Lajkó Károly

KALKULUS II. PÉLDATÁR

mobiDIÁK könyvtár

Lajkó Károly

KALKULUS II. PÉLDATÁR

mobiDIÁK könyvtár

SOROZATSZERKESZTŐ

Fazekas István

Lajkó Károly

KALKULUS II. PÉLDATÁR

Programozó és programtervező matematikus
hallgatóknak

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem
Informatikai Intézet

Lektor

Dr. Fazekas István
Dr. Losonczi László

Copyright © Lajkó Károly, 2004

Copyright © elektronikus közlés mobiDIÁK könyvtár, 2004

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem
Informatikai Intézet
4010 Debrecen, Pf. 12
http://mobidiak.inf.unideb.hu

A mű egyéni tanulmányozás céljára szabadon letölthető. Minden egyéb felhasználás csak a szerző előzetes írásbeli engedélyével történhet.
A mű *A mobiDIÁK önszervező mobil portál* (IKTA, OMFB-00373/2003) és a *GNU Iterátor, a legújabb generációs portál szoftver* (ITEM, 50/2003) projektek keretében készült.

Tartalomjegyzék

I. Integrálszámítás 9
1. Primitív függvény, határozatlan integrál 9
2. Riemann-integrál 52
Gyakorló feladatok 85

II. Vektorterek, Euklideszi terek, metrikus terek 89
1. Alapfogalmak 89
2. Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér 92
3. $\mathbb{R}^n$ és metrikus tér topológiája 94
4. További lineáris algebrai előismeretek 97
Gyakorló feladatok 97

III. Sorozatok $\mathbb{R}^k$-ban 99
Gyakorló feladatok 105

IV. Többváltozós és vektorértékű függvények folytonossága, határértéke 107
Gyakorló feladatok 115

V. A Riemann-integrál általánosítása és alkalmazása 117
1. Korlátos változású függvények 117
2. Riemann-Stieltjes integrál 122
3. Görbék, görbementi integrál 125
Gyakorló feladatok 130

VI. Többváltozós függvények differenciálszámítása 131
Gyakorló feladatok 156

VII. Riemann-integrál $\mathbb{R}^n$-ben 159
Gyakorló feladatok 178

VIII. Differenciálegyenletek 181
1. Elemi úton megoldható differenciálegyenlet-típusok 181
2. Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek 203
Gyakorló feladatok 216

I. fejezet
Integrálszámítás

1. Primitív függvény, határozatlan integrál

Alapintegrálok

1.1. feladat. Bizonyítsa be a Kalkulus II. jegyzet I. fejezete 1. paragrafusában az úgynevezett alapintegráloknak nevezett alábbi képleteket (formulákat):

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln(x) + C_1 & (x > 0) \\ \ln(-x) + C_2 & (x < 0) \end{cases}$

b) $\displaystyle\int x^\mu\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \qquad (x \in \mathbb{R}_+,\ \mu \neq -1)$

c) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1)$

d) $\displaystyle\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$

e) $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C \qquad (x \in (-1,1))$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$

h) $\displaystyle\int \operatorname{sh}(x)\,dx = \operatorname{ch}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$

i) $\displaystyle\int \operatorname{ch}(x)\,dx = \operatorname{sh}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsh}(x) + C = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$

k) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arch}(x) + C = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C \qquad (x \in (1,\infty))$

l) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\operatorname{ctg}(x) + C_k \qquad (x \in (k\pi,(k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z})$

m) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \operatorname{tg}(x) + C_k \qquad (x \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}),\ k \in \mathbb{Z})$

n) $\displaystyle\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (x \in (-\varrho,\varrho))$

Megoldás. A bizonyítások minden esetben a határozatlan integrál (primitív függvény) definícióján (a $F\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt a $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény határozatlan integráljának nevezzük, ha $F' = f$ teljesül) és az elemi függvények (Kalkulus I. VIII. fejezetében vizsgált) differenciálási szabályainak ismeretén alapulnak.
Belátjuk, hogy az $a)\dots n)$ képletek jobb oldalán szereplő F függvények deriváltjai a baloldali integrálokban szereplő f függvények.

a) $\exists\ (\ln(x)+C_1)' = \dfrac{1}{x}$, ha $x>0$, míg $(\ln(-x)+C_2)' = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}$, ha $x<0$, így az

$$F(x) = \begin{cases} \ln(x)+C_1 & (x>0) \\ \ln(-x)+C_2 & (x<0) \end{cases} \quad \text{függvényre}$$

$\exists\ F'(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, ami (az integrál definíciója miatt) adja az állítást.

b) A $F(x) = \dfrac{x^\mu+1}{\mu+1} + C \quad (x \in \mathbb{R}_+,\ \mu \neq -1)$ függvényre létezik

$$F'(x) = \frac{1}{\mu+1}(\mu+1)x^\mu = x^\mu \quad \forall\ x \in \mathbb{R}_+ - \text{ra},$$

így igaz az állítás.

c) A $F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (x \in \mathbb{R},\ a>0,\ a \neq 1)$ függvényre

$$\exists\ F'(x) = \frac{1}{\ln a} a^x \ln a = a^x \quad \forall\ x \in \mathbb{R} \text{ esetén},$$

ami adja az állítást.

d) $F(x) = -\cos(x) + C$ $(x \in \mathbb{R})$-re $\exists\ F'(x) = (-1)(-\sin(x)) = \sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, tehát igaz az állítás.

e) , . . . , i) az előbbiekhez hasonlóan bizonyítható.

j) $\exists\ (\operatorname{arsh}(x) + C)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x \in \mathbb{R})$ és

$$\exists\ (\ln(x + \sqrt{x^2+1}))' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x\right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ami adja az állítást.

k) j)-hez hasonlóan bizonyítjuk.

l) és m) is azonnal jön a ctg és tg függvények differenciálási szabályainak ismeretében.

n) A hatványsorok differenciálására vonatkozó tétel miatt az

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (x \in\ ]-\varrho, \varrho\ [)$$

függvény differenciálható és

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (x \in\ ]-\varrho, \varrho\ [),$$

s ez adja az állítást.

Alapintegrálokra visszavezethető feladatok

1.2. feladat. Számítsa ki a következő határozatlan integrálokat:

$$\int (3-x^2)^3\ dx\ ; \qquad \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2\ dx\ ; \qquad \int \frac{x^2}{1+x^2}\ dx\ ;$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}\ dx\ ; \qquad \int \operatorname{tg}^2(x)\ dx\ ; \qquad \int \frac{x+a}{\sqrt{x}}\ dx\ ;$$

Megoldás. Használjuk az alapintegrálokat és a Kalkulus II. jegyzet I/1. fejezet 2. tételét (illetve annak általánosítását több függvényre), miután az integrál jele mögötti f függvényekre egyszerű azonosságokat használunk.

1. $(3-x^2)^3 = 27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6 \quad (x \in \mathbb{R})$ miatt

$$\int (3-x^2)^3 \, dx = \int (27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6) \, dx =$$
$$= 27 \int 1 \, dx - 27 \int x^2 \, dx + 9 \int x^4 \, dx - \int x^6 \, dx + C =$$
$$= 27x - 27 \, \frac{x^3}{3} + 9 \, \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + C \qquad (x \in \mathbb{R}) \; ;$$

2. $\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)^2 = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} + 1 \quad (x \neq 0)$ miatt

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \, dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right) \, dx =$$
$$= \int x^{-2} \, dx - 2 \int \frac{1}{x} \, dx + \int 1 \, dx + C =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{x^{-1}}{-1} - 2\ln(x) + x + C_1 & (x > 0) \\ \dfrac{x^{-1}}{-1} - 2\ln(-x) + x + C_2 & (x < 0) \; . \end{cases}$$

3. $\dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{(x^2+1)-1}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$ miatt

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \, dx = \int 1 \, dx - \int \frac{1}{1+x^2} \, dx + C =$$
$$= x - \operatorname{arctg}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R}) \; ;$$

4. $$\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} = \frac{1}{(x(x \cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}} =$$
$$= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{8}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{8}}} = x^{-\frac{7}{8}} \qquad (x > 0)$$

miatt

$$\int \frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} \, dx = \int x^{-\frac{7}{8}} \, dx = \frac{x^{-\frac{7}{8}+1}}{-\frac{7}{8}+1} + C =$$
$$= \frac{x^{\frac{1}{8}}}{\frac{1}{8}} + C = 8\sqrt[8]{x} + C \qquad (x > 0).$$

5. $\operatorname{tg}^2(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)} - 1$
$\left(x \in \left]k\pi - \frac{\pi}{2},\ k\pi + \frac{\pi}{2}\right[\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right)$ felhasználásával

$$\int \operatorname{tg}^2(x)\ dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - 1\right)\ dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)} - \int 1\ dx + C =$$
$$= \operatorname{tg}(x) - x + C_k \qquad \left(x \in \left]k\pi - \tfrac{\pi}{2},\ k\pi + \tfrac{\pi}{2}\right[\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right).$$

6. $\dfrac{x+a}{\sqrt{x}} = \dfrac{x}{\sqrt{x}} + \dfrac{a}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} + a \cdot x^{-\frac{1}{2}} \quad (x > 0)$ miatt

$$\int \frac{x+a}{\sqrt{x}}\ dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + a \cdot x^{-\frac{1}{2}}\right)\ dx = \int x^{\frac{1}{2}}\ dx + a \int x^{-\frac{1}{2}}\ dx + C =$$
$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + a\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2a\sqrt{x} + C \qquad (x > 0).$$

Egy egyszerű helyettesítés

1.3. feladat. Határozza meg az alábbi integrálokat:

$$\int \frac{1}{\cos^2(3x-5)}\ dx\ ; \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\ dx\ ; \qquad \int \sqrt[3]{1-3x}\ dx\ ;$$
$$\int \frac{1}{2+3x^2}\ dx\ ; \qquad \int \frac{1}{\sqrt{3x^2-2}}\ dx\ ; \qquad \int \left(e^{-x} + e^{2x}\right)\ dx\ ;$$

Megoldás. Egyszerű számolás adja, hogy ha $\int f(x)\ dx = F(x) + C$, akkor $\int f(ax+b)\ dx = \dfrac{1}{a}\ F(ax+b) + C$. Azaz, ha ismerjük $x \to f(x)$ határozatlan integrálját, akkor egyszerűen kapjuk az $x \to f(ax+b)$ függvény határozatlan integrálját.

– Az

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \left(x \in \left]k\pi - \tfrac{\pi}{2},\ k\pi + \tfrac{\pi}{2}\right[\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right)$$

függvényre $F(x) = \operatorname{tg}(x)$ (lásd alapintegrálok), így az

$$f(3x-5) = \frac{1}{\cos^2(3x-5)} \qquad \left(3x-5 \in \left]k\pi - \tfrac{\pi}{2},\ k\pi + \tfrac{\pi}{2}\right[,\ k \in \mathbb{Z}\right)$$

függvény határozatlan integráljára kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\cos^2(3x-5)}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x-5) + C_k \qquad \left(3x-5 \in \left]\, k\pi - \tfrac{\pi}{2},\ k\pi + \tfrac{\pi}{2}\,\right[,\ k \in \mathbb{Z}\right).$$

– Tudjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsh}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$-et előállíthatjuk, mint $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ valamilyen (lineáris) transzformáltja, úgy módszerünk alkalmazható. De

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}}\ ,$$

így

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{3}}\operatorname{arsh}\left(\frac{x}{3}\right) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

miatt

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}}\,dx = \frac{1}{3}\left(3\operatorname{arsh}\left(\frac{x}{3}\right) + C\right) =$$
$$= \operatorname{arsh}\left(\frac{x}{3}\right) + C_1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

– Az $x \to \sqrt[3]{1-3x}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényből az $x \to 1-3x$ $(x \in \mathbb{R})$ változó transzformációval kapjuk. Másrészt

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4} + C =$$
$$= -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4} + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

– Az

$$\frac{1}{2+3x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{3}{2}x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlőség és az $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + C$ alapintegrál miatt

$$\int \frac{1}{2+3x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right) + C\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right) + C_1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

– Az

$$\frac{1}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}} \qquad \left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,x > 1\right)$$

egyenlőség és az $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arch}(x) + C \quad (x > 1)$ alapintegrál (és a módszer) adja, hogy

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)^2-1}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\operatorname{arch}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right) + C\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arch}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right) + C_1 \qquad \left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,x > 1\right).$$

– A c) alapintegrál $a = e$ választással adja, hogy

$$\int e^x \, dx = e^x + C \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$\int e^{-x} \, dx = \frac{1}{-1} \, e^{-x} + C = -e^{-x} + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

és

$$\int e^{-2x} \, dx = \frac{1}{-2} \, e^{-2x} + C \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezek szerint

$$\int (e^{-x} + e^{-2x}) \, dx = \int e^{-x} \, dx + \int e^{-2x} \, dx + C_1 =$$
$$= -e^{-x} - \frac{1}{2} \, e^{-2x} + C_2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Néhány speciális integrandus

1.4. feladat. Határozzuk meg az alábbi határozatlan integrálokat:

$$\int x^2 \sqrt[3]{1 + x^3} \, dx \; ; \qquad \int \operatorname{tg}(x) \, dx \; ; \qquad \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx \; ;$$
$$\int \frac{x}{3 - 2x^2} \, dx \; ; \qquad \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx \; ; \qquad \int \frac{e^x}{2 + e^x} \, dx \; ;$$
$$\int \sin^5 x \cos x \, dx \; ; \qquad \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} \, dx \; ;$$

Megoldás. Egyszerűen belátható, hogy ha $f \colon \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható, akkor

$$\exists \int f^\alpha(x) f'(x) \, dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha + 1} + C \qquad (\alpha \neq -1)$$

és

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln(f(x)) + C \qquad (f(x) > 0).$$

Továbbá (lásd helyettesítéses integrálás tétele), $f \colon \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, $g \colon \langle c, d \rangle \to \langle a, b \rangle$ olyanok, hogy $\exists \; g' \langle c, d \rangle \to \mathbb{R}$ és $\exists \int f$, akkor létezik $\int (f \circ g) g'$ és $\exists \; c \in \mathbb{R}$, hogy

$$\int f(g(x)) g'(x) \, dx = \left(\left(\int f \right) \circ g \right)(x) + C = \int f(t) dt|_{t=g(x)} + C$$

Az egyes integrálok ezen tételek valamelyikével számolhatók.

– Az

$$\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\ dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\ dx =$$
$$= \frac{1}{3}\int 3x^2(1+x^3)^{\frac{1}{3}}\ dx \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlőség mutatja, hogy $f(x) = 1 + x^3$-re $\exists\ f'(x) = 3x^2$, így $\alpha = \dfrac{1}{3}$ mellett alkalmazható az első formula, ezért

$$\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\ dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\ dx = \frac{1}{3}\int (1+x^3)^{\frac{1}{3}} 3x^2\ dx =$$
$$= \frac{1}{3}\frac{(1+x^3)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}} + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

– Mivel

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x} \qquad \left(x \in \left]-\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\right),$$

így $f(x) = \cos x > 0$, ha $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$ és $\exists\ f'(x) = -\sin x$, ezért a második formula szerint:

$$\int \operatorname{tg} x\ dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\ dx =$$
$$= -\ln(\cos(x)) + C_k \qquad \left(x \in \left]-\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\right).$$

– Az

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\ dx \qquad (x \in \left]-1, 1\right[)$$

egyenlőség mutatja, hogy $f(x) = 1 - x^2 \quad (x \in \left]-1, 1\right[)$ esetén létezik $f'(x) = -2x$, így alkalmazható az első formula, ezért:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\ dx = -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$
$$= -\sqrt{1-x^2} + C \qquad (x \in \left]-1, 1\right[).$$

– Hasonlóan, mint korábban:

$$\int \frac{x}{3-2x^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{-4x}{3-2x^2}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{(3-2x^2)'}{3-2x^2}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{4}\ln(3-2x^2) + C \qquad \left(|x| < \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right).$$

– Legyen $x > 0$, akkor $\exists\ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, továbbá $\exists\ \int \sin x\,dx = -\cos x + C$, így a harmadik formula szerint

$$\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx = -\int -\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx =$$
$$= -\int \sin t\,dt\big|_{t=\frac{1}{x}} + C = \cos\frac{1}{x} + C \qquad (x > 0).$$

– Részletezés nélkül:

$$\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx = \int \frac{(2+e^x)'}{e^x}\,dx = \ln(2+e^x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})\ ;$$
$$\int \sin^5(x)\cos(x)\,dx = \int \sin^5(x)(\sin(x))'\,dx =$$
$$= \frac{\sin^6(x)}{6} + C \qquad (x \in \mathbb{R})\ ;$$
$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx = \int \cos^{-\frac{3}{2}}(x)\sin(x)\,dx =$$
$$= -\int \cos^{-\frac{3}{2}}(x)\,(-\sin(x))\,dx =$$
$$= -\int \cos^{-\frac{3}{2}}(x)(\cos(x))'\,dx = -\frac{\cos^{-\frac{1}{2}}(x)}{-\frac{1}{2}} + C_k =$$
$$= 2\sqrt{\cos(x)} + C_k \qquad \left(x \in]-\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right).$$

Helyettesítéses integrálás

1.5. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

$$\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx\ ; \qquad \int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx\ ;$$
$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx\ ; \qquad \int \sqrt{x^2-2}\,dx\ ; \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx\ ;$$

Megoldás. Itt most „igazi" helyettesítésekkel élünk majd, azaz a Kalkulus II. jegyzetben kimondott helyettesítéses integrálás tételét követő megjegyzésben megfogalmazott tételt használjuk:
Ha $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $g\colon \langle c,d\rangle \to \langle a,b\rangle$ olyanok, hogy $\exists\, g'$ és $\int f$, továbbá $\exists\, g^{-1}$, akkor $\exists\ \int (f\circ g)\cdot g'$ és

$$(*)\qquad \int f(x)\,dx = \left(\left(\int (f\circ g)g'\right)\circ g^{-1}\right)(x) + C = \\ = \int f(g(t))g'(t)\,dt|_{t=g^{-1}(x)} + C \quad (x\in\langle c,d\rangle).$$

Ha $\exists\ \int (f\circ g)g'$ és $g'\neq 0$ $]c,d[$-ben, akkor $\exists\ \int f$ és ismét érvényes $(*)$.
Hogy milyen helyettesítést válasszunk, arra nincs általános módszer, de vannak jellegzetes típusok (ahogy erről már az elméletben is szóltunk).

– Az $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$ az $\int R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\,dx$ speciális esete, így az elméleti anyagban tett utalás szerint olyan $x=g(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ helyettesítést alkalmazzunk, melyre $g^{-1}(x)=\sqrt[3]{1-x}=t$ $(x\in\mathbb{R})$, azaz ($\sqrt[3]{1-x}=t \iff 1-x=t^3 \iff x=1-t^3$ $(t\in\mathbb{R})$ miatt) $x=g(t)=1-t^3$ $(t\in\mathbb{R})$.
Ekkor $f(x)=x^2\sqrt[3]{1-x}$ $(x\in\mathbb{R})$, $g(t)=1-t^3$-re $\exists\ g^{-1}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $\exists\ g'(t)=-3t^2\neq 0$ $(t\in\mathbb{R})$, továbbá létezik

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int (1-t^3)^2 t(-3t^2)\,dt = \int [-3t^3+6t^6-3t^9]\,dt = \\ = -3\frac{t^4}{4}+6\frac{t^7}{7}-3\frac{t^{10}}{10}+C \qquad (t\in\mathbb{R})\ ;$$

ezért létezik

$$\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx = \int (1-t^3)^2 t\cdot(-3t^2)\,dt|_{t=\sqrt[3]{1-x}} + C = \\ = -\frac{3}{4}(\sqrt[3]{1-x})^4 + \frac{6}{7}(\sqrt[3]{1-x})^7 - \frac{3}{10}(\sqrt[3]{1-x})^{10} + C \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

– Hasonló gondolatmenettel az $\int \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$ kiszámításánál a $g^{-1}(x)=\sqrt{x}=t$ $(x>0)$, azaz $x=t^2=g(t)$ $(t>0)$ helyettesítésnél: $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ $(x>0)$, $g(t)=t^2$ $(t>0)$-ra $\exists\ g^{-1}$ és

$g'(t) = 2t \neq 0$ $(t > 0)$, továbbá létezik

$$\int f(g(t))g'(t)\ dt = \int \frac{1}{(1+t^2)t}\ 2t\ dt =$$
$$= 2\int \frac{1}{1+t^2}\ dt = 2\operatorname{arctg} t + C \qquad (t > 0),$$

ezért létezik

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\ dx = \int \frac{1}{(1+t^2)t}\ 2t\ dt|_{t=\sqrt{x}} + C =$$
$$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C \qquad (x > 0).$$

– $\int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\ dx = \int \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}\ dx$ $(|x| < 1)$ miatt (az elmélet egyik példáján „felbuzdulva") alkalmazzuk az $x = g(t) = \sin t,\ t \in\ ]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[$ helyettesítést. Ekkor g szigorúan monoton növekedő, így
$\exists\, g^{-1}\colon]-1,1[\to \mathbb{R},\ g^{-1}(x) = \arcsin(x),\ g'(t) = \cos t \neq 0\ \left(t \in\ ]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[\ \right)$,
továbbá $f(x) = \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$ $(x \in\ ]-1,1[\ )$ mellett

$$\exists \int f(g(t))g'(t)\ dt = \int \frac{1}{\cos^3 t}\cdot \cos t\ dt = \int \frac{1}{\cos^2 t}\ dt =$$
$$= \operatorname{tg} t + C, \quad t \in\ \left]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[\ .$$

Így létezik

$$\int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\ dx = \int \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}\ dx = \int \frac{1}{\cos^3 t}\cos t\ dt|_{t=\arcsin x} + C =$$
$$= \operatorname{tg}(\arcsin x) + C = \frac{\sin(\arcsin x)}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} + C =$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C \qquad (|x| < 1).$$

– Az $\int \sqrt{1+x^2}\ dx$ kiszámításánál (de általában, ha $\int R(x,\ \sqrt{1+x^2})\ dx$ típusú integrál szerepel) eredményt hoz az $x = g(t) = \operatorname{sh}(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ helyettesítés.
Ekkor a sh függvény szigorú monotonitása miatt $\exists\ g^{-1}(x) = \operatorname{arsh}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ és $\exists\ g'(t) = \operatorname{ch}(t) \neq 0$ $(t \in \mathbb{R})$.
Felhasználva a $\operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1$ és $\operatorname{ch}^2(t) = \frac{1+\operatorname{ch}(2t)}{2}$ $(t \in \mathbb{R})$ azonosságokat a hiperbolikusz függvényekre, kapjuk, hogy

