \quad y''F_{y'y'} + y'F_{y'y} + F_{y'x} - F_y = 0$$

adódik.

- 3) Speciális típusú alapfüggvények:

– Ha  $F$  nem függ  $x$ -től és  $F_{y'y'} \neq 0$ , úgy ha  $y$  megoldása (E-L)-nek, akkor  $\exists c \in \mathbb{R}$ , hogy

$$(1) \quad F - y'F_{y'} = c.$$

**Bizonyítás.** (E-L') ebben az esetben az

$$(E-L'') \quad y''F_{y'y'} + y'F_{y'y} - F_y = 0$$

alakot ölti. Másrészt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[F - y'F_{y'}] &= F_y y' + F_{y'y} y' + F_{y'y'} y'' - \\ &\quad - y'' F_{y'} - y' F_{y'y} y' - y' F_{y'y'} y'' = \\ &= y' [F_y - y' F_{y'y} - y'' F_{y'y'}] = 0, \end{aligned}$$

ami adja az állítást.

– Ha  $F$  nem függ  $y$ -től, úgy  $y$  akkor és csak akkor megoldása (E-L)-nek, ha  $\exists c \in \mathbb{R}$ , hogy

$$(2) \quad F_{y'}(x, y'(x)) = c \quad (x \in [a, b]).$$

**Bizonyítás.** Ekkor (E-L) adja, hogy

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y'(x)) = 0,$$

ami viszont akkor, és csak akkor teljesül, ha (2) fennáll.

– Ha  $F$  nem függ  $y'$ -től, úgy  $y$  akkor, és csak akkor megoldása (E-L)-nek, ha

$$(3) \quad F_y(x, y(x)) = 0 \quad (x \in [a, b])$$

teljesül.

**Bizonyítás.** Ekkor (E-L) a (3) egyenlettel ekvivalens.

## 5. Az 1. alapeladat megoldása

Az

$$\mathfrak{J}(y(x)) \doteq 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx, \quad y \in C^2[a, b],$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

funkcionál minimumát adó függvény meghatározása volt a feladat.

Így

$$F(y(x), y'(x)) = y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} \quad (x \in [a, b])$$

miatt  $F$  nem függ  $x$ -től, tehát az előző paragrafus első esetével van dolgunk.

Ezért, ha  $\mathfrak{J}$  az  $y$  függvényen minimumot vesz fel, akkor

$$F - y'F_{y'} = y\sqrt{1 + y'^2} - y'y \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = c$$

azaz az (E-L) differenciálegyenlet speciális alakja most

$$(FF-D) \quad y - c\sqrt{1 + y'^2} = 0.$$

Ez egy implicit differenciálegyenlet.

→  $\sqrt{1+y'^2} > 0$ , így (FF-D)-nek nincs olyan integrálgörbéje, mely az  $y \geq 0$  félsíkból átmenne az  $y < 0$  félsíkba, vagy fordítva, így  $c$ -t választhatjuk nemnegatívnak. Ha  $c > 0$  esetén  $y$  megoldás, akkor  $-y$  is kielégíti (FF-D)-t, ha  $c$  helyett  $-c$ -t írunk.

→  $y = c$  ( $\geq 0$ ) megoldása (FF-D)-nek, de nem teljesíti (E-L)-t, mert

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = \sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx} \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = 1 - 0 \neq 0.$$

→ Nyilván  $c > 0$  kell, hogy legyen, hiszen egyébként  $y = 0$  lenne a megoldás, ami az előbbieket miatt nem teljesíti (E-L)-t.

→ Ha  $y$  olyan megoldás, mely semmilyen szakaszon sem állandó, akkor  $y'$  legfeljebb egy pontban tűnhet el, mert ha  $\exists a < b$ , hogy  $y'(a) = y'(b) = 0$  és  $y'(x) \neq 0$ ,  $x \in (a, b)$ , akkor (FF-D) miatt  $y(a) = y(b) = c$ , ami adná – a Rolle-tétel miatt – hogy  $\exists x \in (a, b)$ ,  $y'(x) = 0$ , ami ellentmondás.