$f(x) = \sqrt{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ esetén létezik

$$\begin{aligned}\int f(g(t))g'(t)\ dt &= \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2(t)}\operatorname{ch}(t)\ dt = \\ &= \int \operatorname{ch}^2(t)\ dt = \int \frac{1+\operatorname{ch}(2t)}{2}\ dt = \\ &= \frac{1}{2}\int 1\ dt + \frac{1}{2}\int \operatorname{ch}(2t)\ dt + C = \\ &= \frac{1}{2}\ t + \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2t) + C \qquad (t \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Ezért létezik

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\ dx &= \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2(t)}\operatorname{ch}(t)\ dt|_{t=\operatorname{arsh}(x)} + C = \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arsh}(x) + \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2\operatorname{arsh}(x)) + C = \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arsh}(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(x))\operatorname{ch}(\operatorname{arsh}(x)) + C = \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arsh}(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C \qquad (x \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

– Az $\int \sqrt{x^2-2}\ dx$ kiszámításánál, felhasználva, hogy

$$\int \sqrt{x^2-2}\ dx = \int \sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1}\ dx \qquad (\text{ha pl. } x \geq \sqrt{2})$$

és tudva a hiperbolikusz függvények $\operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1$ azonosságát, melyből $\operatorname{sh}^2(t) = \operatorname{ch}^2(t) - 1$ következik, az $x = \sqrt{2}\operatorname{ch}(t) = g(t)$ $(t \geq 0)$ helyettesítésben bízunk.
Ekkor (mivel a ch függvény szigorúan monoton növekedő $[0,\ +\infty[$-en) $\exists\ g^{-1}(x) = \operatorname{arch}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ $(x \geq \sqrt{2})$, $\exists\ g'(t) = \sqrt{2}\operatorname{sh}(t)$ $(t \geq 0)$ és $g'(t) \neq 0$ $(t > 0)$, továbbá $f(x) = \sqrt{x^2-2}$ $(x \geq \sqrt{2})$ mellett létezik

$$\begin{aligned}\int f(g(t))g'(t)\ dt &= \int \sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch}^2(t)-1}\ \operatorname{sh}(t)\ dt = \\ &= \sqrt{2}\int \operatorname{sh}^2(t)\ dt = \sqrt{2}\int \frac{\operatorname{ch}(2t)-1}{2}\ dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{sh}(2t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\ t + C_1 \qquad (t \geq 0).\end{aligned}$$

Ezért (a helyettesítéses integrálás tételének $(*)$ formulája szerint) létezik

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-2}\,dx &= \int \sqrt{2}\,\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2-1}\,dx = \\
&= \sqrt{2}\int \sqrt{\operatorname{ch}^2(t)-1}\ \operatorname{sh}(t)\ dt|_{t=\operatorname{arch}\frac{x}{\sqrt{2}}} + C_1 = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{sh}\left(2\operatorname{arch}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arch}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_1 = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh}\left(\operatorname{arch}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)\operatorname{ch}\left(\operatorname{arch}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) - \\
&- \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arch}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_1 = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arsh}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_1 = \\
&= \frac{x}{2\sqrt{2}}\ \sqrt{x^2-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arsh}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_1 \qquad (x \geq \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\int \sqrt{x^2-2}\,dx = \frac{x}{2\sqrt{2}}\ \sqrt{x^2-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arsh}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_2 \qquad (x \leq -\sqrt{2}).$$

– Az $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ $(x \in \mathbb{R})$ meghatározásánál (de általában, ha $\int R(e^x)\,dx$ típusú integrál van) eredményre vezet az $e^x = g^{-1}(x) = t$ $(x \in \mathbb{R})$, azaz $x = \ln(t) = g(t)$ $(t > 0)$ helyettesítés. Ekkor $\exists\ g'(t) = \frac{1}{t} \neq 0$ $(t > 0)$ és $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ mellett létezik

$$\int f(g(t))g'(t)\ dt = \int \frac{t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\ dt = \operatorname{arctg}(t) + C \qquad (t > 0),$$

így létezik

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\ dt|_{t=e^x} + C = \operatorname{arctg}(e^x) + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Parciális integrálás

1.6. feladat. Határozza meg az alábbi integrálokat:

$$\int \ln x \; dx \; ; \qquad \int (x^2+2x)\ln x \; dx \; ; \qquad \int (x-1)e^x \; dx \; ; \qquad \int x^2 e^{-2x} \; dx \; ;$$

$$\int x\cos(x) \; dx \; ; \qquad \int (x^2+x)\operatorname{ch}(x) \; dx \; ; \qquad \int x^2 \sin 2x \; dx \; ; \qquad \int \operatorname{arctg} x \; dx \; ;$$

$$\int \arcsin x \; dx \; ; \qquad \int x \operatorname{arctg} x \; dx \; ; \qquad \int e^{2x}\cos 3x \; dx \; ; \qquad \int \sin^4(x) \; dx \; ;$$

Megoldás. A parciális integrálás tétele szerint:
Ha az $f, g\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók $\langle a,b\rangle$-n és $\exists \int f'g$, akkor $\exists \int fg'$ is és $\exists\, C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\text{(P)} \qquad \int f(x)g'(x) \; dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \; dx + C \qquad (x \in \langle a,b\rangle).$$

A feladatban szereplő integrálok többsége a Kalkulus II. jegyzetben az előbb idézett tételt követő megjegyzésben szereplő típusok valamelyike.

– $\int \ln x \; dx = \int 1 \cdot \ln x \; dx \;\; (x>0)$ igaz.
Válasszuk az $f(x) = \ln x$ és $g(x) = x$ $(x>0)$ függvényeket, akkor $\exists\, f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $g'(x) = 1$, továbbá létezik

$$\int f'(x)g(x) \; dx = \int \frac{1}{x}\cdot x \; dx = \int 1 \; dx = x \quad (x>0),$$

így

$$\begin{aligned}\exists \int 1\cdot \ln x \; dx &= \int f(x)g'(x) \; dx = \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \; dx + C = \\ &= x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x \; dx + C = x\ln x - x + C \qquad (x>0).\end{aligned}$$

– Az $\int (x^2+2x)\ln x \; dx$ kiszámításánál tekintsük az $f(x) = \ln x$, $g'(x) = x^2+2x$, azaz $g(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2$ $(x>0)$ függvényeket, akkor $\exists\, f'(x) = \dfrac{1}{x}$ és

$$\begin{aligned}\int f'(x)g(x) \; dx &= \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right) \; dx = \int \left(\frac{x^2}{3}+x\right) \; dx = \\ &= \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} \qquad (x>0).\end{aligned}$$

Ezért (tételünk szerint) létezik $C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\begin{aligned}\int (x^2+2x)\ln x\ dx &= \int f(x)g'(x)\ dx = \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx + C = \\ &= \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\ln x - \left(\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}\right) + C \qquad (x>0).\end{aligned}$$

Megjegyzés. $\int P_n(x)\ln x\ dx$ típusú integrál kiszámításánál mindig az $f(x)=\ln x,\ g'(x)=P_n(x)$ választással használjuk (P)-t.

– Az $\int (x-1)e^x\ dx$ kiszámításánál az $f(x)=x-1,\ g'(x)=e^x$ és így $g(x)=e^x,\ f'(x)=1$ $(x\in\mathbb{R})$ választással alkalmazható (P) és akkor $\exists\ C\in\mathbb{R}$, hogy

$$\begin{aligned}\int (x-1)e^x\ dx &= (x-1)e^x - \int 1\cdot e^x\ dx + C = \\ &= (x-1)e^x - e^x + C = (x-2)e^x + C \qquad (x\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

– $\int x^2e^{-2x}\ dx$ esetében, előbb az $f(x)=x^2,\ g'(x)=e^{-2x}$, $f'(x)=2x,\ g(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}$ $(x\in\mathbb{R})$ mellett – (P)-t használva – kapjuk, hogy $\exists\ C_1\in\mathbb{R}$, hogy

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-2x}\ dx &= x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} - \int 2x\cdot\frac{-e^{-2x}}{2}\ dx + C_1 = \\ &= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int xe^{-2x}\ dx + C_1\ ,\end{aligned}$$

ha létezik $\int xe^{-2x}\ dx$. Ennek meghatározására alkalmazzuk újra (P)-t, $f(x)=x,\ g'(x)=e^{-2x},\ f'(x)=1,\ g(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}$ $(x\in\mathbb{R})$ mellett, akkor $\exists\ C_2\in\mathbb{R}$, hogy

$$\begin{aligned}\int xe^{-2x}\ dx &= x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\ dx + C_2 = \\ &= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\ dx + C_2 = \\ &= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C_2 \qquad (x\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Így

$$\int x^2 e^{-2x}\ dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C_1 + C_2 =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{-2x} + C.$$

Megjegyzés. $\int P_n(x)e^{ax}\ dx$ típusú integrál kiszámításánál $f(x) = P_n(x)$, $g'(x) = e^{ax}$ $(x \in \mathbb{R})$ mellett használjuk (P)-t (esetleg többször is, de akkor más – az előbbiekből kapott – f-fel).

– $\int x\cos(x)\ dx$ kiszámításánál legyen $f(x) = x,\ g'(x) = \cos(x)$, $f'(x) = 1,\ g(x) = \sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor (P)-ből

$$\int x\cos(x)\ dx = x\sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x)\ dx + C =$$
$$= x\sin(x) + \cos(x) + C \quad (x \in \mathbb{R}).$$

– $\int (x^2 + x)\operatorname{ch}(x)\ dx$ esetében kétszer alkalmazzuk a parciális integrálás tételét és (tömör írásmódban) kapjuk, hogy

$$\int (x^2 + x)\operatorname{ch}(x)\ dx = (x^2 + x)\operatorname{sh}(x) - \int (2x+1)\operatorname{sh}(x)\ dx + C_1 =$$
$$= (x^2 + x)\operatorname{sh}(x) - \left[(2x+1)\operatorname{ch}(x) - \int 2\operatorname{ch}(x)\ dx + C_2\right] + C_1 =$$
$$= (x^2 + x)\operatorname{sh}(x) - (2x+1)\operatorname{ch}(x) + 2\operatorname{sh}(x) + C_1 + C_2 =$$
$$= (x^2 + x + 2)\operatorname{sh}(x) - (2x+1)\operatorname{ch}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés. Az $\int P_n(x)\sin(ax+b)\ dx$, $\int P_n(x)\cos(ax+b)\ dx$, $\int P_n(x)\operatorname{sh}(ax+b)\ dx$, $\int P_n(x)\operatorname{ch}(ax+b)\ dx$ típusú integrálok kiszámításánál az $f(x) = P_n(x)$ (és $g'(x)$ a másik tényező) mellett alkalmazzuk (P)-t (esetleg többször).

– Így

$$\int x^2 \sin 2x\ dx = x^2\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \int 2x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\ dx + C_1 =$$
$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x\cos 2x\ dx + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \left[x\frac{1}{2}\sin 2x - \int 1\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\ dx + C_2\right] + C_1 =$$
$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C_1 + C_2 =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\right)\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + C \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

– $$\int \operatorname{arctg}(x)\ dx = \int 1\cdot\operatorname{arctg}(x)\ dx = x\operatorname{arctg}(x) - \int x\frac{1}{1+x^2}\ dx + C =$$

$$= x\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\ dx + C =$$
$$= x\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

– $$\int \arcsin(x)\ dx = \int 1\cdot\arcsin(x)\ dx = x\arcsin(x) - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx + C =$$

$$= x\arcsin(x) + \frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\ dx + C =$$
$$= x\arcsin(x) + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$
$$= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

– $$\int x\operatorname{arctg}(x)\ dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x) - \int\frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}\ dx + C =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\ dx + C =$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\left[\int 1\ dx - \int\frac{1}{1+x^2}\ dx\right] + C =$$
$$= \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}x + C \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Megjegyzés. Az $\int P_n(x)\arcsin(x)\ dx$, $\int P_n(x)\arccos(x)\ dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arctg}(x)\ dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arcctg}(x)\ dx$ típusú integráloknál a $g'(x) = P_n(x)$ és $f(x)$ a másik tényező jelölés mellett alkalmazzuk (P)-t.

– A parciális integrálás tételét (a (P) formulával) felhasználva, $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \cos 3x$ $(x \in \mathbb{R})$ választással

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx = e^{2x} \frac{\sin 3x}{3} - \int 2e^{2x} \frac{\sin 3x}{3} \, dx + C_1 =$$
$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x \, dx + C_1 =$$
$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \left[e^{2x} \frac{-\cos x}{3} - \int 2e^{2x} \frac{-\cos 3x}{3} \, dx + C_2 \right] + C_1 =$$
$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cos 3x - \frac{4}{9} \int e^{2x} \cos 3x \, dx + C_1 - \frac{2}{3} C_2$$

$(x \in \mathbb{R})$ következik, ami rendezés után adja, hogy

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx = \left[\frac{3}{13} \sin 3x + \frac{2}{13} \cos 3x \right] e^{2x} + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés. A fenti módszer alkalmazható általában az $\int e^{ax} \sin bx \, dx$, $\int e^{ax} \cos bx \, dx$ típusú integrálok esetén is.

– $$\int \sin^n(x) \, dx = \int \sin(x) \sin^{n-1}(x) \, dx =$$
$$= -\cos(x) \sin^{n-1}(x) - \int -\cos(x)(n-1) \sin^{n-2}(x) \cos(x) \, dx + C_1 =$$
$$= -\cos(x) \sin^{n-1}(x) + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2}(x) \, dx + C_1 =$$
$$= -\cos(x) \sin^{n-1}(x) + (n-1) \int (1 - \sin^2(x)) \sin^{n-2}(x) \, dx + C_1 =$$
$$= -\cos(x) \sin^{n-1}(x) + (n-1) \int \sin^{n-2}(x) \, dx -$$
$$- (n-1) \int \sin^n(x) \, dx + C_1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

és ebből rendezéssel kapjuk, hogy

$$\int \sin^n(x) \, dx =$$
$$= -\frac{1}{n} \cos(x) \sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) \, dx + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ez az $I_n = \int \sin^n(x) \, dx$ jelöléssel az

$$I_n = -\frac{1}{n} \cos(x) \sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} I_{n-2} + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

úgynevezett rekurzív formulát adja I_n-re.
Ha például $n = 2$, úgy

$$\int \sin^2(x)\ dx = -\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x + C.$$

Ha $n = 3$, úgy

$$\int \sin^3(x)\ dx = -\frac{1}{3}\cos(x)\sin^2(x) + \frac{2}{3}\int \sin(x)\ dx + C =$$
$$= -\frac{1}{3}\cos(x)\sin^2(x) - \frac{2}{3}\cos(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Általában $n-1$ lépésben ($n \geq 2$) megkapjuk I_n-t.

Megjegyzés. Hasonló eljárással megadható $I_n = \int \cos^n(x)\ dx$ rekurzív formulája is.

Trigonometrikus és hiperbólikusz függvényekre vonatkozó azonosságok felhasználása

1.7. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

$$\int \frac{1}{1+\cos(x)}\ dx\ ; \quad \int \frac{1}{1-\cos(x)}\ dx\ ; \quad \int \frac{1}{\sin(x)}\ dx\ ; \quad \int \frac{1}{\cos(x)}\ dx\ ;$$
$$\int \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}\ dx\ ; \quad \int \sin 3x \sin 5x\ dx\ ; \quad \int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\ dx\ ;$$
$$\int \sin^3(x)\ dx\ ; \quad \int \sin^4(x)\ dx\ ; \quad \int \mathrm{ctg}^2(x)\ dx\ .$$

Megoldás.

– A $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ egyenlőségből $\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$ következik, ami adja, hogy $\dfrac{1}{1+\cos x} = \dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}$, ha $x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ezért

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\ dx = \int \frac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\ dx =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + C = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + C_k$$

ha $x \in\ ]-\pi + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi[\ ,\ k \in \mathbb{Z}$.

– A $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ egyenlőség adja, hogy $\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2}$, azaz $\dfrac{1}{1-\cos x} = \dfrac{1}{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}$, ha $x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Így

$$\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1}{2\sin^2 \frac{x}{2}}\,dx = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C_k$$
$$(x \in \,]2k\pi,\ 2k+2\pi[\ ,\ k \in \mathbb{Z})\,.$$

– Mivel

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} =$$
$$= \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}} + \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},$$

így

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}\,dx + \int \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx + C =$$
$$= -\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right) + \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) + C = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C_k,$$

ha például $x \in \,]2k\pi,\ (2k+1)\pi[\ ,\ k \in \mathbb{Z}$.
Belátható, hogy

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2}\right)\right) + D_k \quad (x \in \,](2k-1)\pi,\ 2k\pi[\ ,\ k \in \mathbb{Z}).$$

– Az $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$ $\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$ egyenlőség miatt

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\,dx = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right) + C_k =$$
$$= \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) + C_k\ ,$$

ha $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\in\,]2k\pi,\ (2k+1)\pi[\ ,\ k\in\mathbb{Z}$, míg

$$\int\frac{1}{\cos x}\,dx=\ln\Big(\operatorname{tg}\Big(-\Big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big)\Big)+D_k,$$

ha $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\in\,](2k+1)\pi,\ (2k+2)\pi[\ ,\ k\in\mathbb{Z}$.

– Az

$$\frac{1}{\operatorname{sh}x}=\frac{1}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}=\frac{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}-\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}=$$
$$=\frac{\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}}-\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{2\operatorname{ch}\frac{x}{2}}\qquad(x\neq0)$$

azonosság miatt

$$\int\frac{1}{\operatorname{sh}x}\,dx=\int\frac{\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}}\,dx-\int\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{2\operatorname{ch}\frac{x}{2}}\,dx+C=$$
$$=\ln\Big(2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\Big)-\ln\Big(2\operatorname{ch}\frac{x}{2}\Big)+C=$$
$$=\ln\Big(\operatorname{th}\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big)+C_1\qquad(x>0),$$

illetve

$$\int\frac{1}{\operatorname{sh}x}\,dx=\ln\Big(\operatorname{th}\Big(-\frac{x}{2}\Big)\Big)+C_2\qquad(x<0)$$

következik.

– Az ismert $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$ trigonometrikus azonosság miatt

$$\sin3x\sin5x=\frac{1}{2}[\cos2x-\cos8x]\qquad(x\in\mathbb{R}),$$

így

$$\int\sin3x\sin5x\ dx=\int\frac{1}{2}(\cos2x-\cos8x)\ dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\cos2x-\frac{1}{2}\int\cos8x\ dx+C=$$
$$=\frac{1}{4}\sin2x-\frac{1}{16}\sin8x+C\qquad(x\in\mathbb{R}).$$

– Tudjuk, hogy $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ $\forall\ \alpha,\ \beta$-ra, így

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{3}\right)\right] = \\ = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{6}+\cos\frac{x}{6}\right] \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

ez pedig adja, hogy

$$\int\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\ dx = \frac{1}{2}\int\cos\frac{5x}{6}\ dx + \frac{1}{2}\int\cos\frac{x}{6}\ dx + C = \\ = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{5}{6}x}{\frac{5}{6}} + \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{x}{6}}{\frac{1}{6}} + C = \\ = \frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x + 3\sin\frac{x}{6} + C \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

– A

$$\sin^3 x = \sin^2 x\sin x = (1-\cos^2 x)\sin x = \sin x - \cos^2 x\sin x$$

trigonometrikus azonosság miatt

$$\int\sin^3 x\ dx = \int\sin x\ dx + \int\cos^2 x(-\sin x)\ dx + C = \\ = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

– A

$$\sin^4 x = \sin^2 x(1-\cos^2 x) = \sin^2 x - \frac{1}{4}\sin^2 2x = \\ = \frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{1}{4}\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{8}\cos 4x \qquad (x\in\mathbb{R})$$

azonosság miatt

$$\int\sin^4 x\ dx = \frac{3}{8}\int 1\ dx - \frac{1}{2}\int\cos 2x\ dx - \frac{1}{8}\int\cos 4x\ dx + C = \\ = \frac{3}{8}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{8}\frac{\sin 4x}{4} + C = \\ = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{32}\sin 4x + C \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Megjegyzés. Az utóbbi két feladat az $\int\sin^4 x\ dx$ speciális eseteként is számítható (amit a parciális integrálásnál vizsgáltunk).

Racionális (tört)függvények integrálása

Legyenek $P_n,\ Q_m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-, illetve m-edfokú polinomok, $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ olyan intervallum, melyben Q_m nem zérus.
Az $R\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ függvényt racionális (tört)függvénynek nevezzük.
Bizonyítható, hogy ha $n \geq m$, akkor léteznek P_{n-m} és P_l ($n - m$ illetve $l(< m)$-edfokú) polinomok, hogy

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{P_l(x)}{Q_m(x)}$$

$\forall\ x \in \langle a, b\rangle$-re.
Legyen továbbá a Q_m polinom ($\mathbb{R}$ feletti úgynevezett irreducibilis tényezőkre való) felbontása

$$Q_m(x) = A(x - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s},$$

ahol A Q_m főegyütthatója, $i = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, s$ esetén
$a_i, p_j, q_j \in \mathbb{R},\ \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}$ és $p_j^2 - 4q_j < 0$ (azaz $x^2 + p_jx + q_j$ nem bontható fel valós elsőfokú polinomok szorzatára).
Ekkor léteznek $A_{ik},\ B_{jl},\ C_{jl} \in \mathbb{R}$, hogy

$$\begin{aligned}\frac{P_l(x)}{Q_m(x)} = {} & \frac{A_{11}}{x - a_1} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + \cdots + \frac{A_{r1}}{x - a_r} + \cdots + \frac{A_{r\alpha_r}}{(x - a_r)^{\alpha_r}} + \\ & + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \cdots + \frac{B_{1\beta_1}x + C_{1\beta_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}} + \\ & + \cdots + \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{x^2 + p_sx + q_s} + \cdots + \frac{B_{s\beta_s}x + C_{s\beta_s}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}}\end{aligned}$$

$\forall\ x \in \langle a, b\rangle$ esetén.
Így egy racionális törtfüggvény $\int \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$ határozatlan integráljának meghatározása visszavezethető egy $n-m$-edfokú polinom, illetve az $\int \dfrac{A}{(x - a)^i}\,dx$ és $\int \dfrac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^j}\,dx$ típusú integrálok meghatározására.
A feladatban mindig megadjuk a racionális (tört)függvény fenti előállítását (meghatározva P_{n-m}-et és a törtekben szereplő együtthatókat is).

1.8. feladat. Határozza meg adott $A, B, C \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{R}$ $(p^2 - 4q < 0)$, $i, j \in \mathbb{N}$ esetén az

$$\int \frac{A}{(x-a)^i}\, dx \qquad \text{és} \qquad \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}\, dx$$

integrálokat.

Megoldás.

a) Nyilvánvaló, hogy
$i = 1$ esetén

$$\int \frac{A}{x-a}\, dx = \begin{cases} A\ln(x-a) + C_1 & , \text{ ha } x > a \\ A\ln(-(x-a)) + C_2 & , \text{ ha } x < a\ . \end{cases}$$

$i > 1$ esetén

$$\int \frac{A}{(x-a)^i}\, dx = \begin{cases} A\dfrac{(x-a)^{-i+1}}{-i+1} + C_1 & , \text{ ha } x > a \\ A\dfrac{(x-a)^{-i+1}}{-i+1} + C_2 & , \text{ ha } x < a\ . \end{cases}$$

(Lásd „Egy egyszerű helyettesítés” című fejezet.)

b) $$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j} = \frac{Bx+C}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right]^j} = \frac{Bx+C}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + b^2\right]^j} =$$

$$= \frac{Bx+C}{b^{2j}\left[\left(\dfrac{x+\frac{p}{2}}{b}\right)^2 + 1\right]^j} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

miatt (ahol $q - \dfrac{p^2}{4} = \dfrac{4q-p^2}{4} > 0$ miatt vezetjük be, hogy $b^2 = q - \dfrac{p^2}{4}$), az $x = bt - \dfrac{p}{2} = g(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ illetve $g^{-1}(x) = \dfrac{x+\frac{p}{2}}{b} = t$ $(x \in \mathbb{R})$ helyettesítéssel kapjuk (a helyettesítéses integrálás tétele szerint), $\exists\, C_1$,

hogy

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}\,dx = \int \frac{B\left(bt-\frac{p}{2}\right)+C}{b^{2j}(t^2+1)^j}\,b\,dt\Big|_{t=\frac{x+\frac{p}{2}}{b}} + C_1 =$$

$$= \frac{B}{b^{2(j-1)}2}\int \frac{2t}{(t^2+1)^j}\,dt\Big|_{t=\frac{x+\frac{p}{2}}{b}} +$$

$$+ \frac{C-B\frac{p}{2}}{b^{2j-1}}\int \frac{1}{(t^2+1)^j}\,dt\Big|_{t=\frac{x+\frac{p}{2}}{b}} + C_1$$

Ha $j=1$, úgy ebből

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx = \frac{B}{b^{2(j-1)}2}\ln\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{b}\right)^2+1\right) +$$

$$+ \frac{C-B\frac{p}{2}}{b^{2j-1}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{b}\right) + C_2$$

következik $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén.
Ha $j>1$, úgy

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}\,dx = \frac{B}{b^{2(j-1)2}}\frac{(t^2+1)^{-j+1}}{-j+1}\Big|_{t=\frac{x+\frac{p}{2}}{b}} +$$

$$+ \frac{C-B\frac{p}{2}}{b^{2j-1}}\int \frac{1}{(t^2+1)^j}\,dt\Big|_{t=\frac{x+\frac{p}{2}}{b}} + C_3$$

következik.
Ugyanakkor a parciális integrálás tételét felhasználva

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^j}\,dt = \int \frac{(t^2+1)-t^2}{(t^2+1)^j}\,dt = \int \frac{1}{(t^2+1)^{j-1}}\,dt -$$
$$-\frac{1}{2}\int t\frac{2t}{(t^2+1)^j}\,dt = \int \frac{1}{(t^2+1)^{j-1}}\,dt -$$
$$-\frac{1}{2}\left[t\frac{(t^2+1)^{-j+1}}{-j+1} - \int 1\cdot\frac{(t^2+1)^{-j+1}}{-j+1}\,dt\right] + C_4 =$$
$$= \frac{2j-3}{2j-2}\int \frac{1}{(t^2+1)^{j-1}}\,dt + \frac{1}{2(j-1)}\frac{t}{(t^2+1)^{j-1}} + C_4.$$

Ezért, ha $j > 1$, akkor

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}\,dx = \left[\frac{B}{b^{2(j-1)}2(1-j)} + \frac{C-B\frac{p}{2}}{b^{2j-1}2(j-1)}t\right]\frac{1}{(t^2+1)^{j-1}}\Big|_{t=x+\frac{p}{2}} +$$
$$+\frac{C-B\frac{p}{2}}{b^{2j-1}}\frac{2j-3}{2j-2}\int \frac{1}{(t^2+1)^{j-1}}\,dt\Big|_{t=x+\frac{p}{2}} + C_5.$$

Ha $\int \frac{1}{(t^2+1)^{j-1}}\,dt$-re az előbbi módszert alkalmazzuk, illetve azt tovább folytatjuk, úgy integrálunk véges (j) lépésben meghatározható.

Megjegyzés. Természetesen (a megjegyezhetőség nehézségei miatt) nem ezen bonyolult formulákat használjuk, hanem minden konkrét feladatban ugyanezt az eljárást követjük majd.

1.9. feladat. Határozza meg az alábbi integrálokat:

$$\int \frac{2}{x+3}\,dx\ ; \qquad \int \frac{5}{(x+1)^2}\,dx\ ; \qquad \int \frac{x^2}{x+1}\,dx\ ;$$
$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx\ ; \qquad \int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx\ ; \qquad \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx\ ;$$
$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx\ ; \qquad \int \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx\ ;$$
$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx\ .$$

Megoldás.

– $\int \frac{2}{x+3}\,dx = 2\int \frac{1}{x+3}\,dx = \begin{cases} 2\ln(x+3)+C_1 & \text{, ha } x > -3 \\ 2\ln(-(x+3))+C_2 & \text{, ha } x < -3 \end{cases}$

(az 1.8. feladat a) esetének megfelelően).

– $\int \frac{5}{(x+1)^2}\,dx = 5\int (x+1)^{-2}\,dx =$

$$= \begin{cases} \frac{5(x+1)^{-1}}{-1} + C_1 & \text{, ha } x > -1 \\ \frac{5(x+1)^{-1}}{-1} + C_2 & \text{, ha } x < -1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-5}{x+1} + C_1 & \text{, ha } x > -1 \\ \frac{-5}{x+1} + C_2 & \text{, ha } x < -1\ . \end{cases}$$

– $\frac{x^2}{x+1} = \frac{(x^2-1)+1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1} \quad (x \neq 1)$ miatt

$$\int \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int (x-1)\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) + C_1 & \text{, ha } x > -1 \\ \frac{x^2}{2} - x + \ln(-(x+1)) + C_2 & \text{, ha } x < -1\ . \end{cases}$$

– $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{(x-2)+(x+5)}{(x-2)(x+5)} = \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-2} \quad (x \neq 2,\ x \neq -5)$ miatt

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-2}\right)\,dx =$$

$$= \begin{cases} \ln(-(x+5)) + \ln(-(x-2)) + C_1 & \text{, ha } x < -5\ , \\ \ln(x+5) + \ln(-(x-2)) + C_2 & \text{, ha } x \in\ ]-5, 2[\ , \\ \ln(x+5) + \ln(x-2) + C_3 & \text{, ha } x > 2\ . \end{cases}$$

– Megmutatjuk, hogy $\exists\ A, B, C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \quad (x \neq -1, -2, -3).$$

A jobb oldalon közös nevezőre hozva, és rendezve

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (5A+4B+3C)x + 6A + 3B + 2C}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

következik, ha $x \neq -1, -2, -3$, ami csak akkor teljesülhet, ha

$$x = (A+B+C)x^2 + (5A+4B+3C)x + 6A+3B+2C \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ami csak úgy lehetséges, ha

$$A+B+C=0, \quad 5A+4B+3C=1, \quad 6A+3B+2C=0.$$

Ez egy lineáris egyenletrendszer A, B, C-re, melynek egyértelmű megoldására (nem nehéz számolással)

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{2}{3}, \quad C = \frac{1}{2}$$

következik, így

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{6}\frac{1}{x+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{x+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+3}$$

$(x \neq -1, -2, -3)$, ami adja, hogy

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{6}\ln(-(x+1)) - \frac{2}{3}\ln(-(x+2)) + \frac{1}{2}\ln(-(x+3)) + C_1 & \text{, ha } x < -3\ , \\ \frac{1}{6}\ln(-(x+1)) - \frac{2}{3}\ln(-(x+2)) + \frac{1}{2}\ln(x+3) + C_2 & \text{, ha } x \in\ ]-3,-2[\ , \\ \frac{1}{6}\ln(-(x+1)) - \frac{2}{3}\ln(x+2) + \frac{1}{2}\ln(x+3) + C_3 & \text{, ha } x \in\ ]-2,-1[\ , \\ \frac{1}{6}\ln(x+1) - \frac{2}{3}\ln(x+2) + \frac{1}{2}\ln(x+3) + C_4 & \text{, ha } x > -1\ . \end{cases}$$

– $$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{(x^3-5x^2+6x)+(5x^2-6x+1)}{x^3-5x^2+6x} =$$

$$= 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x(x^2-5x+6)} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} \qquad (x \neq 0, 2, 3)$$

Megmutatjuk, hogy $\exists\ A, B, C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x} \qquad (x \neq 0, 2, 3).$$

A jobb oldalt hasonlóan alakítva, mint az előző feladatban

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B+C)x^2 + (-3A-2B-5C)x + 6C}{x(x-2)(x-3)}$$

következik, ha $x \neq 0, 2, 3$, ami csak akkor igaz, ha

$$A+B+C=5, \qquad -3A-2B-5C=-6, \qquad 6C=1,$$

ami $\iff$ teljesül, ha

$$A = -\frac{21}{6}, \quad B = \frac{52}{6}, \quad C = \frac{1}{6}\ .$$

Az előbbiek miatt, így

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 - \frac{21}{6}\frac{1}{x-2} + \frac{52}{6}\frac{1}{x-3} + \frac{1}{6}\frac{1}{x} \qquad (x \neq 0, 2, 3),$$

ami adja, hogy

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx =$$
$$= \begin{cases} x + \frac{52}{6}\ln(-(x-3)) - \frac{21}{6}\ln(-(x-2)) + \frac{1}{6}\ln(-x) + C_1 & \text{, ha } x < 0\ , \\ x + \frac{52}{6}\ln(-(x-3)) - \frac{21}{6}\ln(-(x-2)) + \frac{1}{6}\ln(x) + C_2 & \text{, ha } x \in\ ]0,2[\ , \\ x + \frac{52}{6}\ln(-(x-3)) - \frac{21}{6}\ln(x-2) + \frac{1}{6}\ln(x) + C_3 & \text{, ha } x \in\ ]2,3[\ , \\ x + \frac{52}{6}\ln(x-3) - \frac{21}{6}\ln(x-2) + \frac{1}{6}\ln(x) + C_4 & \text{, ha } x > 3\ . \end{cases}$$

– Az $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$ az 1.8. feladat b) részének megfelelő integrál $B = 1$, $C = 1$, $p = 1$, $q = 1$ és $j = 1$ mellett, hiszen $p^2 - 4q = 1 - 4 = -3 < 0$.
Az

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\frac{x+1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

azonosság és a $g^{-1}(x) = \dfrac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = t$ $(x \in \mathbb{R})$ illetve

$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{1}{2} = g(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ helyettesítés adja, hogy

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{x+1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}+1}{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt\Big|_{t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)} + C_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt\Big|_{t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)} + \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt\Big|_{t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)} + C_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right] + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C_3 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

– Az $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$ integrál meghatározásához előbb megmutatjuk, hogy $\exists\, A, B, C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad (x \neq -1).$$

A jobboldalt közös nevezőre hozva, rendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+(B+C)x+A+C}{(x+1)(x^2+1)} \qquad (x \neq -1),$$

ami csak úgy lehetséges, ha

$$A+B=0, \quad B+C=0, \quad A+C=1,$$

azaz ha $A = \dfrac{1}{2}$, $\quad B = -\dfrac{1}{2}$, $\quad C = \dfrac{1}{2}$, így

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{-x+1}{x^2+1} \qquad (x \neq -1).$$

Ezért integrálunkban az 1.8. feladatban szereplő mindkét típus előfordul, továbbá a b) típusnál már teljes négyzet a nevező. Ezeket figyelembe

véve:

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) + C_1 & \text{, ha } x > -1\ , \\ \frac{1}{2}\ln(-(x+1)) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) + C_2 & \text{, ha } x < -1\ . \end{cases}$$

– Az

$$x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2(x-1) = (x^2-1)x - 2(x-1) =$$
$$= (x-1)(x^2+x-2) = (x-1)^2(x+2) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlőség miatt

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} \qquad (x \neq 1, -2)$$

és megmutatjuk, hogy $\exists\ A, B, C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} \qquad (x \neq 1, -2),$$

azaz

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{(A+C)x^2 + (A+B-2C)x - 2A + 2B + 2C}{(x-1)^2(x+2)}$$

$(x \neq 1, -2)$, ami csak úgy lehetséges, ha

$$A + C = 0, \quad A + B - 2C = 1, \quad -2A + 2B + 2C = 0,$$

azaz, ha $A = \frac{1}{5},\ B = \frac{2}{5},\ C = -\frac{1}{5}$,
ezért

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{1}{5}\frac{1}{x-1} + \frac{2}{5}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{5}\frac{1}{x+2} \qquad (x \neq 1, -2).$$

Ebből következik, hogy

$$\int \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{2}{5}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+2}\,dx + C =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{5}\ln(-(x-1)) + \frac{2}{5}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} - \frac{1}{5}\ln(-(x+2)) + C_1 & \text{, ha } x < -2\ , \\ \frac{1}{5}\ln(-(x-1)) + \frac{2}{5}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} - \frac{1}{5}\ln(x+2) + C_2 & \text{, ha } x \in\ ]-2, 1[\ , \\ \frac{1}{5}\ln(x-1) + \frac{2}{5}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} - \frac{1}{5}\ln(x+2) + C_3 & \text{, ha } x > 1\ . \end{cases}$$

– Az $\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$ az 1.8. feladat b) részében szereplő integrál speciális esete: $B=3,\ C=2,\ p=2,\ q=2\ p^2-4q=4-8=-4<0$ és $j=2>1$. Így az ott használt módszerrel dolgozhatunk

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \int \frac{3x+2}{[(x+1)^2+1]^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{3(t-1)+2}{(t^2+1)^2}\,dt|_{t=x+1} + C_1 =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2t}{(t^2+1)^2}\,dt|_{t=x+1} - \int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt|_{t=x+1} + C_2 =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{(t^2+1)^{-1}}{-1}\,dt|_{t=x+1} - \int \frac{(t^2+1)-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt|_{t=x+1} + C_2 =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+2} - \int \frac{1}{t^2+1}\,dt|_{t=x+1} + \frac{1}{2}\int t\frac{2t}{(t^2+1)^2}\,dt + C_3 =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+2} - \operatorname{arctg}(x+1) + \frac{1}{2}t\frac{(t^2+1)^{-1}}{-1}|_{t=x+1} -$$

$$-\frac{1}{2}\int 1\cdot\frac{(t^2+1)^{-1}}{-1}\,dt|_{t=x+1} + C_4 =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1) + C_5 \quad (x\in\mathbb{R}).$$

Racionális törtfüggvényre vezető helyettesítések

1.10. feladat. Alkalmas helyettesítéssel vezesse vissza az alábbi integrálokat racionális törtfüggvények integráljára:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-3}{x}}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx\ ; \qquad \int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx\ ;$$

$$\int \sqrt{x^2-6x-7}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}\,dx\ ; \qquad \int \frac{x}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx\ ; \qquad \int \frac{e^x}{1-e^{2x}}\,dx\ ;$$

$$\int \sqrt{e^x-1}\,dx\ .$$

Megoldás. Az első három feladat annak annak speciális esete, amikor egy

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\dots,\ \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

(ahol $R(u_1,\dots,u_{k+1})$ az $u_1,\dots,u_{k+1}$ racionális függvénye) integrált kell meghatározni.
Ekkor mindig eredményre vezet a

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=g^{-1}(x)\ ,\quad g(t)=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}=x$$

helyettesítés (alkalmas intervallumon), ahol n az $n_1,\dots,n_k$ természetes számok legkisebb közös többszöröse.

– A $t=\sqrt{x}=g^{-1}(x),\ x=t^2=g(t)\ (t\geq 0)$ helyettesítésnél $g'(t)=t^2$, így (a helyettesítéses integrálás tétele szerint):

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{1}{1+t}2t\ dt|_{t=\sqrt{x}}+C_1=\\ &=2\int \frac{(t+1)-1}{1+t}\ dt|_{t=\sqrt{x}}+C_1=\\ &=2\int 1\ dt|_{t=\sqrt{x}}-2\int \frac{1}{t+1}\ dt|_{t=\sqrt{x}}+C_2=\\ &=2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C_3 \qquad (x\geq 0).\end{aligned}$$

– A

$$t=\sqrt{\frac{2x-3}{x}}=g^{-1}(x)\quad \left(x\geq \tfrac{3}{2}\right),\qquad x=\frac{3}{2-t^2}=g(t)\quad (t>\sqrt{2})$$

helyettesítéssel, $g'(t)=\dfrac{2t}{(2-t^2)^2}\ \ (t>\sqrt{2})$ mellett

$$\begin{aligned}&\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-3}{x}}\ dx=\int \frac{2-t^2}{3}t\frac{2t}{(2-t^2)^2}\ dt|_{t=\sqrt{\frac{2x-3}{x}}}+C_1=\\ &=\frac{2}{3}\int \frac{t^2}{2-t^2}\ dt|_{t=\sqrt{\frac{2x-3}{x}}}+C_1=\\ &=-\frac{2}{3}\int 1\ dt|_{t=\sqrt{\frac{2x-3}{x}}}-\frac{4}{3}\int \frac{1}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})}|_{t=\sqrt{\frac{2x-3}{x}}}+C_1=\\ &=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x-3}{x}}-\frac{4}{3}\int \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{t-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)\ dt|_{t=\sqrt{\frac{2x-3}{x}}}+C_1=\\ &=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x-3}{x}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left(\sqrt{\frac{2x-3}{x}}-\sqrt{2}\right)+\\ &+\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left(\sqrt{\frac{2x-3}{x}}+\sqrt{2}\right)+C_2 \qquad \left(x>\tfrac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

– A $t = \sqrt[6]{x} = g^{-1}(x)$ $(x \geq 0)$, $x = t^6 = g(t)$ $(t \geq 0)$ helyettesítéssel, $g'(t) = 6t^5$ $(t \geq 0)$ mellett

$$\int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx = \int \frac{1}{t^6(1+2t^3+t^2)} 6t^5\,dt|_{t=\sqrt[6]{x}} + C =$$

$$= \int \frac{6}{t(2t^3+t^2+1)}\,dt|_{t=\sqrt[6]{x}} + C =$$

$$= 6\int \frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+2)}\,dt|_{t=\sqrt[6]{x}} + C =$$

$$= 3\int \frac{1}{t(t+1)\left(\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\right)}\,dt|_{t=\sqrt[6]{x}} + C =$$

$$= 3\int \left[\frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}\right]\,dt|_{t=\sqrt[6]{x}} + C,$$

ahol A, B, C, D a korábban használt módszerrel meghatározhatók, az integrálok pedig az 1.8 feladatbeliek speciális esetei.

A következő három (de az azokat követő is) az $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ speciális esete, ahol $R(u,v)$ az u és v változók racionális függvénye. Ekkor (ahogy az elméletben már jeleztük) a $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t = g^{-1}(x)$ $(x \in\,]-\pi, \pi[\,)$ illetve $x = 2\operatorname{arctg}(t) = g(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ helyettesítés mindig eredményt hoz (racionális törtfüggvény integráljához jutunk), ugyanis ekkor

$$\sin(x) = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

$$\cos(x) = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

és $g'(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$ $(t \in \mathbb{R})$ miatt

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx =$$

$$= \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{2+t^2}\,dt|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$$

adódik és a jobb oldalon az integrandus racionális törtfüggvény. Ezért:

– $$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C =$$

$$= \int \frac{1}{t+1}\,dt|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C =$$

$$= \begin{cases} \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1\right)+C_1 & \text{, ha } \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1>0 \\ \ln\left(-\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1\right)\right)+C_2 & \text{, ha } \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1<0 \end{cases}$$

– $$\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{\dfrac{4t}{1+t^2}-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+5} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+\dfrac{2}{3}t+\dfrac{2}{3}}\,dt|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(t+\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}\,dt|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{3\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}\int \frac{1}{\left(\dfrac{t+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}\right)^2+1}\,dt|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C =$$

$$= \frac{3}{5}\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}\right) + C$$

– $\displaystyle\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,dx =$

$$= \int \frac{1}{\left(2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C =$$

$$= \int \frac{t^2+1}{(t^2+3)t}\,dt|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C =$$

$$= \int \left(\frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+3}\right)\,dt|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C\ ,$$

ami már egyszerűen meghatározható.

– $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx \quad \left(x \neq \frac{\pi}{4},\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

számítható az előbbi módszerrel, de a $g^{-1}(x) = \operatorname{tg} x = t,\ x = \operatorname{arctg} t = g(t)$ helyettesítéssel is. Ekkor $g'(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$, így

$$\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx = \int \frac{1-t}{1+t} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,dt|_{t=\operatorname{tg} x} + C =$$

$$= \int \left(\frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1}\right)\,dt|_{t=\operatorname{tg} x} + C\ ,$$

ami már egyszerűen folytatható.

A következő hat integrál kiszámításánál két módszer is „kínálkozik”.

A) Ezek olyan integrálok, melyek az $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ integrál speciális esetei, így:

(i) ha $a > 0$, akkor a

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t \quad \text{vagy} \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x - t\ ;$$

(ii) ha $c > 0$, akkor a

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c} \quad \text{vagy} \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = tx - \sqrt{c}\ ;$$

(iii) ha $\exists\, x_1 \in \mathbb{R}$, hogy $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$, akkor a

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_1)$$

helyettesítés után racionális törtfüggvényt kell integrálni (természetesen minden esetben megadható az $x = g(t)$ helyettesítő függvény, melynek $t = g^{-1}(x)$ inverzének alakja azonnal látszik).

B) Az

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$$

teljes négyzetté alakítás jelzi a másik lehetséges utat, melynél $\frac{4ac - b^2}{4a} = d^2$, vagy $\frac{4ac - b^2}{4a} = -d^2$ jelöléssel, $\frac{x + \frac{b}{2a}}{d}$ helyére helyettesítünk $\sin t$-t, vagy $\operatorname{sh} t$-t, vagy $\operatorname{ch} t$-t.