→ Legyen most  $y$  az (FF-D) olyan megoldása, amelyre  $y'(x) \neq 0$  ( $x \in D_y$ ). Akkor (FF-D)-ből nyilván  $y(x) > c$  ( $x \in D_y$ ) következik, hiszen  $\sqrt{1+y'^2} > 1$ .

Az  $y(x) - c\sqrt{1+z^2} = 0$  egyenletnek  $\forall x \in D_y$ -ra a

$$z_1(x) = \sqrt{\frac{y(x)^2}{c} - 1}, \quad z_2(x) = -\sqrt{\frac{y(x)^2}{c} - 1}$$

szerint értelmezett függvények a megoldásai, melyek folytonosan differenciálhatók  $D_y$ -on.

Mivel  $z_1(x) > 0$ ,  $z_2(x) < 0$  ( $x \in D_y$ ), így az egyenletnek nincs más folytonos megoldása. Ugyanakkor kielégíti az  $y'$  folytonos függvény is, így  $y'(x) = z_1(x)$  vagy  $y'(x) = z_2(x)$ . Tehát  $y$  kielégíti az

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1} \quad y' = -\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1}$$

( $y > 0$ ,  $c > 0$ ) differenciálegyenletek valamelyikét.

→ Ezek általános megoldása

$$y = c \operatorname{ch} \frac{x - \beta}{c}, \quad x \in (\beta, \infty),$$

illetve

$$y = c \operatorname{ch} \frac{x - \beta}{c}, \quad x \in (-\infty, \beta),$$

és ezek kielégítik (FF-D)-t is, sőt az  $x = \beta$  helyen is.

Ha tehát létezik megoldása a feladatnak, az csak az

$$y(x, c, \beta) \doteq c \operatorname{ch} \frac{x - \beta}{c}, \quad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{R})$$

szerint meghatározott, úgynevezett láncgörbe lehet.

## Feladatsor

1) Adjuk meg az alábbi görbeseregek differenciálegyenletét:

$$y = e^{cx} ; \quad y = (x - c)^3 ; \quad y = cx^3 ; \quad y = \sin(x + c) .$$

2) Oldjuk meg az alábbi szeparábilis differenciálegyenleteket, illetve a rájuk vonatkozó kezdetiérték problémákat:

$$\begin{array}{ll} y' = e^{2x} - x & y' = 2x , \quad y(1) = 4 \\ (x + 1)y' = -xy & (x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0 , \quad y(0) = 1 \\ xyy' = \sqrt{y^2 + 1} & y' = 3\sqrt[3]{y^2} , \quad y(1) = 0 \\ y' - xy^2 = 2xy & xy' + y = y^2 , \quad y(1) = \frac{1}{2} \\ y' = y \cos x & y' = (1 + y^2) \ln x , \quad y(1) = 0 \end{array}$$

3) Oldjuk meg a következő lineáris differenciálegyenleteket:

$$\begin{array}{ll} xy' - 2y = 2x^4 & (2x + 1)y' = 4x + 2y \\ y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sin x} & x(y' - y) = e^x \\ x^2y' + xy + 1 = 0 & y' = 2x(x^2 + y) \\ xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x} & xy' + 2y = \sin(x) \end{array}$$

4) Oldjuk meg a következő egzakt differenciálegyenleteket:

$$\begin{array}{l} (2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0 \\ (2x + y)dx + (x - 2y)dy = 0 \\ \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}y' = 0 \\ \frac{x - y}{(x + y)^3} + \frac{2x}{(x + y)^3}y' = 0 \\ 2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0 \\ e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0 \\ \frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0 \end{array}$$

5) A korábbiakra visszavezetéssel oldjuk meg az alábbi differenciál-egyenleteket:

$$\begin{aligned}
 (x + 2y)dx - xdy &= 0 \\
 (x - y) + (x + y)y' &= 0 \\
 y^2 - 2xy + x^2y' &= 0 \\
 2x^3y' &= y(2x^2 - y^2) \\
 y^2 + x^2y' &= xy' \\
 xy' &= y - xe^{\frac{y}{x}} \\
 xy' - y &= x \operatorname{tg} \frac{y}{x} \\
 xy' &= \sqrt{x^2 - y^2} + y \\
 2x + y + 1 + (4x + 2y - 3)y' &= 0 \\
 x - y - 1 + (y - x + 2)y' &= 0 \\
 2x - 4y + 6 + (x + y - 3)y' &= 0 \\
 (x + 4y)y' &= 2x + 3y - 5 \\
 y' &= 2 \left( \frac{y + 2}{x + y - 1} \right)^2 \\
 (x^2 + y^2 + x)dx + ydy &= 0 \\
 (x^2 + y^2 + y)dx - xdy &= 0 \\
 xy^2(xy' + y) &= 1 \\
 y^2dx - (xy + x^3)dy &= 0 \\
 \left( y - \frac{1}{x} \right) dx + \frac{1}{y} dy &= 0 \\
 xydx &= (y^3 + x^2y + x^2)dy \\
 (2x^2y^2 + y)dx - (x^3y - x)dy &= 0
 \end{aligned}$$

6) Egzisztencia és unicitás tételek Cauchy-feladatokra

- a) Bizonyítsa be, hogy egy teljes metrikus tér bármely zárt altere is teljes metrikus tér.
- b) Legyen  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $T \subset \mathbb{R}^n$  téglá,  $f : [a, b] \times T \rightarrow \mathbb{R}$  ( $f = f_1, \dots, f_n$ ) olyan függvény, hogy  $\forall D_j f_i$  létezik és korlátos  $[a, b] \times T$ -n. Bizonyítsa be, hogy  $f$  Lipschitz feltételt teljesít  $[a, b] \times T$ -n az utolsó  $n$  változójában.
- c) Bizonyítsuk be, hogy a Picard-Lindelöf tétel bizonyításában szereplő  $(X, d) = (C_n^*, d)$  zárt altere a  $C_n(I_1)$  teljes metrikus térnek.
- d) Határozza meg az alábbi Cauchy-feladatok megoldását a Picard-féle szukcesszív approximációval:

$$y' = xy, \quad y(0) = 1; \quad y' = x^2 - y, \quad y(0) = 1.$$

- e) A Picard-féle módszerrel adjunk közelítő megoldásokat az alábbi Cauchy-feladatokra. Becsüljük meg, milyen intervallumon biztosított a megoldás létezése (a közelítés konvergenciája).

$$\begin{aligned} y' &= x - y^2, & y(0) &= 0 & (y_0, y_1, y_2, y_3 \text{ megh.}); \\ y' &= y^2 - 3x^2 - 1, & y(0) &= 1 & (y_0, y_1, y_2 \text{ megh.}); \\ y' &= y + e^y, & y(0) &= 1 & (y_0, y_1, y_2, \text{ megh.}). \end{aligned}$$

(Az első feladatnál becsüljük meg az  $y_3$  közelítés pontosságát is az  $x = 0,5$  és az  $x = 1$  értékeknél.)

- f) Bizonyítsa be, hogy az ( $n$ -KÉP) megoldhatóságának vizsgálatában szereplő speciális (DER-KÉP) problémánál teljesülnek a Picard-Lindelöf tétel feltételei.
- g) Vizsgálja az  $y' = \sqrt{|y|}$  differenciálegyenletre vonatkozó valamilyen Cauchy-feladat megoldhatóságát és a megoldás egyértelműségét.



7) Az alábbi feladatokban vizsgálja meg, hogy a megadott függvények lineárisan függetlenek-e:

- a)  $f_1(x) = x + 2$  ,  $f_2(x) = x - 2$  ( $x \in \mathbb{R}$ );
- b)  $f_1(x) = \sin(x)$  ,  $f_2(x) = \cos(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ );
- c)  $f_1(x) = 1$  ,  $f_2(x) = x$  ,  $f_3(x) = x^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ );
- d)  $f_1(x) = e^x$  ,  $f_2(x) = e^{2x}$  ,  $f_3(x) = e^{3x}$  ( $x \in \mathbb{R}$ );
- e)  $f_1(x) = x$  ,  $f_2(x) = e^x$  ,  $f_3(x) = xe^x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

8) Határozza meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását:

- a)  $(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0$  , ha  $y_1(x) = x$  ismert;
- b)  $y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2(x))y = 0$  , ha  $y_1(x) = \operatorname{tg}(x)$  ismert;
- c)  $y'' - y' \operatorname{tg}(x) + 2y = 0$  , ha  $y_1(x) = \sin(x)$  ismert;
- d)  $xy''' - y'' - xy' + y = 0$  , ha  $y_1(x) = x$  ,  $y_2(x) = e^x$  ismert.