– Az $\int x\sqrt{x^2 + x + 1}\, dx$ integrálnál a

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t,$$
$$t = \sqrt{x^2 + x + 1} - x = g^{-1}(x), \qquad x = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t} = g(t)$$

helyettesítés $g'(t) = -2\frac{t^2 - t + 1}{(1 - 2t)^2}$ mellett adja, hogy

$$\int x\sqrt{x^2 + x + 1}\, dx =$$
$$= \int \frac{t^2 - 1}{1 - 2t}\left(\frac{t^2 - 1}{1 - 2t} + t\right)(-2)\frac{t^2 - t + 1}{(1 - 2t)^2}\, dt\Big|_{t=\sqrt{x^2+x+1}-x} + C,$$

ami már egy racionális tört integrálja. Ez persze még elég sok munkával jár.
Másrészt az

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1\right]$$

azonosság, illetve az $\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \operatorname{sh} t$, $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} t - \dfrac{1}{2} = g(t)$ $(t \geq 0)$ helyettesítés adja, hogy

$$\int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} t - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\,dt\Big|_{t=\operatorname{arsh}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} + C =$$

$$= \frac{3}{4}\int\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} t - \frac{1}{2}\right)\operatorname{ch}^2 t\,dt\Big|_{t=\operatorname{arsh}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} + C =$$

$$= \frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\int\operatorname{ch}^2 t\operatorname{sh} t\,dt\Big|_{t=\operatorname{arsh}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} - \frac{3}{8}\int\operatorname{ch}^2 t\,dt\Big|_{t=\operatorname{arsh}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} + C =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{\operatorname{ch}^3 t}{3}\Big|_{t=\operatorname{arsh}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} - \frac{3}{8}\int\frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{arsh}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\operatorname{ch}^3\left(\operatorname{arsh}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) - \frac{3}{16}\operatorname{arsh}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{3}{32}\operatorname{sh}\left(2\operatorname{arsh}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C\ .$$

– Az $\int\sqrt{x^2-6x-7}\,dx$ számításánál a

$$\sqrt{x^2-6x-7} = x+t$$

$$t = \sqrt{x^2-6x-7} - x = g^{-1}(x), \qquad x = -\frac{t^2+7}{2t+6}$$

helyettesítés, $g'(t) = \dfrac{2t^2+12t-14}{(2t+6)^2}$ mellett adja, hogy

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-6x-7}\,dx &= \\ &= \int \left(t - \frac{t^2+7}{2t+6}\right)\frac{2t^2+12t-14}{(2t+6)^2}\,dt\Big|_{t=\sqrt{x^2-6x-7}-x} + C = \\ &= \int \frac{(t^2+6t-7)^2}{(2t+6)^2}\,dt\Big|_{t=\sqrt{x^2-6x-7}-x} + C\ ,\end{aligned}$$

ami viszonylag egyszerűen kezelhető.

Másrészt az $x^2-6x-7 = (x-3)^2-16 = 16\left[\left(\dfrac{x-3}{4}\right)^2 - 1\right]$ azonosság, $\dfrac{x-3}{4} = \operatorname{ch} t$, illetve $x = 4\operatorname{ch} t + 3 = g(t)$ helyettesítés, $g'(t) = 4\operatorname{sh} t$ miatt adja, hogy

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-6x-7}\,dx &= \int 4\sqrt{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 - 1}\,dx = \\ &= 4^2\int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}\operatorname{sh} t\,dt\Big|_{t=\operatorname{arsh}\frac{x-3}{4}} + C = \\ &= 16\int \operatorname{sh}^2 t\,dt\Big|_{t=\operatorname{arsh}\frac{x-3}{4}} + C = \\ &= 16\int \frac{1-\operatorname{ch} 2t}{2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{arsh}\frac{x-3}{4}} + C = \\ &= 8\operatorname{arsh}\frac{x-3}{4} - 4\operatorname{sh}\left(2\operatorname{arsh}\frac{x-3}{4}\right) + C \qquad (x\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

A második módszer most is gyorsabban ad eredményt.

– A

$$\sqrt{1-2x-x^2} = tx-1 \qquad t = \frac{1}{x}(\sqrt{1-2x-x^2}+1) = g^{-1}(x),$$

illetve $x = \dfrac{2t-2}{t^2+1} = g(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ helyettesítés, $g'(t) = \dfrac{-2t^2+4t+2}{(t^2+1)^2}$ adja, hogy

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx = \\
&\quad = \int \frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)}\,dt\Big|_{t=\frac{1}{x}(\sqrt{1-2x-x^2}+1)} + C = \\
&\quad = \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{2}{t^2+1}\right)\,dt\Big|_{t=\frac{1}{x}(\sqrt{1-2x-x^2}+1)} + C = \\
&\quad = \left[-\ln t + \ln(t-1) - 2\operatorname{arctg} t\right]_{t=\frac{1}{x}(\sqrt{1-2x-x^2}+1)} + C\ .
\end{aligned}$$

A másik módon:

$$1-2x-x^2 = 2-(x+1)^2 = 2\left(1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \qquad (|x+1| \le \sqrt{2})$$

és az $\dfrac{x+1}{\sqrt{2}} = \sin t$ $\left(t = \arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$, $x = \sqrt{2}\sin t - 1 = g(t)$, $g'(t) = \sqrt{2}\cos t$ adja, hogy

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{1+\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dx = \\
&= \int \frac{\sqrt{2}\cos t}{1+\sqrt{2}\cos t}\,dt\Big|_{t=\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}} + C
\end{aligned}$$

ami például a $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ helyettesítéssel vihető tovább.

Most a két módszer „nagyjából” egyformán gyors.

– A $\sqrt{x^2+2x+4} = x-t$, azaz $x = \dfrac{t^2-4}{2(t+1)}$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2t+4}{t(t+1)^2}\,dt\Big|_{t=x-\sqrt{x^2+2x+4}} + C = \\
&\quad = \frac{1}{2}\int \left(\frac{4}{t} - \frac{3}{t+1} - \frac{3}{(t+1)^2}\right)\,dt\Big|_{t=x-\sqrt{x^2+2x+4}} + C = \\
&\quad = 2\ln(\sqrt{x^2+2x+4}-x) - \frac{3}{2}\ln(\sqrt{x^2+2x+4}-x-1) + \\
&\qquad + \frac{3}{2}\frac{1}{x-\sqrt{x^2+2x+4}-1} + C\ .
\end{aligned}$$

Próbálja ki a másik módszert is.

– A $\sqrt{7x-10-x^2} = t(x-5)$, azaz $x = \dfrac{5t^2+2}{t^2+1}$ helyettesítéssel

$$\int \frac{x}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}\,dx = -\frac{2}{9}\int \frac{5t^2+2}{t^2}\,dt\Big|_{t=\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-5}} + C =$$
$$= \left[-\frac{10}{9}t + \frac{4}{9t}\right]_{t=\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-5}} + C\ .$$

– $$\int \frac{1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2\sqrt{(x+1)^2+1}}\,dx =$$
$$= \int \frac{1}{\operatorname{sh} t\sqrt{\operatorname{sh}^2 t+1}}\operatorname{ch} t\ dt|_{t=\operatorname{arsh}(x+1)} + C =$$
$$= \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 t}\,dt|_{t=\operatorname{arsh}(x+1)} + C = -\operatorname{cth}[\operatorname{arsh}(x+1)] + C =$$
$$-\frac{\operatorname{ch}[\operatorname{arsh}(x+1)]}{\operatorname{sh}[\operatorname{arsh}(x+1)]} + C = -\frac{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh}(x+1))}}{x+1} + C =$$
$$= -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + C\ .$$

– Az $e^x = t,\ x = \ln t = g(t)\ (t>0)$ helyettesítés, $g'(t) = \dfrac{1}{t}\ (t>0)$ miatt adja, hogy

$$\int \frac{e^x}{1-e^{2x}}\,dx = \int \frac{t}{1-t^2}\cdot\frac{1}{t}\,dt|_{t=e^x} + C =$$
$$= \int \frac{1}{1-t^2}\,dt|_{t=e^x} = -\int\left(\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}\right)dt|_{t=e^x} =$$
$$= -A\ln(e^x-1) + B\ln(e^x+1) + C\ ,$$

ha $x>0$, ahol A és B egyszerűen meghatározható.

– Az $e^x = t,\ x = \ln t = g(t)\ (t>0)$ helyettesítéssel, $g'(t) = \dfrac{1}{t}$-vel

$$\int \sqrt{e^x-1}\,dx = \int \sqrt{t-1}\cdot\frac{1}{t}\,dt|_{t=e^x} + C$$

következik.

A $\sqrt{t-1} = u,\ t = u^2+1 = g(u)\ (u\in\mathbb{R})$ helyettesítés és $g'(u) = 2u$ adja,

hogy

$$\int \frac{\sqrt{t-1}}{t}\,dt = \int \frac{u}{u^2+1} 2u\,du|_{u=\sqrt{t-1}} + C_1 =$$
$$= 2\int \frac{u^2+1-1}{u^2+1}\,du|_{u=\sqrt{t+1}} + C_1 =$$
$$= [2u - 2\operatorname{arctg} u]_{u=\sqrt{t-1}} + C_1 = 2\sqrt{t-1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{t-1} + C_1\ .$$

Így

$$\int \sqrt{e^x-1}\,dx = 2\sqrt{e^x-1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1} + C \quad (x \geq 0).$$

2. Riemann-integrál

A Riemann-integrálhatóság fogalma, a Darboux-tétel következményei

1.11. feladat. Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ egy intervallum. Bizonyítsa be, hogy a $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozata $[a,b]$-nek, ha

a) $P_k = \{x_i^k |\ x_i^k = a + i\dfrac{b-a}{k},\ i = 0,1,2,\ldots,k\}$
(egyenlő részekre osztással kapott felosztássorozat) ;

b) $P_k = \{x_i^k |\ a = x_0^k < x_1^k < \cdots < x_k^k = b\}$, ahol $x_0^k, x_1^k, \ldots, x_k^k$ egy mértani sorozat egymás után következő tagjai.

Megoldás.

a) $\Delta x_i^k = x_i^k - x_{i-1}^k = \dfrac{b-a}{k}$, így $\|P_k\| \doteq \sup\limits_i\{\ \Delta x_i^k,\ i = 0,1,\ldots,k\} = \sup \dfrac{b-a}{k} = \dfrac{b-a}{k}$ és $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{b-a}{k} = 0$, ezért $\lim\limits_{k\to\infty} \|P_k\| = 0$, azaz (definíció szerint) $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozat.

b) Ha k rögzített, úgy (a feltétel miatt) $x_i^k = aq^i$ $(i = 0,1,\ldots,k)$, ahol $q = \sqrt[k]{\dfrac{b}{a}} > 1$ (ami könnyen ellenőrízhető).
Ekkor $\Delta x_i^k = x_i^k - x_{i-1}^k = aq^{i-1}(q-1)$, így $q > 1$ miatt

$$\|P_k\| = \sup_i\{\ aq^{i-1}(q-1),\ i = 0,1,\ldots,k\} = aq^{k-1}(q-1) =$$
$$= a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{k}} \left(\sqrt[k]{\frac{b}{a}} - 1\right)\ .$$

Ugyanakkor (a sorozatokra tanultak szerint)

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{b}{a}} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{k\to\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{b}{a}\sqrt[k]{\frac{b}{a}} = \frac{b}{a},$$

ami adja, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} \|P_k\| = 0$, azaz $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozata $[a,b]$-nek.

1.12. feladat. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Bizonyítsa be, hogy $[a,b]$ $\forall$ $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozatára létezik $\lim\limits_{k\to\infty} s(f,P_k) = \underline{I}$, $\lim\limits_{k\to\infty} S(f,P_k) = \bar{I}$ és $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{O}(f,P_k) = \bar{I} - \underline{I}$.

Megoldás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, akkor a Darboux-tétel miatt $\exists$ $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall$ P-re, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$ $\quad |s(f,P) - \underline{I}| < \varepsilon$, $|S(f,P) - \bar{I}| < \varepsilon$.
Legyen $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozat akkor $\lim\limits_{k\to\infty} \|P_k\| = 0$ miatt $\delta(\varepsilon) > 0$-hoz $\exists$ $N_1(\delta(\varepsilon))$, hogy $\forall$ $k > N_1(\delta(\varepsilon))$ esetén $\|P_k\| < \delta(\varepsilon)$.
Ha tehát $N(\varepsilon) = N_1(\delta(\varepsilon))$, akkor $\forall$ $k > N(\varepsilon)$-ra $\|P_k\| < \delta(\varepsilon)$, így

$$|s(f,P_k) - \underline{I}| < \varepsilon \ , \qquad |S(f,P_k) - \bar{I}| < \varepsilon \ ,$$

ami (a határérték definíciója miatt) adja az első két állítást.
A harmadik $\mathcal{O}(f,P_k) = S(f,P_k) - s(f,P_k)$-ból jön $k \to \infty$ esetén.

1.13. feladat. Bizonyítsa be, hogy az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ függvény Riemann-integrálható és $\int\limits_a^b x^3\,dx = \dfrac{b^4 - a^4}{4}$.

Megoldás. Legyen $\langle P_k \rangle$ a 2.1. feladat a) része szerinti normális felosztássorozata $[a,b]$-nek, azaz

$$P_k = \{\ x_i^k |\ x_i^k = a + i \cdot \frac{b-a}{k},\ i = 0,1,2,\ldots,k\ \}.$$

Függvényünk monoton növekedő, így az $[x_{i-1}^k, x_i^k]$ intervallumhoz tartozó m_i^k illetve M_i^k éppen az intervallum alsó, illetve felső végpontjaiban felvett függvényértékek, azaz

$$m_i^k = \left(a + (i-1)\frac{b-a}{k}\right)^3 \ , \quad M_i^k = \left(a + i \cdot \frac{b-a}{k}\right)^3 \ .$$

Ezért $\Delta x_i^k = \dfrac{b-a}{k}$ miatt

$$s(f,P_k) = \sum_{i=1}^{k} \left(a + (i-1)\frac{b-a}{k}\right)^3 \frac{b-a}{k} \ ,$$
$$S(f,P_k) = \sum_{i=1}^{k} \left(a + i \cdot \frac{b-a}{k}\right)^3 \frac{b-a}{k} \ .$$

Egyszerű számolás adja, hogy

$$\begin{aligned}
&s(f,P_k) = \\
&= \left[ka^3 + \frac{3a^2(b-a)}{k}\sum_{i=1}^{k}(i-1) + \frac{3a(b-a)^2}{k^2}\sum_{i=1}^{k}(i-1)^2 + \frac{(b-a)^3}{k^3}\sum_{i=1}^{k}(i-1)^3\right]\frac{b-a}{k} = \\
&= \left(a^3 + \frac{3}{2}a^2(b-a)\frac{k-1}{k} + \frac{a(b-a)^2}{2}\frac{(k-1)(2k-1)}{k^2} + \frac{(b-a)^3}{4}\frac{(k-1)^2}{k^2}\right)(b-a) \\
&S(f,P_k) = \\
&= \left[ka^3 + \frac{3a^2(b-a)}{k}\sum_{i=1}^{k} i + \frac{3a(b-a)^2}{k^2}\sum_{i=1}^{k} i^2 + \frac{(b-a)^3}{k^3}\sum_{i=1}^{k} i^3\right]\frac{b-a}{k} = \\
&= \left(a^3 + \frac{3}{2}a^2(b-a)\frac{k+1}{k} + \frac{a(b-a)^2}{2}\frac{k(2k+1)}{k^2} + \frac{(b-a)^3}{4}\right)(b-a)
\end{aligned}$$

Így $\underline{I} = \lim\limits_{k\to\infty} s(f,P_k) = \dfrac{b^4-a^4}{4}$, $\bar{I} = \lim\limits_{k\to\infty} S(f,P_k) = \dfrac{b^4-a^4}{4}$ teljesül (ahol felhasználtuk az előző feladatot is), ami adja, hogy $\underline{I} = \bar{I} = \dfrac{b^4-a^4}{4}$, azaz f Riemann-integrálható és teljesül az is, hogy $\int\limits_a^b x^3\,dx = \dfrac{b^4-a^4}{4}$.

Megjegyzések.

1. Ha $\langle P_k \rangle$-nak a 2.1. feladat b) részében vizsgált normális felosztássorozatot választjuk, úgy még egyszerűbben kapjuk feladatunk bizonyítását (ellenőrízzük).
2. Az $f(x) = x^3$ ($x \in [a,b]$) függvény folytonos, ezért Riemann-integrálhatósága a Kalkulus II. jegyzet I.4. fejezet 5. tételéből is következik. Az integrál értékének meghatározása ugyanúgy történik.

A Riemann-integrálhatóság kritériumai, elegendő feltételei, műveleti tulajdonságok

1.14. feladat. Bizonyítsa be, hogy az $f(x) = 2 - x,\ x \in [0,1]$ függvény Riemann-integrálható $[0,1]$-en és $\int\limits_0^1 (2-x)\ dx = \dfrac{3}{2}$.

Megoldás. Az adott függvény Riemann-integrálható $[0,1]$-en, mert monoton csökkenő (ahogy azt már általánosabb lineáris függvények esetén korábban megmutattuk).
Az integrál értéke meghatározható például $\forall\ \langle P_k \rangle$ normális felosztássorozathoz tartozó $s(f, P_k)$ határértékeként.
Legyen rögzített k-ra $P_k = \left\{ x_i^k |\ x_i^k = \dfrac{i}{k},\ i = 0, 1, \ldots, k \right\}$, akkor a 2.1. feladat szerint $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozat.
f monoton csökkenő, így az $[x_{i-1}^k, x_i^k] = \left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right]$ intervallumhoz tartozó $m_i^k = f(x_i^k) = 2 - \dfrac{i}{k},\ \Delta x_i^k = \dfrac{1}{k}$, ezért

$$s(f, P_k) = \sum_{i=1}^{k} \left(2 - \frac{i}{k}\right) \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{2}{k} - \frac{i}{k^2}\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k} i = 2 - \frac{1}{k^2} \frac{k(k+1)}{2} = 2 - \frac{k+1}{2k} \quad (k \in \mathbb{N}) ,$$

ami adja, hogy $I = \lim\limits_{k\to\infty} s(f, P_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \left(2 - \dfrac{k+1}{2k}\right) = \dfrac{3}{2}$.
Ezzel a feladatot megoldottuk.

1.15. feladat. Vizsgálja a következő függvények Riemann-integrálhatóságát, határozza meg a Riemann-integrál értékét (ha létezik):

a) $f(x) = x + 5\ ,\quad x \in [-1, 1]$;

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ ha } x \in [-1, 0[\\ 1 & , \text{ ha } x \in [0, 1] \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \text{ ha } x \in [-1, 0[\cup]0, 1] \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases}$;

d) $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 6\ , \quad x \in [0,2]\ ;$

e) $f(x) = |x+3|\ , \quad x \in [-5,5].$

Megoldás.

a) Az $f(x) = x+5,\ x \in [-1,1]$ függvény folytonos, így Riemann-integrálható $[-1,1]$-en.

Ismeretes, hogy $\int\limits_a^b x\ dx = \dfrac{b^2-a^2}{2}$ és $\int\limits_a^b 5\ dx = 5(b-a)$, ezért $\exists \int\limits_{-1}^{1} x\ dx = 0$ és $\int\limits_{-1}^{1} 5\ dx = 10$.

Így a Riemann-integrál műveleti tulajdonságai (Kalkulus II.I.6.1. tétel) miatt létezik $\int\limits_{-1}^{1} (x+5)\ dx$ és

$$\int\limits_{-1}^{1} (x+5)\ dx = \int\limits_{-1}^{1} x\ dx + \int\limits_{-1}^{1} 5\ dx = 0 + 10 = 10.$$

b) Az

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ,\ \text{ha } x \in [-1,0[\\ 1 & ,\ \text{ha } x \in [0,1] \end{cases}$$

függvény (ahogy ez egyszerűen belátható) monoton növekedő, így a Kalkulus II.I.4.6. tétel miatt Riemann-integrálható $[-1,1]$-en és akkor a $[-1,0]$ és $[0,1]$ intervallumokon is.

Mivel $f(x) = 1$, ha $x \in [0,1]$, így $\int\limits_0^1 f(x)\ dx = \int\limits_0^1 1\ dx = 1$.

Másrészt

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ,\ \text{ha } x \in [-1,0[\\ 1 & ,\ \text{ha } x = 0 \end{cases}\ ,$$

így $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\ dx$ értéke meghatározható $[-1,0]$ tetszőleges $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozatához tartozó $\langle s(f,P_k) \rangle$ határértékeként.

Legyen $\langle P_k \rangle$ olyan, hogy $P_k = \left\{ x_i^k \,|\, x_i^k = -1 + \dfrac{i}{k},\ i = 0,1,\ldots,k \right\}$,

ekkor $m_i^k = -1$ $(i = 1, \dots, k)$, $\Delta x_i^k = \dfrac{1}{k}$, így

$$s(f, P_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1) \frac{1}{k} = -1 \ ,$$

ezért

$$\lim_{k \to \infty} s(f, P_k) = -1 = \int_{-1}^{0} f \ .$$

Most már az integrál intervallum feletti additivitása miatt (lásd Kalkulus II. I.4.8. tétel)

$$\int_{-1}^{1} f(x) \ dx = \int_{-1}^{0} f(x) \ dx + \int_{0}^{1} f(x) \ dx = -1 + 1 = 0 \ .$$

c) Az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \text{ ha } x \in [-1, 0[\ \cup \ ]0, 1] \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény (ahogy ezt már korábban beláttuk) nem korlátos $[-1, 1]$-en, így nem Riemann-integrálható.

d) Az $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 6$, $x \in [0, 2]$ függvény folytonos, így Riemann-integrálható. Másrészt f az $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^2$ és $f_3(x) = 6$ $(x \in [0, 2])$ függvények lineáris kombinációja.
Mivel pedig beláttuk, hogy

$$\int_{a}^{b} x^3 \ dx = \frac{b^4 - a^4}{4}, \quad \int_{a}^{b} x^2 \ dx = \frac{b^3 - a^3}{3} \quad \text{és} \quad \int_{a}^{b} 6 \ dx = 6(b - a),$$

így

$$\int_{0}^{2} x^3 \ dx = \frac{2^4 - 0^4}{4} = 4, \qquad \int_{0}^{2} x^2 \ dx = \frac{2^3 - 0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

és

$$\int_{0}^{2} 6 \ dx = 6(2 - 0) = 12 \ .$$

Végül felhasználva a Kalkulus II. I.6. fejezet 1. tételét:

$$\int_0^2 (5x^3 - 3x^2 + 6)\ dx = 5\int_0^2 x^3 - 3\int_0^2 x^2 + \int_0^2 6\ dx =$$
$$= 20 - 8 + 12 = 24\ .$$

e) Az abszolútérték definíciója miatt

$$f(x) = |x+3| = \begin{cases} -(x+3) & , \text{ ha } x \in [-5,-3] \\ x+3 & , \text{ ha } x \in [-3,5]. \end{cases}$$

f (például az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételt használva) folytonos $[-5,5]$-ben, így Riemann-integrálható $[-5,5]$-on, de akkor a $[-5,-3]$ és $[-3,5]$ intervallumokon is és

$$\int_{-5}^{-3} |x+3|\ dx = \int_{-5}^{-3} -(x+3)\ dx = -\int_{-5}^{-3} x\ dx + \int_{-5}^{-3} 3\ dx =$$
$$= -\frac{(-3)^2 - (-5)^2}{2} + 3(-3-(-5)) = 8 + 6 = 14\ ,$$
$$\int_{-3}^{5} |x+3|\ dx = \int_{-3}^{5} (x+3)\ dx = \int_{-3}^{5} x\ dx + \int_{-3}^{5} 3\ dx =$$
$$= \frac{5^2 - (-3)^2}{2} + 3(5-(-3)) = 8 + 24 = 32\ .$$

Ezért

$$\int_{-5}^{5} |x+3|\ dx = \int_{-5}^{-3} |x+3|\ dx + \int_{-3}^{5} |x+3|\ dx = 46\ .$$

Egyenlőtlenségek, középértéktételek Riemann-integrálra

1.16. feladat. Bizonyítsa be, hogy

a) $$\int_1^2 (3x^2+4)\ dx \geq \int_1^2 (x^2+5)\ dx\ ;$$

b) $$\int_0^\pi (1+\sin x)\ dx \geq 0\ ;$$

c) $$\int_{-2}^2 (x^2+2)\ dx \geq \int_{-2}^2 (x-1)\ dx\ ;$$

d) $$\int_2^4 (x^2-6x+8)\ dx \leq 0\ ;$$

e) $$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}\ dx \leq \frac{1}{3}\ .$$

Megoldás. Az itt szereplő integrálok (a függvények folytonossága miatt) léteznek.

a) $3x^2+4 \geq x^2+5 \iff 2x^2 \geq 1 \iff |x| \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \implies 3x^2+4 \geq x^2+5$, ha $x \geq 1$, így $3x^2+4 \geq x^2+5$, ha $x \in [1,2]$.
Ezért a Kalkulus II. I.7. fejezet (Egyenlőtlenségek, középértéktételek Riemann-integrálra) 1. tétele szerint az integrálok közötti egyenlőtlenség is teljesül.

b) $1+\sin x \geq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, így az előbb idézett tétel szerint

$$\int_0^\pi (1+\sin x)\ dx \geq \int_0^\pi 0\ dx = 0(\pi-0) = 0,$$

amit bizonyítani kellett.

c) $x^2+2 \geq x-1 \iff x^2-x+3 \geq 0 \iff \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{8}{4} \geq 0$, ami $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén igaz, így akkor is, ha $x \in [-2,2]$.
Ebből pedig (újra felhasználva tételünket) jön az egyenlőtlenség a két integrálra.

d) $x^2 - 6x + 8 \leq 0 \iff (x-3)^2 - 1 \leq 0 \iff (x-3)^2 \leq 1 \iff$

$$\iff |x-3| \leq 1 \iff -1 \leq x-3 \leq 1 \iff$$
$$\iff 2 \leq x \leq 4,$$

azaz $x^2 - 6x + 8 \leq 0$, ha $x \in [2,4]$, ami az előbbi tételt használva adja, hogy

$$\int_2^4 (x^2 - 6x + 8)\, dx \leq \int_2^4 0\, dx = 0,$$

s ezt kellett bizonyítani.

e) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} \leq x^2 \iff 1 \leq \sqrt{1+x^4} \iff 1 \leq 1 + x^4 \iff 0 \leq x^4,$
ami $\forall\, x \in \mathbb{R}$-re teljesül, így

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}\, dx \leq \int_0^1 x^2 = \frac{1^3 - 0^3}{3} = \frac{1}{3}\ ,$$

amit bizonyítani kellett.

1.17. feladat. Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{\sqrt{3}}{8} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\, dx \leq \frac{\sqrt{2}}{6}\ .$$

Megoldás. Az

$$f\colon \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

függvény szigorúan monoton csökkenő, mert

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \leq 0 \iff x\cos x - \sin x \leq 0 \iff$$
$$\iff x\cos x \leq \sin x \iff x \leq \operatorname{tg} x$$

ami $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén illetve a $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén is igaz.
Ezért

$$m = \inf_{x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\ ,$$

$$M = \sup_{x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\ .$$

Tehát

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{2\sqrt{2}}{\pi},$$

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ folytonos a $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ intervallumon, így Riemann-integrálható, ezért a Riemann-integrálokra vonatkozó középértéktétel

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\ dx \le M(b-a)$$

formulája miatt $a = \frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{3}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $m = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$, $M = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$ mellett

$$\frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\ dx \le \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}\ ,$$

amit bizonyítani kellett.

1.18. feladat. Legyen $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Bizonyítsa be, hogy létezik $c \in [a,b]$, hogy $\int_0^3 x^2\ dx = 3c^2$.

Megoldás. f folytonos $[0,3]$-on, így a középértéktétel 2. következménye miatt $\exists\, c \in [0,3]$, hogy $f(c) = c^2 = \frac{1}{3}\int_0^3 x^2\ dx$, s ez adja az állítást.

Az integrálfüggvény

1.19. feladat. Határozza meg az $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény lokális szélsőértékhelyeit, ha

$$\text{a)} \quad F(x) = \int_0^x \log \frac{1+t^2}{5}\, dt \ ;$$

$$\text{b)} \quad F(x) = \int_\pi^x \frac{\sin t}{2+\cos t}\, dt \ ;$$

$$\text{c)} \quad F(x) = \int_0^{x^2} \frac{t^2-5t+4}{e^t+2}\, dt \ .$$

Megoldás. Ismeretes (lásd Kalkulus II. jegyzet), hogy adott $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény esetén az

$$F\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

függvényt f integrálfüggvényének nevezzük.
Megmutattuk, hogy ha f folytonos $x \in [a,b]$-ben, akkor $\exists\ F'(x) = f(x)$.
Így ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor $\exists\ F'(x) = f(x)\ \forall\ x \in [a,b]$-re, azaz F egy primitív függvénye f-nek.
Mindhárom feladat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényei (az integrandusok) folytonosak, így $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén $\exists\ F'(x) = f(x)$ az első két esetben, míg

$$F(x) = G(x^2)\ (x \in \mathbb{R}) \quad G(x) = \int_0^x \frac{t^2-5t+4}{e^t+2}$$

miatt $\exists\ F'(x) = G'(x^2)2x$.

a) $F'(x) = \log \dfrac{1+x^2}{5}$ $(x \in \mathbb{R})$ és

$$F'(x) = 0 \iff \frac{1+x^2}{5} = 1 \iff 1+x^2 = 5 \iff$$
$$\iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2\ ,$$

így F-nek $x = \pm 2$-ben lehet szélsőértéke.

F' az $y \to \log y$ és $x \to \dfrac{1+x^2}{5}$ differenciálható függvények kompozíciója,

így

$$\exists\ F''(x) = \frac{5}{1+x^2}2x = \frac{10x}{1+x^2},$$

továbbá

$$F''(-2) = -\frac{20}{5} = -4 < 0, \qquad F''(2) = \frac{20}{5} = 4 > 0$$

miatt F-nek maximuma van $x = -2$-ben és minimuma van $x = 2$-ben.

b) $F'(x) = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ $(x \in \mathbb{R})$ és

$$F'(x) = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = k\pi\ ,$$

továbbá

$$\exists\ F''(x) = \frac{\cos x(2+\cos x) + \sin^2 x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$F''(2l\pi) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} > 0, \qquad F''((2l+1)\pi) = -\frac{1}{9} < 0 \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

Ezért az $x = 2l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$ helyeken lokális minimuma van, míg az $x = (2l+1)\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$ helyeken lokális maximuma van F-nek.

c) $F'(x) = G'(x^2)2x = \dfrac{x^4+5x^2+4}{e^{x^2}+2}2x$ és $F'(x) = 0 \iff x = -2, -1, 0, 1, 2$.
$F''(x)$, majd $F''(-2)$, $F''(-1)$, $F''(0)$, $F''(1)$, $F''(2)$ meghatározásával kapjuk, hogy a -1 és 1 helyen lokális maximuma, a $0, -2, 2$ helyeken lokális minimuma van F-nek.

1.20. feladat. Határozza meg a

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^x \cos t^2\ dt}{x}\ ; \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} t)^2\ dt}{\sqrt{x^2+1}}$$

hatérértékeket.

Megoldás.

a) Az $F(x) = \int\limits_0^x \cos t^2\ dt$, $G(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ differenciálható függvények, $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \lim\limits_{x\to 0} \int\limits_0^x cost^2 = F(0) = 0$ és $\lim\limits_{x\to 0} G(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, továbbá $F'(x) = \cos x^2$ és $G'(x) = 1$ miatt $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F'(x)}{G'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x^2}{1} = 1$, így F

és G teljesíti a L'Hospital-szabály feltételeit,
ezért

$$\exists \lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^x \cos t^2 \, dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = 1 \ .$$

b) Legyen most $F(x) = \int\limits_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 \, dt$, $G(x) = \sqrt{x^2+1}$, így

$$\exists \ F'(x) = (\operatorname{arctg} x)^2, \quad G'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty$$

(ezt ellenőrízzük) és $\lim\limits_{x\to\infty} G(x) = +\infty$, továbbá

$$\lim_{x\to+\infty} (\operatorname{arctg} x)^2 = \frac{\pi^2}{4} \text{ és } \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

miatt $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F'(x)}{G'(x)} = \dfrac{\pi^2}{4}$, így a L'Hospital-szabály adja, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 \, dt}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{\pi^2}{4} \ .$$

A Newton-Leibniz formula, integrálási módszerek

1.21. feladat. Számítsa ki az alábbi Riemann-integrálokat:

a) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2} x^2 \, dx$; b) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \sin x \, dx$; c) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$;

d) $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} \, dx$; e) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{1} \frac{1}{x^2+4x+5} \, dx$; f) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} (5x^3+3x^2+x-5) \, dx$

Megoldás. Ismeretes a Newton-Leibniz formula nevű tétel:
Legyen $f, F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan, hogy f Riemann-integrálható, F folytonos $[a,b]$-n és differenciálható $]a,b[$-n, továbbá $F'(x) = f(x)$ $(x \in]a,b[\ )$, akkor

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b\,.$$

Az integrandusokban szereplő f függvények mindegyike folytonos az adott intervallumon, így a Riemann-integrálok léteznek. Továbbá léteznek az F primitív függvények, melyeket az $\int f(x)\ dx$ határozatlan integrálok adnak meg (ahol $C = 0$ választható).
a) $f(x) = x^2$, így

$$F(x) = \int x^2\ dx = \frac{x^3}{3} \implies \int_{-1}^{2} x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - \left(\frac{-1}{3}\right) = 3.$$

b) $f(x) = \sin x$, így

$$F(x) = \int \sin x\ dx = -\cos x \implies \int_0^{\pi} \sin x\ dx =$$
$$= [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 2.$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, így

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arcsin(x) \implies \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx =$$
$$= [\arcsin(x)]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) =$$
$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\ .$$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, így

$$F(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) \implies \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= [\operatorname{arctg}(x)]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}\ .$$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+5} = \dfrac{1}{(x+2)^2+1}$, így

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = [\operatorname{arctg}(x+1)]_{-2}^{1} = \operatorname{arctg}(2) - \operatorname{arctg}(-1).$$

f) $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + x - 5$, így

$$F(x) = \frac{5x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 5x \implies \int\limits_{0}^{1} (5x^3 + 3x^2 + x - 5)\,dx =$$

$$= \left[\frac{5x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} - 5x\right]_0^1 = -\frac{9}{4}\ .$$

1.22. feladat. Számítsa ki az alábbi Riemann-integrálokat:

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \; dx \; ; \qquad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^2 x \; dx \; ; \qquad \int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-5x}} \; dx \; ;$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x \; dx \; ; \qquad \int_1^{e} \frac{\ln^2 x}{x} \; dx \; ; \qquad \int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x} \; dx \; ;$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 3x \; dx \; ; \qquad \int_0^{1} x^2 e^x \; dx \; ; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x \; dx \; ;$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x \; dx \; ; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \; dx \; ; \qquad \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-3x+2} \; dx \; ;$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \; dx \; ; \qquad \int_0^{9} \frac{2}{1+\sqrt{x}} \; dx \; ; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos x+3} \; dx$$

Megoldás.

– Az $f(x) = \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ $(x \in [0,\pi])$ függvény folytonos, így Riemann-integrálható,

$$F(x) = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \; dx = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} \qquad (x \in [0,\pi])$$

primitív függvénye f-nek, így

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \; dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \; .$$

– Az

$$f(x) = \operatorname{ctg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \qquad \left(x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

függvény folytonos, így Riemann-integrálható.

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) \; dx = -\operatorname{ctg} x - x \qquad \left(x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

primitív függvénye f-nek, így a Newton-Leibniz formula szerint:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^2 x \; dx = [-\operatorname{ctg} x - x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\pi}{2} \; .$$

– Az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-5x}}$ $(x \in [-2,-1])$ függvény folytonos, így Riemann-integrálható.
Az

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2-5x}} \; dx = -\frac{1}{5}\frac{\sqrt{2-5x}}{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} \qquad (x \in [-2,-1])$$

primitív függvénye f-nek, ezért a N-L formulát felhasználva:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-5x}} \; dx = \left[-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}\right]_{-2}^{-1} = \frac{2}{5}(\sqrt{12} - \sqrt{7}).$$

– Az

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1-\cos^2 x)\sin x = \\ &= \sin x + \cos^2 x(-\sin x) \qquad (x \in [0,\pi]) \end{aligned}$$

függvény Riemann-integrálható, mert folytonos.
A

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sin^3 x \; dx = \int \left[\sin x + \cos^2 x(-\sin x)\right] \; dx = \\ &= \int \sin x \; dx + \int \cos^2 x(-\sin x) \; dx = \\ &= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x \qquad (x \in [0,\pi]) \end{aligned}$$

függvény primitív függvénye f-nek, így a N-L formula szerint:

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x \; dx = \left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\pi} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \; .$$

– Az

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x} = (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} \qquad (x \in [1,e])$$

függvény folytonos, így Riemann-integrálható $[1, e]$-n.
A határozatlan integrálokról tanultakat felhasználva kapjuk, hogy az

$$F(x) = \int \frac{\ln^2 x}{x}\, dx = \int (\ln x)^2 (\ln x)'\, dx = \frac{(\ln x)^3}{3} =$$
$$= \frac{1}{3}\ln^3 x \qquad (x \in [1, e])$$

függvény primitív függvénye f-nek, így N-L formula szerint:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\, dx = \left[\frac{1}{3}\ln^3 x\right]_1^e = \frac{1}{3}\ln^3 e - \frac{1}{3}\ln^3 1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}\ .$$

– Az

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{3 + \sin^2 x} = \frac{2\sin x \cos x}{3 + \sin^2 x} = \frac{(3 + \sin^2 x)'}{3 + \sin^2 x} \qquad (x \in [0, \pi])$$

függvény folytonos, így Riemann-integrálható $[0, \pi]$-n.
Az

$$F(x) = \int \frac{\sin 2x}{3 + \sin^2 x}\, dx = \int \frac{(3 + \sin^2 x)'}{3 + \sin^2 x}\, dx =$$
$$= \ln(3 + \sin^2 x) \qquad (x \in [0, \pi])$$

függvény primitív függvénye f-nek, ezért a N-L formula szerint:

$$\int_0^\pi \frac{\sin 2x}{3 + \sin^2 x}\, dx = \left[\ln(3 + \sin^2 x)\right]_0^\pi = \ln 3 - \ln 3 = 0.$$

– Az

$$f(x) = \sin x \sin 3x = \frac{1}{2}[\cos(x - 3x) - \cos(x + 3x)] =$$
$$= \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x \qquad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

függvény folytonos, így Riemann-integrálható.
Az

$$F(x) = \int \sin x \sin 3x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx =$$
$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x \qquad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

függvény primitív függvénye f-nek, ezért a N-L formula szerint:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 3x \; dx = \left[\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 - 0 = 0.$$

– Az $x \to x^2$ $(x \in [0,1])$ függvény differenciálható, az $x \to e^x$ $(x \in [0,1])$ függvény folytonos, így a Riemann-integrálra vonatkozó parciális integrálás tétele szerint:

$$\exists \int_0^1 x^2 e^x \; dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x \; dx = e - 2\int_0^1 xe^x \; dx.$$

Másrészt az $x \to x$ $(x \in [0,1])$ függvény is differenciálható és az $x \to e^x$ $(x \in [0,1])$ függvény folytonos, így a parciális integrálás tétele szerint:

$$\exists \int_0^1 xe^x \; dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1e^x \; dx = e - [e^x]_0^1 = e - [e - e^0] = 1.$$

A két formulát használva:

$$\int_0^1 x^2 e^x \; dx = e - 2.$$

– A parciális integrálás tétele (egyszerűen ellenőrízhető módon) most is alkalmazható, ezért

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x \; dx = [x \sin x]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin x \; dx =$$
$$= 0 - [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = 0 - 0 = 0.$$

– Az előbbiekhez hasonló vizsgálat adja, hogy alkalmazható a parciális integrálás tétele, mely szerint most:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x \; dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot \arccos x \; dx = [x \arccos x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \; dx =$$

$$= \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \; dx =$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) \; dx =$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-x^2)' \; dx =$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \left[\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{6} - \left(\sqrt{1 - \frac{1}{4}} - \sqrt{1} \right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$$

– Használható a parciális integrálás tétele, így:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n-1} x \; dx = \left[-\cos x \sin^{n-1}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos x](n-1) \sin^{n-2}(x)(\cos^2 x) \; dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 \; dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\cos^2 x)\; dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

ami adja az $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ rekurzív formulát I_n-re.

Ebből pedig $I_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \; dx = \dfrac{\pi}{2}$ és $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \; dx = 1$ miatt könnyen adódik, hogy

$n = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ esetén

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{3}{2} I_0 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \cdot \frac{\pi}{2} \; ,$$

$n = 2k+1$ $(k \in \mathbb{N})$ esetén pedig

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{2}{1} I_1 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2k+1} \; .$$

Megjegyzés. Belátható, hogy $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \; dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \; dx$.

– Az

$$f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-2)(x-1)} =$$
$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \qquad (x \in [-1,0])$$

függvény folytonos és így Riemann-integrálható $[-1,0]$-on.

Az

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2-3x+2} \; dx = \int \frac{1}{x-2} \; dx - \int \frac{1}{x-1} \; dx =$$
$$= \ln(2-x) - \ln(1-x) \qquad (x \in [-1,0])$$

függvény primitív függvénye f-nek, így a N-L formula miatt

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-3x+2} \; dx = \left[\ln \frac{2-x}{1-x}\right]_{-1}^{0} = \ln 2 - \ln \frac{3}{2} = \ln \frac{2}{\frac{3}{2}} = -\ln 3.$$

Az utolsó négy integrálnál a helyettesítéses Riemann-integrálás tételét használjuk, alkalmas $x = g(t)$ helyettesítéssel:
Ha $g\colon [a,b] \to [c,d]$ folytonosan differenciálható, $f\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\ dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\ dx$$

– Az $\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$ Riemann-integrál esetében, ha $a = 0$ és $b = \frac{\pi}{4}$ és az $x = \sin t = g(t)$ $\left(t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ helyettesítéssel élünk, úgy
$g(0) = 0,\ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Az $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left(x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right)$ függvény folytonos a $g(t) = \sin(t)$ $\left(t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$ folytonosan differenciálható, így

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int_{\sin(0)}^{\sin\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t\ dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2t}{2}\ dt = \left[\frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ .$$

– Az $\int\limits_0^9 \frac{2}{1+\sqrt{x}}\ dx$ integrálnál, ha az $x = t^2 = g(t)$ $(t \in [0,3])$ helyettesítést használjuk, úgy $g'(t) = 2t$; $a = 0,\ b = 3$ mellett $g(a) = g(0) = 0$, $g(b) = g(3) = 9$.
Mivel $f(x) = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$ $(x \in [0,9])$ folytonos, $g(t) = t^2$ $(t \in [0,3])$ folytonosan differenciálható, a helyettesítéses integrálás tétele adja, hogy:

$$\int_0^9 \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_{g(0)}^{g(3)} \frac{2}{1+\sqrt{x}} = \int_0^3 \frac{2}{1+t}2t\,dt = 4\int_0^3 \frac{t+1-1}{t+1}\,dt =$$

$$= 4\int_0^3 \left(1-\frac{1}{t+1}\right)\,dt = 4\left[t-\ln(t+1)\right]_0^3 = 4[3-\ln 4]\ .$$

– Az $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos x+3}\,dx$ integrálnál, mivel az $f(x) = \frac{1}{2\cos x+3} = R(\cos x)$ és folytonos (a határozatlan integrálásnál követettek szerint) az $x = 2\operatorname{arctg} t = g(t)$ $(t \in [0,1])$ helyettesítést használjuk.
Ekkor $g'(t) = \frac{2}{1+t^2}$ $(t \in [0,1])$ miatt g folytonosan differenciálható; $a = 0,\ b = 1$ mellett $g(a) = g(0) = 0,\ g(b) = g(1) = \frac{\pi}{2}$, így a helyettesítéses integrálás tétele szerint:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos x+3}\,dx = \int_{g(0)}^{g(1)} \frac{1}{2\cos x+3}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2\frac{1-t^2}{1+t^2}+3}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{t^2+5}\,dt = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{5}}{3}\left[\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5} - \operatorname{arctg} 0\right] =$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5}\ .$$

Improprius-integrálok

1.23. feladat. Vizsgáljuk az alábbi improprius-integrálok konvergenciáját, ha konvergensek, úgy határozzuk meg értéküket is:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\ ; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx\ ; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx\ ;$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{1-x^2}\,dx\ ; \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\ ; \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx\ ;$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx\ (p>0)\ ; \qquad \int_0^1 \ln x\,dx\ ; \qquad \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\ ;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx\ .$$

Megoldás. Az első négy integrál a Kalkulus II. jegyzet I.12. fejezetének 1. definíciójában értelmezett típusba sorolható, amikor az integrandus $f\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ típusú függvény, mely $\forall\ [a,t] \subset [a,b[$ intervallumon korlátos és Riemann-integrálható, $b=+\infty$ vagy $\exists\ \varepsilon>0$, hogy f nem korlátos $[b-\varepsilon,b[$-n. Az $\int\limits_a^b f$ improprius-integrál konvergens, ha $\exists\ \lim\limits_{t\to b-0}\int\limits_a^t f$ véges határérték, s ekkor $\int\limits_a^b f \doteq \lim\limits_{t\to b-0}\int\limits_a^t f$.

– $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$, így az $f\colon [0,1[\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ függvény nem korlátos az $[1-\varepsilon,1[\ (\varepsilon<1)$ intervallumon, ugyanakkor folytonos $\forall\ [0,t]\subset[0,1[$ intervallumon, így Riemann-integrálható $[0,t]$-n, továbbá

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\arcsin x]_0^t = \arcsin t,\ \text{ ha } t\in[0,1[\ .$$

Ebből $\lim\limits_{t\to 1-0} \arcsin t = \dfrac{\pi}{2}$ miatt kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to 1-0} \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \lim_{t\to 1-0} \arcsin t = \frac{\pi}{2}\ ,$$

így az improprius-integrál konvergens és értékére

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

teljesül.