9) Adja meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását:

- a)  $x(x - 1)y'' - xy' + y = 0$  ;
- b)  $xy'' + 2y' - xy = 0$  ;
- c)  $(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 0$  .

10) Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket:

- $y'' + y' - 2y = 0$  ;  $y'' + 4y' + 3y = 0$  ;  $y'' - 2y' = 0$  ;
- $y'' - 4y' + 5y = 0$  ;  $y'' + 2y' + 10y = 0$  ;  $y'' + 4y = 0$  ;
- $y''' - 8y = 0$  ;  $y^{(4)} - y = 0$  ;  $y^{(6)} + 64y = 0$  ;
- $y'' - 2y' + y = 0$  ;  $4y'' + 4y' + y = 0$  ;
- $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y^{(3)} = 0$  ;  $y^{(5)} - 10y^{(3)} + 9y' = 0$  ;
- $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$  ;  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$  ;
- $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$  ;  $y''' - 3y' + 2y = 0$  .

11) Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket:

$$\begin{aligned}
 y'' - 2y' - 3y &= e^{4x}; & y'' + y &= 4xe^x; \\
 y'' - y &= 2e^x - x^2; & y'' + y' - 2y &= 3xe^x; \\
 y'' - 3y' + 2y &= \sin(x); & y'' - 5y' + 4y &= 4x^2e^{2x}; \\
 y'' - 3y' + 2y &= \cos(x); & y'' - 4y' + 8y &= e^{2x} + \sin(2x); \\
 y'' + y &= x \sin(x); & y''' + y' &= \sin(x) + x \cos(x); \\
 y'' + 4y' + 3y &= \operatorname{ch}(x); & y'' - 2y' + y &= \frac{e^x}{x}; \\
 y'' + y &= \frac{1}{\sin(x)}; & y'' + 4y &= 2 \operatorname{tg}(x); \\
 (3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy &= 4 - 12x^2.
 \end{aligned}$$

12) Határozza meg az alábbi Cauchy-feladatok megoldását:

- $y''' - y' = 0$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $y''(0) = 1$ ;
- $y'' - 2y' + y = 0$ ,  $y(2) = 1$ ,  $y'(2) = -2$ ;
- $y'' + y = 4e^x$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = -3$ ;
- $y'' - 2y' = 2e^x$ ,  $y(1) = -1$ ,  $y'(1) = 0$ ;
- $y'' + y = 2x - \pi$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi) = 0$ .

13) Oldja meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszereket:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \begin{cases} y_1' - y_1 + y_2 = 0 \\ y_2' + 4y_1 - y_2 = 0, \end{cases} & \quad \text{b) } \begin{cases} y_1' + y_1 - 8y_2 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 = 0, \end{cases} \\
 \text{c) } \begin{cases} y_1' - y_1 + y_2 - y_3 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 + y_3 = 0 \\ y_3' - 2y_1 + y_2 = 0, \end{cases} & \quad \text{d) } \begin{cases} y_1' - y_2 = e^x \\ y_2' - y_1 = x^2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

14) Feladatok a stabilitáshoz.

- Vizsgáljuk meg, hogy az

$$y'(t) = t - y(t) \quad (t \geq 0)$$

differenciálegyenlet  $x(0) = 1$  feltételt kielégítő  $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  megoldása stabil-e, illetve aszimptotikusan stabil-e.

b) Vizsgáljuk meg az

$$\begin{cases} y_1' = 4y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszer azon

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

megoldásának stabilitását, melyre

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

c) Vizsgáljuk meg az

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 + 2y_1y_2 \\ y_2' = 2y_1 - 3y_2 + 5y_1^4 + y_2^3 \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszerre, hogy az

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(úgynevezett nullmegoldás) stabil-e.

d) Vizsgáljuk meg az

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 - t^2 \\ y_2' = 3y_1 - y_2 - t \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszer azon

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

megoldásának stabilitását, melyre

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$