– Az $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx$-nél $a = 1,\ b = +\infty,\ f\colon [1, +\infty[\ \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ korlátos $\forall\ [1, t] \subset [1, +\infty[$ -en és folytonossága miatt Riemann-integrálható, továbbá

$$\int\limits_1^t \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx = \int\limits_1^t x^{-\frac{3}{2}}\, dx = \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^t = \left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_1^t = 2 - \frac{2}{\sqrt{t}}\ ,$$

ami $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{t}} = 0$ miatt adja, hogy

$$\exists\ \lim_{t\to+\infty} \int\limits_1^t \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx = 2,$$

azaz az improprius-integrál konvergens és értéke $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx = 2$.

– Hasonló meggondolásokkal, mint előbb

$$\exists\ \int\limits_1^t \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_1^t = \ln t - \ln 1 = \ln t,$$

ami $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$ miatt adja, hogy $\lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_1^t \dfrac{1}{x}\, dx = +\infty$, így az $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{1}{x}\, dx$ improprius-integrál divergens.

Megjegyzés. Az előző két feladat vizsgálható a Kalkulus II. jegyzetben szereplő $\int\limits_1^{\infty} x^{\alpha}\, dx$ feladat speciális eseteként is.

– Az $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ $(x \in [2, +\infty[)$ függvény korlátos és folytonos bármely $[2, t] \subset [2, +\infty[$ intervallumon, így

$$\exists \int_2^t \frac{1}{1-x^2}\, dx = \int_2^t \frac{1}{(1-x)(1+x)}\, dx = \frac{1}{2}\int_2^t \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\ln(x+1) - \ln(x-1)\right]_2^t = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{x+1}{x-1}\right]_2^t =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{t-1} - \frac{1}{2}\ln 3.$$

Másrészt $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t+1}{t-1} = 1$ és $\lim\limits_{u\to 1} \ln(u) = \ln(1) = 0$ miatt (az összetett függvény határértékére vonatkozó tétel szerint) $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln\dfrac{t+1}{t-1} = 0$.
Így

$$\lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{1-x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{t-1} - \ln\sqrt{3}\right] = -\ln\sqrt{3},$$

azaz az $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{1}{1-x^2}\, dx$ improprius-integrál konvergens és
$\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{1}{1-x^2}\, dx = -\ln\sqrt{3}$.
A következő négy integrál a Kalkulus II. jegyzet jelzett fejezetének 2. definíciójában értelmezett típus, így az integrandus $f\colon]c, a] \to \mathbb{R}$ típusú függvény, mely $\forall\ [t, a] \subset]c, a]$ intervallumon korlátos és Riemann-integrálható és $\exists\ \varepsilon > 0$, hogy f nem korlátos $]c, c+\varepsilon]$-on. Ekkor az $\int\limits_c^a f$ improprius integrált akkor neveztük konvergensnek, ha $\exists \lim\limits_{t\to c+0} \int\limits_t^a f$ véges határérték, továbbá $\int\limits_c^a f \doteq \lim\limits_{t\to c+0} \int\limits_t^a f$ szerint definiált az improprius integrál értéke.

– Az $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ integrálnál $c = 0,\ b = 1,\ f\colon]0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$-re, $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ miatt nem korlátos $]0, 1]$-en, de korlátos és folytonos is

$\forall\ [t,1] \subset\ ]0,1]$ intervallumon és így Riemann-integrálható, továbbá

$$\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = \int_t^1 x^{-\frac{1}{2}}\ dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_t^1 = [2\sqrt{x}]_t^1 = 2-\sqrt{t} \qquad (t \in\ ]0,1]).$$

Ebből $\lim\limits_{t\to 0+0} \sqrt{t} = 0$ miatt kapjuk, hogy $\lim\limits_{t\to 0+0} \int\limits_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx =$

$= \lim\limits_{t\to 0+0} (2-\sqrt{t}) = 2$, azaz $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$ konvergens és $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = 2$.

– Hasonló meggondolással $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \in\ ]0,1])$ mellett

$$\int_t^1 \frac{1}{x}\ dx = [\ln x]_t^1 = -\ln t \quad (t \in\ ]0,1]),$$

melyből $\lim\limits_{t\to 0+0} \ln t = -\infty$ miatt $\lim\limits_{t\to 0+0} \int\limits_t^1 \frac{1}{x}\ dx = \lim\limits_{t\to 0+0} -\ln t = +\infty$, ezért az $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}$ improprius integrál nem konvergens.

– Ha $f(x) = \frac{1}{x^p}$ $(x \in\ ]0,1])$ és $p > 0$ rögzített, akkor

$$\int_t^1 \frac{1}{x^p}\ dx = \begin{cases} -\ln t & \text{, ha } p = 1 \\ \dfrac{1}{1-p} - \dfrac{t^{1-p}}{1-p} & \text{, ha } p \neq 1 \end{cases}$$

Ebből

$$\lim_{t\to 0+0} \ln t = -\infty, \ \lim_{t\to 0+0} t^{1-p} = \begin{cases} 0 & \text{, ha } 0 < p < 1 \\ +\infty & \text{, ha } p > 1 \end{cases}$$

miatt kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to 0+0} \int_t^1 \frac{1}{x^p}\ dx = \begin{cases} +\infty & \text{, ha } p \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-p} & \text{, ha } 0 < p < 1\ , \end{cases}$$

így $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^p}\ dx$ divergens, ha $p \geq 1$, konvergens, ha $0 < p < 1$, ekkor értéke $\frac{1}{1-p}$.

– Az $\int\limits_0^1 \ln x \, dx$ integrálnál, az előbbivel azonos meggondolások után kapjuk, hogy

$$\exists \int\limits_t^1 \ln x \, dx = \int\limits_t^1 1 \cdot \ln x \, dx = [x \ln x]_t^1 - \int\limits_t^1 x \frac{1}{x} \, dx =$$
$$= -t \ln t - [x]_t^1 = -t \ln t - 1 + t \qquad (t \in]0,1]).$$

A L'Hospital-szabály alkalmazásával belátható, hogy $\lim\limits_{t \to 0+0} t \ln t = 0$, így $\lim\limits_{t \to 0+0} \int\limits_t^1 \ln x \, dx = -1$, azaz az $\int\limits_0^1 \ln x \, dx$ improprius integrál konvergens és $\int\limits_0^1 \ln x \, dx = -1$.

Az utolsó két integrál az elméletben tárgyalt harmadik típushoz tartozik, amikor $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ típusú és $]a,b[$ mindkét végpontja (vagy egyik) végtelen, vagy a végpontok egy környezetében f nem korlátos (esetleg mindkét dolog fennáll). Ekkor, ha $\exists \lim\limits_{\substack{t \to a+0 \\ s \to b-0}} \int\limits_t^s f$ véges érték, akkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_a^b f$ improprius integrál konvergens, értéke pedig e határérték.

– Az $\int\limits_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$ integrál esetén $a = -2, \ b = 2$,

$$\lim_{x \to -2+0} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 2-0} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty$$

miatt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \qquad (x \in]-2,2[)$$

nem korlátos a -2, illetve $+2$ egy alkalmas környezetében, de korlátos, folytonos és így Riemann-integrálható $\forall \ [t,s] \subset]-2,2[$ intervallumon, így

$$\exists \int\limits_t^s \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dx = \frac{1}{2} \int\limits_t^s \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} \right]_t^s =$$
$$= \arcsin \frac{s}{2} - \arcsin \frac{t}{2} \qquad (t, s \in]-2,2[).$$

Ekkor

$$\lim_{s\to 2-0} \arcsin\frac{s}{2} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

és

$$\lim_{t\to -2+0} \arcsin\frac{t}{2} = \arcsin -1 = -\frac{\pi}{2}$$

miatt

$$\exists \lim_{\substack{t\to -2+0\\ s\to 2-0}} \int_t^s \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \pi,$$

így $\int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$ konvergens és értéke π.

– Az $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$ esetében

$$a = -\infty, \quad b = +\infty, \qquad f(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

folytonos $\mathbb{R}$-en, így $\forall\ [t,s] \subset \mathbb{R}$ esetén Riemann-integrálható és

$$\int_t^s \frac{1}{x^2+1}\, dx = [\operatorname{arctg} x]_t^s = \operatorname{arctg} s - \operatorname{arctg} t \qquad (t, s \in \mathbb{R}).$$

Ebből

$$\lim_{s\to+\infty} \operatorname{arctg} s = \frac{\pi}{2} \qquad \text{és} \qquad \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg} t = -\frac{\pi}{2}$$

miatt,

$$\lim_{\substack{t\to-\infty\\ s\to+\infty}} \int_t^s \frac{1}{x^2+1}\, dx = \lim_{\substack{t\to-\infty\\ s\to+\infty}} [\operatorname{arctg} s - \operatorname{arctg} t] = \pi$$

következik, tehát $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$ konvergens és értéke π.

Sorozatok, sorok és Riemann-integrál

1.24. feladat. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$\left\langle \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2} \right\rangle \ ; \quad \left\langle \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n} \right\rangle \ ;$$

$$\left\langle \frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2} \right\rangle \ ;$$

$$\left\langle \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} \right\rangle \ (p>0) \ ; \quad \left\langle \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right) \right\rangle \ ;$$

$$\left\langle \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right) \right\rangle \ .$$

Megoldás.

– $S_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}=\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{n-1}{n}\right)\dfrac{1}{n}=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}$

mutatja, hogy S_n az $f(x)=x$ ($x\in[0,1]$) függvény alsó közelítő összege, ha P_n a $[0,1]$ n egyenlő részre osztásával kapott felosztás, azaz $s(f,P_n)$ bármely $n\in\mathbb{N}$-re. $\langle P_n\rangle$ normális felosztássorozata $[0,1]$-nek, f Riemann-integrálható (mert folytonos), így

$$\lim_{n\to\infty} s(f,P_n)=\int_0^1 x\ dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\ ,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} s(f,P_n)=\frac{1}{2}\ .$$

–

$$S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}=$$
$$=\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

mutatja, hogy S_n adott $n\in\mathbb{N}$-re az $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ ($x\in[0,1]$) függvény $s(f,P_n)$ alsó közelítő összege, ha P_n a $[0,1]$ n egyenlő részre osztásával kapott felosztás.

Ekkor $\langle P_n\rangle$ normális felosztássorozat, f folytonos, ezért Riemann-integrálható $[0,1]$-en,

így

$$\lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln 2,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \ln 2.$$

–

$$S_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right) \frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n}\ ,$$

ami adja, hogy $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re S_n az $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(x \in [0,1])$ függvény $s(f,P_n)$ alsó közelítő összege, ha P_n a $[0,1]$ n egyenlő részre osztásával kapott felosztás, így $\langle P_n \rangle$ normális felosztássorozata $[0,1]$-nek, f folytonos, ezért Riemann-integrálható $[0,1]$-en és

$$\lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\operatorname{arctg} x]_0^1 =$$

$$= \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}\ ,$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \frac{\pi}{4}\ .$$

–

$$S_n = \frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}} = \left[\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^p \right] \frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^p \frac{1}{n}\ ,$$

így S_n az $f(x) = x^p$ $(x \in [0,1])$ függvény egy integrálközelítő összege, ha P_n a $[0,1]$ n egyenlő részre osztásával nyert felosztás, azaz $S_n = \sigma(f,P_n)$

$\left(t_i = \dfrac{i}{n},\ i = 1, \dots, n\right)$ $\forall$ n-re.

$\langle P_n \rangle$ normális felosztássorozat, f folytonos, így Riemann-integrálható, így

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n) = \int_0^1 x^p \, dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1} \ ,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n) = \frac{1}{p+1} \ .$$

– $S_n = \left(\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + \dots + \sin\dfrac{n-1}{n}\pi\right)\dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \sin\left(i \cdot \frac{\pi}{n}\right)\frac{1}{n}$.

Így $f(x) = \sin(\pi x)$ $(x \in [0, \pi])$ mellett $S_n = \sigma(f, P_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, ahol P_n a $[0, \pi]$ n egyenlő részre osztásával kapott felosztás, $\langle P_n \rangle$ normális felosztássorozat, f Riemann-integrálható, így

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n) = \int_0^\pi \sin \pi x \, dx = \left[\frac{-\cos x}{\pi}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \ .$$

– $S_n = \left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} + \sqrt{1 + \dfrac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \dfrac{n}{n}}\right)\dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n}$

az $f(x) = \sqrt{1+x}$ $(x \in [0, 1])$ folytonos függvény egy integrálközelítő összege, így

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n) = \int_0^1 \sqrt{1+x} \, dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) \ .$$

1.25. feladat. Bizonyítsa be, hogy

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

bármely $x \in \,]-1, 1]$-re.

Megoldás. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n$$

egy $q = x^2$ kvóciensű geometriai sor, hogy $a_1 = 1$. Ez konvergens, ha $x \in]-1,1[$ és az összege $\dfrac{1}{1+x^2}$, azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in]-1,1[).$$

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ függvénysor (hatványsor) egyenletesen konvergens a $[-t,t]$ $(t \in]-1,1[)$ zárt intervallumon az $f_n(x) = (-1)^n x^{2n}$ függvények Riemann-integrálhatók $[-t,t]$-n, így a függvénysor tagonként integrálható (lásd Kalkulus II. I.10. fejezet 1. Tétel következménye). Ezeket és a N-L formulát használva

$$\operatorname{arctg} t = \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^t x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

következik, ha $t \in]-1,1[$.
De a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

hatványsor $t = 1$-re is konvergens (lásd Leibniz-kritérium), továbbá a korábbiak miatt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1,$$

melyek együtt adják a feladat állítását.

Gyakorló feladatok

1) Határozza meg az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$; $\displaystyle\int \frac{x^4+x^{-4}+2}{x^3}\, dx$;

$\displaystyle\int \frac{2x^2-x+3}{\sqrt{x}}\, dx$; $\displaystyle\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x\cdot 4^x}\, dx$;

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}}\, dx$; $\displaystyle\int \cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)\, dx$;

$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(5x+7)}\, dx$; $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}\, dx$;

c) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{(x^3-3x+1)^6}\, dx$; $\displaystyle\int (2x^3+1)^7x^2\, dx$;

$\displaystyle\int \frac{5x}{\sqrt{(x^2-1)^5}}\, dx$; $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\, dx$;

d) $\displaystyle\int xe^{-x^2}\, dx$; $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$;

$\displaystyle\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x^3}\, dx$;

e) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\, dx$; $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\, dx$;

$\displaystyle\int \sqrt{1-2x^2}\, dx$; $\displaystyle\int \sqrt{9x^2-4x}\, dx$;

f) $\displaystyle\int x^n\ln x\, dx$; $\displaystyle\int \sin x\ln(\operatorname{tg} x)\, dx$;

$\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\, dx$; $\displaystyle\int e^{2x}\sin^2 x\, dx$;

$\displaystyle\int \operatorname{sh} ax\cos bx\, dx$; $\displaystyle\int xe^x\sin x\, dx$;

$\displaystyle\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx$;

g) $\displaystyle\int \sin^5 x\, dx$; $\displaystyle\int \sin 5x\cos x\, dx$;

$\displaystyle\int \operatorname{ch}^4 x\, dx$; $\displaystyle\int \cos^3 x\sin^4 x\, dx$;

h) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+4x-5}\,dx$;

$\displaystyle\int \frac{5x+2}{x^2+4x+13}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$;

$\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^4-x^3}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$;

$\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4+x^8}\,dx$;

i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$; $\displaystyle\int x\sin\sqrt{x}\,dx$;

$\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx$;

$\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$;

$\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}\,dx$; $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$;

j) $\displaystyle\int x^x(1+\ln x)\,dx$; $\displaystyle\int x|x|\,dx$;

$\displaystyle\int e^{-|x|}\,dx$; $\displaystyle\int \max(1;x^2)\,dx$;

2) Bizonyítsa be, hogy létezik az $\int\limits_0^1 (1-x^2)\,dx$ integrál és hogy

$$\int_0^1 (1-x^2)\,dx = \frac{2}{3}\ .$$

3) Határozza meg $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$ értékét, ha

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{, ha } |x| > \dfrac{1}{2} \\ -2 & \text{, ha } |x| \le \dfrac{1}{2} \end{cases}\ .$$

4) Számítsa ki az alábbi Riemann-integrálokat:

$$\int_{-1}^{32} \sqrt[5]{x}\ dx\ ; \qquad \int_{0}^{\pi} x^2 \sin x\ dx\ ; \qquad \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-3x+2}\ dx\ ;$$

$$\int_{1}^{e} \frac{\sin(\pi \ln x)}{x}\ dx\ ; \qquad \int_{0}^{\pi} \cos^5 x\ dx\ ; \qquad \int_{0}^{1} (x^2+x+2)e^x\ dx\ ;$$

$$\int_{0}^{1} x \arccos x\ dx\ ; \qquad \int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\ dx\ ; \qquad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\ dx\ ;$$

5) Vizsgálja az alábbi improprius integrálok konvergenciáját, határozza meg értéküket, ha konvergensek:

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^5}\ dx\ ; \qquad \int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\ dx\ ; \qquad \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^4}\ dx\ ; \qquad \int_{0}^{\infty} xe^{-3x}\ dx\ .$$

II. fejezet

Vektorterek, Euklideszi terek, metrikus terek

1. Alapfogalmak

2.1. feladat. Legyen adott egy X nemüres halmaz és

$$d_0\colon X \times X \to \mathbb{R},\ d_0(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x = y \\ 1 & \text{, ha } x \neq y\ . \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy (X, d_0) metrikus tér. (d_0 a diszkrét metrika, (X, d_0) a diszkrét metrikus tér.)

Megoldás. A metrikus tér definíciója szerint (lásd Kalkulus II. jegyzet II.1. fejezet 6. definíció) be kell látnunk, hogy

1) $d_0(x,y) \geq 0,\ d(x,y) = 0 \iff x = y \quad (\forall\, x, y \in X)$.
   Ez d_0 definíciója szerint nyilvánvaló.
2) $d_0(x,y) = d_0(y,x) \quad (\forall\, x, y \in X)$.
   Ez is látszik d_0 definíciójából.
3) $d_0(x,z) \leq d_0(x,y) + d_0(y,z) \quad (\forall\, x, y, z \in X)$.
   Ha $x, y, z \in X$ olyanok, hogy
   - $x = y = z$, akkor $0 \leq 0 + 0 = 0$ nyilván igaz ;
   - $x = y \neq z$, akkor $d_0(x,z) = 1,\ d_0(x,y) = 0,\ d_0(y,z) = 1$, így $1 \leq 0 + 1 = 1$ teljesül ;
   - az $x \neq y = z$ és $x = z \neq y$ esetekben ugyanígy járunk el ;
   - ha x, y, z páronként különböznek, úgy $d_0(x,z) = 1,\ d_0(x,y) = 1$ és $d_0(y,z) = 1$ és $1 \leq 1 + 1 = 2$ miatt kapjuk a háromszögegyenlőtlenséget.

   Ezzel az összes lehetséges esetet megnéztük.

2.2. feladat. Ha $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ és

a) $d_1\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ d_1(x,y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$,

b) $d_2\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ d_2(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$

akkor bizonyítsa be, hogy $(\mathbb{R}^n, d_1)$ és $(\mathbb{R}^n, d_2)$ metrikus tér.

Megoldás. Az első két tulajdonság teljesülése azonnal jön d_1 és d_2 definíciójából (az abszolút érték és az egyenlőtlenségek tulajdonságainak felhasználásával).
Így csak a háromszögegyenlőtlenség bizonyítását részletezzük.
Ha $x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n),\ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ tetszőlegesek, úgy $\forall\ i \in \{1, 2, \dots, n\}$-re (az abszolútérték tulajdonsága miatt)

$$|x_i - z_i| = |(x_i - y_i) + (y_i - z_i)| \le |x_i - y_i| + |y_i - z_i|.$$

Az egyenlőtlenségeket összeadva azonnal kapjuk d_2-re a háromszögegyenlőtlenséget.
Másrészt

$$|x_i - y_i| \le \max_{0 \le i \le n} |x_i - y_i| = d_1(x,y)$$

és

$$|y_i - z_i| \le \max_{0 \le i \le n} |y_i - z_i| = d_1(y,z)$$

és az előbbi egyenlőtlenség miatt $\forall\ i \in \{1, 2, \dots, n\}$-re

$$|x_i - z_i| \le d_1(x,y) + d(y,z),$$

amiből

$$d_1(x,z) = \max_{0 \le i \le n} |x_i - z_i| \le d_1(x,y) + d_1(y,z)$$

következik, ami adja d_1-re a háromszögegyenlőtlenséget.

2.3. feladat. Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallum, X az

$$X \doteq \{\, f \mid f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ folytonos függvény}\}$$

szerint definiált halmaz, továbbá

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R},\ d(f,g) \doteq \sup\{\, |f(x) - g(x)| \,\}.$$

Bizonyítsa be, hogy (X, d) metrikus tér.

Megoldás.

$$|f(x) - g(x)| \ge 0,\ |f(x) - g(x)| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x)$$

miatt a metrikus tér első tulajdonsága nyilván igaz.
A második tulajdonság az

$$|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)| \quad (x \in [a,b])$$

egyenlőség miatt jön d definíciójából.
Ha $f, g, h \in X$, úgy a $\forall\ x \in [a, b]$-re teljesülő

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |(f(x) - h(x)) + (h(x) - g(x))| \leq \\ &\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - f(x)| \end{aligned}$$

egyenlőtlenség $|f(x) - h(x)| \leq d(f, h)$ és $|h(x) - g(x)| \leq d(h, g)$ miatt adja, hogy

$$|f(x) - g(x)| \leq d(f, h) + d(h, g) \quad (x \in [a, b]),$$

amiből azonnal következik d-re a háromszögegyenlőtlenség.

2.4. feladat. Legyen (X, d) metrikus tér. Bizonyítsa be, hogy

a) bármely $x_0 \in X$ és bármely $r \in \mathbb{R}_+$ esetén $x_0 \in K(x_0, r)$;
b) ha $x_0 \in X,\ r \in \mathbb{R}_+$ és $x \in K(x_0, r)$, akkor létezik $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, hogy $K(x, \varepsilon) \subset K(x_0, r)$;
c) bármely $x, y \in X,\ x \neq y$-ra létezik $r \in \mathbb{R}_+$, hogy $K(x, r) \cap K(y, r) = \emptyset$.

Megoldás. Ismeretes, hogy $K(x_0, r) \doteq \{\, x |\, x \in X,\ d(x, x_0) < r\}$.
a) $d(x_0, x_0) = 0$ és $K(x_0, r)$ definíciója adja az állítást;
b) Legyen $0 < \varepsilon \doteq r - d(x, x_0)$ és $y \in K(x, \varepsilon)$ tetszőleges, akkor

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \varepsilon + d(x, x_0) = r$$

adja, hogy $y \in K(x_0, r)$, tehát $K(x, \varepsilon) \subset K(x_0, r)$;
c) Ha $r \doteq \dfrac{1}{2} d(x, y)$ és létezne olyan $z \in X$, melyre $z \in K(x, r) \cap K(y, r)$, akkor a háromszögegyenlőtlenség miatt

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + r = d(x, y),$$

s ez ellentmondás.

2.5. feladat. Legyen (X, d) metrikus tér. Bizonyítsa be, hogy $\emptyset \neq H \subset X$ akkor és csak akkor korlátos, ha létezik $a \in X$ és $r \in \mathbb{R}_+$, hogy $H \subset K(a, r)$.

Megoldás. Definíció szerint $\emptyset \neq H$ akkor korlátos, ha létezik $r \in \mathbb{R}_+$, hogy bármely $x, y \in H$-ra $d(x, y) < r$. Ekkor a $\operatorname{diam} H \doteq \sup\{\, d(x, y) |\, x, y \in H\}$ számot H átmérőjének nevezzük.
a) Ha $\exists\ a \in X$ és $r \in \mathbb{R}_+$, hogy $H \subset K(a, r)$, akkor $\forall\ x, y \in H$-ra $d(x, a) < r,\ d(y, a) < r$ és akkor a háromszögegyenlőtlenség miatt

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < 2r,$$

ami definíció szerint adja H korlátosságát.

b) Ha $H \neq \emptyset$ korlátos halmaz, $a \in X$ rögzített, $\operatorname{diam} H = c$ és $y_0 \in H$ is rögzített, úgy $r = d(a, y_0) + c + 1$ választással $\forall\, x \in H$-ra

$$d(x,a) \leq d(x,y_0) + d(y_0,a) \leq c + d(a,y_0) < c + d(a,y_0) + 1 = r,$$

vagyis $H \subset K(a,r)$ teljesül. (Ezzel az állításnál még többet bizonyítottunk.)

2. Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér

2.6. feladat. Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{R}^n$ a benne értelmezett összeadással és skalárral való szorzással vektortér.

Megoldás. Ellenőrizni kell a vektortér 1)-7) tulajdonságát.
Legyen $x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n),\ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n;\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen adott, akkor

1) $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = y + x$;

2) $x + (y + z) = (x_1 + (y_1 + z_1), \dots, x_n + (y_n + z_n)) =$
$= ((x_1 + y_1) + z_1, \dots, (x_n + y_n) + z_n) = (x + y) + z$;

3) $\underline{0} = (0, \dots, 0)$ esetén
$x + \underline{0} = (x_1, \dots, x_n) + (0, \dots, 0) = (x_1 + 0, \dots, x_n + 0) = (x_1, \dots, x_n) = x$;

4) $(x_1, \dots, x_n) = x$-re legyen $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$, akkor
$x + (-x) = (x_1, \dots, x_n) + (-x_1, \dots, -x_n) =$
$= (x_1 + (-x_1), \dots, x_n + (-x_n)) = (0, \dots, 0) = 0$;

5) $1 \cdot x = 1(x_1, \dots, x_n) = (1 \cdot x_1, \dots, 1 \cdot x_n) = (x_1, \dots, x_n) = x$;

6) $\lambda(\mu x) = \lambda(\mu(x_1, \dots, x_n)) = \lambda(\mu x_1, \dots, \mu x_n) = ((\lambda\mu)x_1, \dots, (\lambda\mu)x_n) =$
$= (\lambda\mu)(x_1, \dots, x_n) = (\lambda\mu)x$;

7) $(\lambda + \mu)x = (\lambda + \mu)(x_1, \dots, x_n) = ((\lambda + \mu)x_1, \dots, (\lambda + \mu)x_n) =$
$= (\lambda x_1 + \mu x_1, \dots, \lambda x_n + \mu x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \dots, \mu x_n) =$
$= \lambda(x_1, \dots, x_n) + \mu(x_1, \dots, x_n) = \lambda x + \mu x$.

(Felhasználtuk a valós számok testaxiómákban rögzített tulajdonságait.)

2.7. feladat. Adottak az $x = (1, 5, 5),\ y = (-2, 2, 3)$ $\mathbb{R}^3$-beli vektorok, határozza meg az $x + y,\ x - y,\ 3x - \dfrac{1}{2}y$ vektorokat.

Megoldás.

– $x + y = (1, 5, 5) + (-2, 2, 3) = (1 + (-2), 5 + 2, 5 + 3) = (-1, 7, 8)$;

– $x - y \doteq x + (-1)y = (1, 5, 5) + (-1)(-2, 2, 3) = (1, 5, 5) + (2, -2, -3) =$
$= (3, 3, 2)$;

– $$3x - \frac{1}{2}y = 3x + \left(-\frac{1}{2}y\right) = 3(1,5,5) + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2,2,3) =$$
$$= (3,15,15) + \left(1,-1,-\frac{3}{2}\right) = \left(4,14,13\frac{1}{2}\right).$$

2.8. feladat. Bizonyítsa be, hogy ha $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, úgy $\langle x, y\rangle \doteq x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ skaláris (belső) szorzat $\mathbb{R}^n$-ben.

Megoldás. Ellenőrízni kell a skaláris szorzat négy definiáló tulajdonságát:

1) $\langle x, y\rangle \doteq x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = y_1x_1 + \ldots + y_nx_n \doteq \langle y, x\rangle$;

2) $\langle x + y, z\rangle \doteq (x_1 + y_1)z_1 + \ldots + (x_n + y_n)z_n =$
$= (x_1z_1 + \ldots + x_nz_n) + (y_1z_1 + \ldots + y_nz_n) \doteq \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;

3) $\langle \lambda x, y\rangle \doteq (\lambda x_1)y_1 + \ldots + (\lambda x_n)y_n = \lambda(x_1y_1) + \ldots + \lambda(x_ny_n) =$
$= \lambda(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n) \doteq \lambda\langle x, y\rangle$;

4) $\langle x, x\rangle = x_1x_1 + \ldots + x_nx_n = x_1^2 + \ldots x_n^2 \geq 0$ és $= 0 \iff$
$\iff x_1 = \cdots = x_n = 0 \iff x = (x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0) = \underline{0}$.

(Itt is használtuk a valós számok néhány ismert tulajdonságát – axiómákat, vagy tételeket.)

2.9. feladat. Bizonyítsa be, hogy ha
$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x\rangle} \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,, \qquad d(x, y) \doteq \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

norma, illetve távolság (metrika) $\mathbb{R}^n$-ben.

Megoldás.

– A normát a 8. feladat szerint belső szorzatból származtattuk, így a Kalkulus II. jegyzet II.1. fejezet 1. tétele szerint az teljesíti a norma három tulajdonságát.

– d normából (így belső szorzatból) származtatott, így a Kalkulus II. jegyzet előbb idézett fejezetének 2. tétele szerint d valóban távolság (metrika) $\mathbb{R}^n$-ben.

Megjegyzés. A tulajdonságok közvetlenül is beláthatók.

3. $\mathbb{R}^n$ és metrikus tér topológiája

2.10. feladat. Bizonyítsa be, hogy az (X, d) metrikus térbeli (így az $\mathbb{R}^n$-beli) nyílt környezetek nyílt halmazok.

Megoldás. Legyen $x_0 \in X$ és $r \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges. Definíció szerint a $K(x_0, r)$ környezet akkor nyílt, ha minden pontja belső pont, azaz $\forall\ x \in K(x_0, r)$ esetén $\exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+$, hogy $K(x, \varepsilon) \subset K(x_0, r)$. Utóbbi viszont a 4. feladat b) része miatt igaz.

2.11. feladat. Legyen adott (X, d) (vagy $(\mathbb{R}^n, d)$) metrikus tér.
Bizonyítsa be, hogy $x_0 \in X$ (vagy $\mathbb{R}^n$) akkor és csak akkor torlódási pontja a $H \subset X$ (vagy $\mathbb{R}^n$) halmaznak, ha x_0 minden környezetében H-nak végtelen sok eleme van.

Megoldás.

a) Ha x_0 $\forall\ K(x_0, r)$ környezetében végtelen sok H-beli eleme van H-nak, akkor $\exists\ x_0$-tól különböző eleme is, így (definíció szerint) x_0 torlódási pont.

b) Ha x_0 torlódási pontja H-nak, úgy $\forall\ K(x_0, r)$-ben $\exists\ x_0$-tól különböző H-beli elem.
Tegyük fel, hogy $\exists\ K(x_0, r)$, hogy abban csak véges sok eleme van H-nak, akkor nyilván véges sok x_0-tól különböző H-beli elem van $\forall\ K(x_0, r)$-ben, legyenek ezek, mondjuk $x_1, \ldots, x_n \in H$, úgy ha
$0 < \varepsilon = \min\{d(x_0, x_1), \ldots, d(x_0, x_n)\}$, akkor $K(x_0, \varepsilon)$-ban nincs x_0-tól különböző H-beli elem, ellentmondásban azzal, hogy x_0 torlódási pont.
Így minden $K(x_0, r)$-ben végtelen sok H-beli elem van.

2.12. feladat. Bizonyítsa be, hogy ha $H \subset X$ (vagy $\mathbb{R}^n$)
((X, d) vagy $(\mathbb{R}^n, d)$ metrikus tér), akkor H határpontjainak illetve torlódási pontjainak halmaza is zárt halmaz.

Megoldás.

a) Jelölje ∂H H határát.
Be kell látnunk, hogy ∂H minden torlódási pontját tartalmazza.
Legyen x_0 torlódási pontja ∂H-nak és $r \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges, akkor (a torlódási pont definíciója miatt)$\exists\ x \in \partial H,\ x \neq x_0$, hogy $x \in K(x_0, r)$.
A 4. feladat b) része miatt $\exists\ \varepsilon > 0$, hogy $K(x, \varepsilon) \subset K(x_0, r)$.
Ugyanakkor $x \in \partial H$ miatt (a határpont definíciója szerint)
– $\exists\ y \in H,\ y \in K(x, \varepsilon) \subset K(x_0, r) \implies H \cap K(x_0, r) \neq \emptyset$;
– $\exists\ z \in CH,\ z \in K(x, \varepsilon) \subset K(x_0, r) \implies CH \cap K(x_0, r) \neq \emptyset$;
ami viszont (ugyancsak a határpont definíciója miatt) adja, hogy $x_0 \in \partial H$, amit bizonyítani kellett.

b) A másik állítás bizonyítása a)-hoz hasonló.

2.13. feladat. Legyen

$$H = \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \mid m, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Határozza meg H torlódási pontjait $(\mathbb{R}^2, d)$-ben.

Megoldás. Megmutatjuk, hogy

$$H' = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(0,0)\}.$$

– $\forall$ rögzített $n \in \mathbb{N}$-re $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ esetén $\forall\, r \in \mathbb{R}_+$-re $\exists\, m \in \mathbb{N}$, hogy

$$d\left(\left(\frac{1}{n}, 0\right), \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{m}\right)^2} = \frac{1}{m} < r,$$

hiszen $\frac{1}{m} < r \iff m > \frac{1}{r}$, ilyen m pedig (mivel $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos) létezik. Ez pedig azt jelenti, hogy az $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ pont bármely környezetében létezik $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$-tól különböző H-beli elem, azaz $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re torlódási pontja H-nak.

– Hasonlóan megmutatható, hogy a $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ pontok is torlódási pontjai H-nak.

– Tekintsük a $(0,0)$ pontot és legyen $r \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges, akkor $\exists\, n \in \mathbb{N}$, hogy $d\left((0,0), \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = \sqrt{\left(0 - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{n} < r$, hiszen $\frac{\sqrt{2}}{n} < r \iff n > \frac{\sqrt{2}}{r}$, ilyen $n \in \mathbb{N}$ pedig (hasonló okok miatt, mint előbb) létezik. Így a $(0,0)$ bármely környezetében $\exists$ $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq (0,0)$ H-beli pont, tehát $(0,0)$ torlódási pontja H-nak.

– Mutassuk meg, hogy más torlódási pontja nincs H-nak.

2.14. feladat. Bizonyítsa be, hogy $(\mathbb{R}^n, d)$-ben egy nyílt halmaz minden eleme torlódási pontja a halmaznak.

Megoldás. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $x \in H$ tetszőleges elem, úgy ha $r \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges, H nyíltsága miatt $\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+,\ \varepsilon \le r$, hogy $K(x,\varepsilon) \subset H$ és $K(x,\varepsilon) \subseteq K(x,r)$.
Az előbb mondottak szerint $\exists\, n \in \mathbb{N}$, hogy $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, így $x = (x_1, \dots, x_n)$ esetén, ha $y \in \mathbb{R}^n,\ y = \left(x_1 + \dfrac{1}{n}, x_2, \dots, x_n\right)$, úgy $x \ne y$ és

$$d(x,y) = \sqrt{\left(x_1 - \left(x_1 + \frac{1}{n}\right)\right)^2 + (x_2 - x_2)^2 + \dots + (x_n - x_n)^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

így $x \ne y \in K(x,\varepsilon) \implies y \in K(x,r)$, azaz x torlódási pont, amit bizonyítani kellett.

2.15. feladat. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}^n,\ r \in \mathbb{R}_+$. Bizonyítsa be, hogy a $K(x_0,r)$ nyílt környezet átmérője $2r$.

Megoldás. Ha $x, y \in K(x_0,r)$, akkor a háromszögegyenlőtlenség miatt

$$d(x,y) \le d(x,x_0) + d(x_0,y) < r + r = 2r,$$

azaz $K(x_0,r)$ korlátos és nyilván $\operatorname{diam} K(x_0,r) \le 2r$.
Tegyük fel, hogy $2\alpha = \operatorname{diam} K(x_0,r) < 2r$.
Legyen $\varepsilon \doteq r - \alpha\ (> 0)$ és $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$.
Ha $x = (x_{01} - r + \dfrac{\varepsilon}{2}, x_{02}, \dots, x_{0n}),\ y = (x_{01} + r - \dfrac{\varepsilon}{2}, x_{02}, \dots, x_{0n})$, akkor egyrészt $x, y \in K(x_0,r)$ (ezt lássuk be) és

$$d(x,y) =$$
$$= \sqrt{\left[\left(x_{01} - r + \tfrac{\varepsilon}{2}\right) - \left(x_{01} + r - \tfrac{\varepsilon}{2}\right)\right]^2 + (x_{02} - x_{02})^2 + \dots + (x_{0n} - x_{0n})^2} =$$
$$= \sqrt{(2r - \varepsilon)^2} = 2r - \varepsilon = 2r - (r - \alpha) = r + \alpha > \alpha + \alpha = 2\alpha,$$

ellentmondásban azzal, hogy $\operatorname{diam} K(x_0,r) = 2\alpha < 2r$, így igaz az állítás.

2.16. feladat. Bizonyítsa be, hogy $(\mathbb{R}^n, d)$-ben egy szakasz átmérője egyenlő a szakasz hosszával.

Megoldás. Ha $a, b \in \mathbb{R}^n,\ a \ne b$, akkor az a-t és b-t összekötő n-dimenziós szakaszon az $E = \{\, a + t(b-a) \mid t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^n$ halmazt értjük.
Ha $x, y \in E$, akkor $\exists\, t_1, t_2 \in [0,1]$, hogy $x = a + t_1(b-a),\ y = a + t_2(b-a)$, így

$$d(x,y) = \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} = \|(t_1 - t_2)(b-a)\|_{\mathbb{R}^n} = |t_1 - t_2|\|b - a\|_{\mathbb{R}^n} \le d(a,b),$$

ezért $\operatorname{diam} E \le d(a,b)$. De $a, b \in E$, így $\operatorname{diam} E = d(a,b)$.

2.17. feladat. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ és H_i $(i = 1, \ldots, n)$ a H elemei i-edik koordinátáiból álló halmaz. Bizonyítsa be, hogy H akkor és csak akkor korlátos, ha bármely H_i korlátos $(\mathbb{R}, d)$-ben.

Megoldás. Ha $x, y \in H$ tetszőleges, hogy $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, akkor egyszerűen belátható, hogy $\forall\ i = 1, \ldots, n$-re

$$|x_i - y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \|x - y\| = d(x, y) \leq \sqrt{n \max_i (x_i - y_i)^2} =$$
$$= \sqrt{n} \max_i |x_i - y_i|.$$

Ha $H = \emptyset$, úgy nyilván igaz az állítás, ha $H \neq \emptyset$, úgy

a) ha H korlátos, úgy $\exists\ r \in \mathbb{R}_+$, hogy $d(x, y) < r\ \forall\ x, y \in H$-ra, így $\forall\ i = 1, \ldots, n$-re $|x_i - y_i| < r$, ami adja H_i korlátosságát $\mathbb{R}$-ben $\forall\ i$-re;

b) ha $\forall\ H_i$ korlátos $\mathbb{R}$-ben, úgy $\exists\ r_i \in \mathbb{R}_+$, hogy $|x_i - y_i| < r_i\ \forall\ x_i, y_i \in H_i$, így az előbbi egyenlőtlenség miatt $d(x, y) \leq \sqrt{n} \max_i r_i \doteq r \in \mathbb{R}_+$ $\forall\ x, y \in H$-ra, s ez adja H korlátosságát $(\mathbb{R}^n, d)$-ben.

2.18. feladat. Bizonyítsa be, hogy $(\mathbb{R}^n, d)$ $\forall$ véges H részhalmaza kompakt.

Megoldás. $H \subset \mathbb{R}^n \iff$ kompakt, ha korlátos és zárt.
Ha H véges, akkor nyilván korlátos, ugyanakkor véges halmaznak nincs torlódási pontja, így zárt is (ami jön abból is, hogy egy véges $\mathbb{R}^n$-beli halmaz komplementere nyílt).

4. További lineáris algebrai előismeretek

Ehhez a fejezethez a Diszkrét matematika (más szakosok pedig a Lineáris algebra tárgyak) keretében, jegyzeteiben és példatáraiban találnak feladatokat.

Gyakorló feladatok

1) Bizonyítsa be, hogy a $H \subset (\mathbb{R}^n, d)$ halmaz akkor és csak akkor korlátos, ha $H = \emptyset$, vagy ha $\exists\ r > 0$, hogy $H \subset K(\underline{0}, r)$, ahol $\underline{0} = (0, \ldots, 0)$ az $\mathbb{R}^n$-beli zérus elem.

2) Legyenek $x = (-2, 3, 0)$, $y = (3, 4, 5)$, $z = (\pi, e, 1)$ $\mathbb{R}^3$-beli vektorok, határozza meg az $5x - 2y + 3z$ vektort.

3) Bizonyítsa be, hogy $H \subset \mathbb{R}^n$ akkor és csak akkor zárt az (R^n, d) euklideszi térben, ha minden torlódási pontját tartalmazza.

4) Határozza meg a $H = [-1, 1[\times]0, 1[\times]1, 2] \subset \mathbb{R}^3$ halmaz belső, külső, torlódási és határpontjait.

5) Vizsgálja a $H_1 =]0, 1[\times [2, 7]$ és $H_2 = [-1, 1] \times [0, +\infty[$ $\mathbb{R}^2$-beli halmazok korlátosságát.

6) Határozza meg a $H_1 = [0, 1] \times [-1, 1[\times]0, 2[\subset \mathbb{R}^3$ és $H_2 = \left\{ \left(\frac{2}{n}, (-2)^n \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ halmazok átmérőjét.

7) Bizonyítsa be, hogy a $[-2, 2] \times [0, 4] \subset \mathbb{R}^2$ halmaz kompakt.

8) Vizsgálja a $H_1 =]0, 1[\times [0, 2] \times [0, 3] \subset \mathbb{R}^3$ és $H_2 = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, +\infty[\subset \mathbb{R}^3$ halmazok kompaktságát.

III. fejezet
Sorozatok $\mathbb{R}^k$-ban

3.1. feladat. Bizonyítsa be, hogy az $\left\langle \left(\frac{1}{n}, (-1)^n \right) \right\rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozat korlátos.

Megoldás. Be kell látnunk, hogy a sorozat elemeinek halmaza korlátos $\mathbb{R}^2$-ben. Ez igaz, ha teljesül az, hogy például a $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ pontnak $\exists\ r > 0$ sugarú környezete, mely tartalmazza a sorozat összes elemét.
Mivel

$$d\left(\left(\frac{1}{n}, (-1)^n \right), (0,0) \right) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 0 \right)^2 + ((-1)^n - 0)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + 1} \leq$$
$$\leq \sqrt{2} < \sqrt{3}$$

$\forall\ n \in \mathbb{N}$-re (hiszen $\sqrt{\frac{1}{n^2} + 1} \leq \sqrt{2} \iff \frac{1}{n^2} + 1 \leq 2 \iff \frac{1}{n^2} \leq 1 \iff \frac{1}{n} \leq 1 \iff n \geq 1$, ami igaz; és $\sqrt{2} < \sqrt{3} \iff 2 < 3 \iff 0 < 1$, ami szintén igaz), így a sorozat bármely eleme benne van a $(0,0)$ $\sqrt{3}$ sugarú környezetében.

3.2. feladat. Bizonyítsa be, hogy az $\left\langle \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{2n+1}{n} \right) \right\rangle$ $\mathbb{R}^3$-beli sorozat korlátos.

Megoldás. Az előbbiekhez hasonló gondolatmenet, a $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re egyszerűen adódó

$$\begin{aligned} d\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{2n+1}{n}\right), (0,0,0)\right) &= \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{n^2} - 0\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{n} - 0\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \frac{(2n+1)^2}{n^2}} \leq \sqrt{\frac{2+(2n+1)^2}{n^2}} < \\ &< \sqrt{\frac{2(2n+1)^2}{n^2}} < \sqrt{\frac{2(4n)^2}{n^2}} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

egyenlőtlenség miatt adja, hogy a sorozat minden eleme benne van a $(0,0,0)$ pont $4\sqrt{2}$ sugarú környezetében, így a sorozat korlátos.

3.3. feladat. Bizonyítsa be, hogy ha az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat konvergens, akkor egy határértéke van.

Megoldás. Tegyük fel, hogy $\exists\ a, b \in \mathbb{R}^k,\ a \neq b$, hogy $x_n \to a$ és $x_n \to b$ is teljesül.
Ez azt jelentené, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$-ra létezne $n(\varepsilon)$, hogy bármely $n \geq n(\varepsilon)$-ra $x_n \in K(a, \varepsilon)$ és $x_n \in K(b, \varepsilon)$ is teljesülne.
Válasszuk ε-t úgy, hogy $\varepsilon = \dfrac{d(a,b)}{2} > 0$, akkor (ahogy ezt korábban már beláttuk)

$$K\left(a, \frac{d(a,b)}{2}\right) \cap K\left(b, \frac{d(a,b)}{2}\right) = \emptyset\ ,$$

így ezen $\varepsilon > 0$ esetén a fentiek nem teljesülhetnek.
Így $a = b$, ami adja az állítást.

3.4. feladat. Definíció alapján vizsgálja az

$$\left\langle \left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right) \right\rangle \quad \text{és} \quad \left\langle \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^4}, \frac{2n+1}{n}\right) \right\rangle$$

sorozatok konvergenciáját.

Megoldás.

a) Belátjuk, hogy az $\left\langle \left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right) \right\rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozat divergens.
Ehhez azt kell megmutatni, hogy $\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$-re $\exists\ \varepsilon > 0$, hogy

$\forall\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ esetén $\exists n \geq n(\varepsilon)$, hogy

$$d\left(\left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right), (0,0)\right) \geq \varepsilon\ .$$

– Legyen (a,b) olyan, hogy $b = 0$ és $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$, akkor a $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re teljesülő

$$d\left(\left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right), (a,0)\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - a\right)^2 + ((-1)^n - 0)^2} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{n} - a\right)^2 + 1} \geq 1 > \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenség miatt

$$d\left(\left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right), (a,0)\right) > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

is igaz $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re, így $(a,0)$ nem határértéke a sorozatnak.

– Legyen most (a,b) olyan, hogy $b > 0$ és $\varepsilon = 1 > 0$, akkor $\forall$ páratlan $n \in \mathbb{N}$-re

$$d\left(\left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right), (a,b)\right) = d\left(\left(\frac{1}{n}, -1\right), (a,b)\right) =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{n} - a\right)^2 + (-1-b)^2} \geq$$
$$\geq \sqrt{(1+b)^2} = |1+b| \geq 1 = \varepsilon,$$

ami adja, hogy az ilyen (a,b) sem lehet határérték.

– Hasonlóan belátható, hogy olyan (a,b) sem lehet határérték, ahol $b < 0$.

b) Belátjuk, hogy az $\left\langle\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{2n+1}{n}\right)\right\rangle$ $\mathbb{R}^3$-beli sorozat konvergens és határértéke a $(0,0,2) \in \mathbb{R}^3$ pont.

A $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re teljesülő

$$d\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{2n+1}{n}\right), (0,0,2)\right) =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{n^2} - 0\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{n} - 2\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}} \leq \sqrt{\frac{3}{n^2}} = \frac{\sqrt{3}}{n}$$

egyenlőséget és azt felhasználva, hogy $\dfrac{\sqrt{3}}{n} \to 0$ miatt $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$-ra $\left|\dfrac{\sqrt{3}}{n} - 0\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{3} < \varepsilon$, kapjuk a sorozat konvergenciáját a $(0,0,2)$-höz.

3.5. feladat. Definíció alapján bizonyítsa be, hogy az

$$\langle x_n \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{k}{n}\right) \right\rangle$$

$\mathbb{R}^k$-beli sorozat konvergál a $\underline{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^k$-hoz.

Megoldás. Egyszerűen indokolható, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re

$$d(x_n, \underline{0}) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{n} - 0\right)^2 + \cdots + \left(\frac{k}{n} - 0\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + k^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}\,,$$

ahol $\sqrt{\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}} = c \in \mathbb{R}$ konstans.

Másrészt a $\left\langle \dfrac{c}{n} \right\rangle$ sorozat konvergens és határértéke 0, ami azt jelenti, hogy $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon),\ \forall\, n \geq n(\varepsilon) \implies \dfrac{c}{n} < \varepsilon$.

Ezek összevetése adja, hogy az $\langle x_n \rangle$ sorozatnál $x = (0, \ldots, 0) = \underline{0}$ választással $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon),\ \forall\, n \geq n(\varepsilon)$-ra $d(x_n, x) = d(x_n, \underline{0}) < \varepsilon$, azaz $\langle x_n \rangle$ konvergál a $\underline{0} \in \mathbb{R}^k$ elemhez.

3.6. feladat. Bizonyítsa be a Kalkulus II. III./1. fejezet 4. tételét, azaz, hogy:

Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat $\iff$ konvergens és határértéke $x \in \mathbb{R}^k$, ha $x_n = (x_{1n}, \ldots, x_{kn})$ jelöléssel az $\langle x_{1n} \rangle, \ldots, \langle x_{kn} \rangle$ (úgynevezett koordináta)

sorozatok konvergensek és az $x = (x_1, \dots, x_k)$ jelöléssel $x_{in} \to x_i$ $(i = 1, \dots, k)$.

Megoldás.

a) Ha $x_n \to x$, akkor $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n(\varepsilon),\ \forall\, n \geq n(\varepsilon) \;\; (n \in \mathbb{N})$ esetén $\|x - x_n\|_{\mathbb{R}^k} < \varepsilon \Longrightarrow \; |x_i - x_{in}| \leq \|x - x_n\|_{\mathbb{R}^k} < \varepsilon \;\; (i = 1, \dots, k)$, azaz $x_{in} \to x_i \;\; (i = 1, \dots, k)$.

b) Ha $x_{in} \to x_i \;\; (i = 1, \dots, k) \;\Longrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_i(\varepsilon) \;\; (i = 1, \dots, k)$, hogy $\forall\, n \geq n_i(\varepsilon) \;\; (n \in \mathbb{N}) \;\Longrightarrow\; |x_{in} - x_i| < \varepsilon \;\; (i = 1, \dots, k)$.
Ha $x = (x_1, \dots, x_k)$, akkor

$$n(\varepsilon) = \sup\left\{ n_i\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}\right) \;\mid\; i = 1, \dots, k \right\}$$

választással $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$ esetén

$$\|x - x_n\|_{\mathbb{R}^k} = \sqrt{(x_i - x_{in})^2 + \dots + (x_k - x_{kn})^2} < \sqrt{k \cdot \frac{\varepsilon^2}{k}} = \varepsilon \ ,$$

azaz $x_n \to x$ teljesül.

3.7. feladat. Vizsgálja a

a) $\left\langle \left(\cos\frac{n\pi}{2}, \frac{n+1}{n^2} \right) \right\rangle \quad \mathbb{R}^2$-beli ;

b) $\left\langle \left(\sqrt[n]{n}, \sin\frac{n+1}{n}\pi, \frac{\sin n}{n} \right) \right\rangle \quad \mathbb{R}^3$-beli ;

c) $\left\langle \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{k}{n} \right) \right\rangle \quad \mathbb{R}^k$-beli ;

sorozatok konvergenciáját.

Megoldás. A 6. feladatban bizonyított tételt használjuk.

a) A $\left\langle \cos\frac{n\pi}{2} \right\rangle$ $\mathbb{R}$-beli sorozat nem konvergens, mert $n = 2k + 1$ $(k = 0, 1, \dots)$ esetén

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0, \quad \text{így} \quad \lim_{k\to\infty} \cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0,$$

míg ha $n = 4k$ $(k \in \mathbb{N})$, akkor

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \cos 4k\frac{\pi}{2} = \cos 2k\pi = 0 \quad \text{miatt} \quad \lim_{k\to\infty} \cos 4k\frac{\pi}{2} = 0,$$

így van két olyan részsorozata, melynek határértéke különböző.
Mivel a $\left\langle \left(\cos\frac{n\pi}{2}, \frac{n+1}{n^2} \right) \right\rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozat első komponens sorozata nem konvergens, így sorozatunk sem.

b) Ismeretes, hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\pi = \pi \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} \sin x_n = \sin x_0, \text{ ha } x_n \to x_0$$

miatt

$$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{n+1}{n}\pi = \sin \pi = 0.$$

Míg

$$\frac{\sin n}{n} = \frac{1}{n}\sin n\ ,\ \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{és} \quad |\sin n| \le 1 \quad \text{miatt} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Így a sorozatunk minden komponens sorozata konvergens, ami adja konvergenciáját a 6. feladat miatt és azt is, hogy

$$\left(\sqrt[n]{n}, \sin \frac{n+1}{n}\pi, \frac{\sin n}{n}\right) \to (1,0,0).$$

c) Ha $i \in \mathbb{N}$ rögzített, úgy $\dfrac{i}{n} \to 0$, így ezen $\mathbb{R}^k$-beli sorozat minden komponens sorozata 0-sorozat, ezért konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{k}{n}\right) = (0,0,\dots,0).$$

3.8. feladat. Cauchy-sorozat-e a $\left\langle \left(\dfrac{2}{n^2}, (-1)^n\right)\right\rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozat.

Megoldás. Nem. Ehhez azt kell belátni, hogy $\exists\ \varepsilon > 0$, hogy $\forall\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ esetén $\exists\ p, q \in \mathbb{N},\ p, q \ge n(\varepsilon)$, hogy $d(x_p, x_q) \ge \varepsilon$.
Legyen $\varepsilon = 2\ \forall\ p = 2n,\ q = 2n+1\ (n \in \mathbb{N})$, esetén

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{2}{(2n)^2} - \frac{2}{(2n+1)^2}\right)^2 + ((-1)^{2n} - (-1)^{2n+1})^2} > \sqrt{2^2} = 2,$$

ami adja a nemleges választ.

3.9. feladat. Cauchy-sorozat-e az

$$\langle x_n \rangle = \left\langle \left(\frac{n^2+n+1}{n^3+2n^2+3}, \frac{2^n}{n!}, \sqrt[n]{2}\right)\right\rangle$$

$\mathbb{R}^3$-beli sorozat?

Megoldás. A korábbiakban tanultak szerint

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+2n^2+3} = 0 \ , \ \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0 \ , \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1,$$

így az $\langle x_n \rangle$ komponens sorozatai, ezért maga $\langle x_n \rangle$ is konvergens $(x_n \to (0,0,1))$.
Ez pedig a Cauchy-féle konvergenciakritérium miatt adja, hogy $\langle x_n \rangle$ Cauchy-sorozat.

Gyakorló feladatok

1) Vizsgálja a

$$\left\langle \left((-1)^n \frac{1}{n}, 1 + (-1)^n \right) \right\rangle$$

és

$$\left\langle \left(\frac{1}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \frac{1}{n^2}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \right) \right\rangle$$

sorozatok korlátosságát.

2) Vizsgálja a

$$\left\langle \left((-1)^n \frac{1}{n}, 1 + (-1)^n \right) \right\rangle$$

és

$$\left\langle \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, \frac{5n^2+3n-1}{-2n^2+5n-2} \right) \right\rangle$$

sorozatok konvergenciáját.

IV. fejezet

Többváltozós és vektorértékű függvények folytonossága, határértéke

4.1. feladat. Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

$$f_1(x,y) = \sin y \ ; \qquad f_2(x,y) = \cos\sqrt{x^2+y^2} \ ;$$

$$f_3(x,y) = \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2}} \ ; \qquad f_4(x,y) = \frac{1}{\sin(x^2+y^2)} \ ;$$

$$f_5(x,y) = \sqrt[4]{\ln(\cos xy)} \ ; \qquad f_6(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right) \ ;$$

Megoldás.

- A sin függvény $\forall\ y \in \mathbb{R}$ esetén értelmezett, így $D_{f_1} = \mathbb{R}^2$.
- Az $(x,y) \to \sqrt{x^2+y^2}$ függvénynek $x^2+y^2 \geq 0$ miatt $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re van értelme, a cos függvény is minden valós számra értelmezett, így $D_{f_2} = \mathbb{R}^2$.
- Az $(x,y) \to 3$ és $(x,y) \to \sqrt{x^2+y^2}$ függvények $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re értelmezettek, így hányadosuk akkor nem értelmezhető, ha a nevező 0, azaz $x^2+y^2 = 0 \iff (x,y) = (0,0)$.
  Ezért $D_{f_3} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- Az előbbihez hasonló meggondolással kapjuk, hogy $f_4 \iff$ nem értelmezett, ha $\sin(x^2+y^2) = 0 \iff x^2+y^2 = k\pi,\ k \in \{0,1,2,\ldots\}$, azaz a $(0,0)$ pontban és az origó középpontú $\sqrt{k\pi}$ sugarú körökön. Így

$$D_{f_4} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\,(x,y) |\, x^2+y^2 = k\pi,\ k = 0,1,2,\ldots\}.$$

- A $z \to \sqrt[4]{z}$ függvény akkor értelmezett, ha $z \geq 0$, így $\ln(\cos xy) \geq 0$ kell, hogy teljesüljön, ami $\iff$ igaz, ha $\cos(xy) \geq 1 \iff xy = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), vagyis ha (x,y) az x, vagy y tengelyen, vagy pedig az $xy = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) hiperbolákon van.
  Tehát $D_{f_5} = \{\,(x,y) |\, xy = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

– Az $x \to \arcsin x$ függvény értelmezési tartománya a $[-1,1]$ intervallum. Így $f_6 \iff$ értelmezett, ha $-1 \le \dfrac{x}{y} \le 1$ és $y \ne 0$ teljesül, azaz
$D_{f_6} = \left\{ (x,y) | \ -1 \le \dfrac{x}{y} \le 1, \ y \ne 0 \right\}$.

4.2. feladat. Korlátosak-e az alábbi függvények:

$$f_1(x,y) = \sin \sqrt[3]{x^2+y^2} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \ ,$$
$$f_2(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \ .$$

Megoldás.
– A $t \to \sin t$ $(t \in \mathbb{R})$ függvényre $-1 \le \sin t \le 1$ $(t \in \mathbb{R})$ teljesül, így $-1 \le \sin \sqrt[3]{x^2+y^2} \le 1$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ miatt az f_1 függvény értékkészlete korlátos, azaz f_1 korlátos.
– $\sqrt{x^2+y^2+1} \ge 1 \iff x^2+y^2+1 \ge 1 \iff x^2+y^2 \ge 0$ (ami igaz), így $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \le 1$ teljesül $\forall$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-re.
Másrészt
$$0 \le \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \iff 0 \le 1$$
(ami igaz) $\forall$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Ezek adják, hogy f_2 értékkészlete alulról és felülről is korlátos, így korlátos.

4.3. feladat. Bizonyítsa be a definíció alapján, hogy az

$$f_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

és

$$f_2(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{, ha } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvények folytonosak a $(0,0)$-pontban.

Megoldás. A folytonosság definíciója az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényekre a $(0,0)$-ban a következő: Az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény a $(0,0)$-ban folytonos, ha $\forall$ $\varepsilon > 0$-hoz $\exists$ $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $d((x,y),(0,0)) < \delta(\varepsilon)$ esetén
$|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$.

– Az f_1 függvényre

$$|f_1(x,y) - f_1(0,0)| = \left|\sqrt{x^2+y^2} - 0\right| = \sqrt{x^2+y^2} = \\ = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = d((x,y),(0,0))$$

$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re, így ha $\varepsilon > 0$-ra $\delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$, akkor $\sqrt{x^2+y^2} = d((x,y),(0,0)) < \varepsilon$ esetén $|f_1(x,y) - f_1(0,0)| < \varepsilon$, ami adja a folytonosságot.

– $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$-ra

$$|f_2(x,y) - f_2(0,0)| = (x^2+y^2)\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \le x^2+y^2 = \\ = d^2((x,y),(0,0)),$$

így ha adott $\varepsilon > 0$-ra $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} > 0$, akkor $d((x,y),(0,0)) < \delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$ esetén $d^2((x,y),(0,0)) < \varepsilon$, így $|f_2(x,y) - f_2(0,0)| < \varepsilon$, azaz f_2 folytonos $(0,0)$-ban.

4.4. feladat. A definíció alapján bizonyítsa be, hogy

a) az $f_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = x + 2y + z$ függvény folytonos $\forall\ (x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$-ban;

b) az $f_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{, ha } x^2+y^2+z^2 > 0 \\ 0 & \text{, ha } x^2+y^2+z^2 = 0 \end{cases}$ függvény folytonos a $(0,0,0)$ pontban.

Megoldás.

a) Nyilvánvaló, hogy

$$|x-x_0|,\ |y-y_0|,\ |z-z_0| \le \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = \\ = d((x,y,z),(x_0,y_0,z_0)).$$

Másrészt $\forall\ (x,y,z),\ (x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$-ra

$$\begin{aligned} |f_1(x,y,z) - f_1(x_0,y_0,z_0)| &= |(x+2y+z) - (x_0+2y_0+z_0)| = \\ &= |(x-x_0) + 2(y-y_0) + (z-z_0)| \le \\ &\le |x-x_0| + 2|y-y_0| + |z-z_0| \le \\ &\le 2(|x-x_0| + |y-y_0| + |z-z_0|) \le \\ &\le 6d((x,y,z),(x_0,y_0,z_0)). \end{aligned}$$

Így, ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{6} > 0$, akkor

$$d((x,y,z),(x_0,y_0,z_0)) < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{6}$$

esetén

$$|f_1(x,y,z) - f_1(x_0,y_0,z_0) < 6\frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon \ ,$$

ami adja f_1 folytonosságát $\forall\ (x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ esetén.

b) $\forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ esetén

$$|f_2(x,y,z) - f_2(0,0,0)| = \frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} =$$

$$= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\frac{|x||y||z|}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} =$$

$$= d((x,y,z),(0,0,0))\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{|z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq$$

$$\leq d((x,y,z),(0,0,0)),$$

ezért $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ választás adja az állítást.

4.5. feladat. Vizsgálja az alábbi függvények folytonosságát:

a) $f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, a $(0,0)$ pontban;

b) $f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & , \text{ ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, a $(0,0)$ pontban;

c) $f_3(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \text{ ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, a $(0,0)$ pontban.

Megoldás. Az átviteli elv szerint az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény $\Longleftrightarrow$ folytonos a $(0,0)$-ban, ha $\forall\ \langle (x_n,y_n)\rangle$, $(x_n,y_n) \to (0,0)$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozatra $f(x_n,y_n) \to f(0,0)$.

a) Ha tekintjük az $\langle (x_n,x_n)\rangle$ sorozatot, hogy $(x_n,x_n) \to (0,0)$, akkor

$$f_1(x_n,x_n) = \frac{x_n \cdot x_n}{x_n^2+x_n^2} = \frac{1}{2} \not\to 0 = f(0,0),$$

így f_1 nem folytonos $(0,0)$-ban.

b) Tekintsük az $\langle (x_n, x_n^2) \rangle$ sorozatot, hogy $(x_n, x_n^2) \to (0,0)$, akkor

$$f_2(x_n, x_n^2) = \frac{x_n^2 \cdot x_n^2}{x_n^4 + x_n^4} = \frac{1}{2} \not\to 0 = f(0,0),$$

így f_2 nem folytonos $(0,0)$-ban.

c) Legyen $\langle (x_n, y_n) \rangle$ tetszőleges $\mathbb{R}^2$-beli sorozat, hogy $(x_n, y_n) \to (0,0)$, ez a korábbiak szerint (lásd sorozatok) $\Longleftrightarrow$ teljesül, ha $x_n \to 0,\ y_n \to 0$. Ekkor $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ esetén

$$0 \leq |f_3(x_n, y_n)| = \left| x_n y_n \cdot \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \right| =$$
$$= \frac{|x_n|}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \cdot \frac{|y_n|}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \cdot |x_n^2 - y_n^2| \leq |x_n^2 - y_n^2|$$

és $|x_n^2 - y_n^2| \to 0$ miatt (a rendőr-elv szerint)
$|f_3(x_n, y_n)| \to 0$, ami $\Longleftrightarrow$ teljesül, ha $f_3(x_n, y_n) \to 0 = f(0,0)$.
Ez pedig adja, hogy f_3 folytonos $(0,0)$-ban.

4.6. feladat. Folytonos-e az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \left((x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}\ ,\ xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right),\ \text{ha } (x,y) \neq (0,0),$$
$$f(0,0) = (0,0) \text{függvény a } (0,0) \text{pontban.}$$

Megoldás. A Kalkulus II. jegyzet IV. 2. fejezet 2. tétele szerint az $f : E \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ ($f = (f_1, f_2, \ldots, f_m),\ f_i\colon E \to \mathbb{R}$) függvény $\Longleftrightarrow$ folytonos $x_0 \in E$-ben, ha az f_i függvények folytonosak.
Az első komponens függvény a 3. feladat, a második függvény az 5. feladat miatt folytonos $(0,0)$-ban, így f is.

4.7. feladat. Bizonyítsa be, hogy az $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (\cos x, \sin x)$ függvény folytonos $[0, 2\pi]$-n.

Megoldás. Az $f_1(x) = \cos x,\ f_2(x) = \sin x$ ($x \in [0, 2\pi]$) egyváltozós függvények folytonosak (ezek f komponens függvényei), így f is.

4.8. feladat. Egyenletesen folytonosak-e az

a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_1(x,y) = x + 4y - 1;$

b) $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_2(x,y) = x + y^2$

függvények?

Megoldás. Azt kell vizsgálni, hogy igaz-e a definíció ilyen függvényekre, azaz hogy:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall\, (x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2\ d((x,y),(u,v)) < \delta(\varepsilon)$$

esetén $|f_1(x,y) - f_1(u,v)| < \varepsilon$.

a) $\forall\, (x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2$-re

$$\begin{aligned}|f_1(x,y) - f_1(u,v)| &= |(x+4y-1) - (u+4v-1)| = \\ &= |(x-u) + 4(y-v)| \le |x-u| + 4|y-v| \le \\ &\le d((x,y),(u,v)) + 4d((x,y),(u,v)) = \\ &= 5d((x,y),(u,v)).\end{aligned}$$

Legyen adott $\varepsilon > 0$-ra $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{5} > 0$, akkor az előbbiek miatt

$$d((x,y),(u,v)) < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{5} \implies |f_1(x,y) - f_1(u,v)| < \varepsilon,$$

így f_1 egyenletesen folytonos $\mathbb{R}^2$-n.

b) Megmutatjuk, hogy f_2 nem egyenletesen folytonos $\mathbb{R}^2$-n.
Ehhez azt kell belátni, hogy: $\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \delta(\varepsilon) > 0$-ra
$\exists\, (x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ d((x,y),(u,v)) < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f_2(x,y) - f_2(u,v) \ge \varepsilon$.
Legyen $\varepsilon = 2$, úgy $\forall\, \delta(\varepsilon) > 0$-ra $\exists\, n \in \mathbb{N}$, hogy $\dfrac{1}{n} < \delta(\varepsilon)$.
Ha $(x,y) = (0,n)$ és $(u,v) = \left(0, n + \dfrac{1}{n}\right)$, úgy

$$d((x,y),(u,v)) = \sqrt{(0-0)^2 + \left(n - \left(n + \frac{1}{n}\right)\right)^2} = \frac{1}{n} < \delta(\varepsilon)$$

és

$$|f_2(x,y) - f_2(u,v) = \left| n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 \right| = 2 + \frac{1}{n^2} \ge 2,$$

azaz f_2 nem egyenletesen folytonos $\mathbb{R}^2$-n.

4.9. feladat. Egyenletesen folytonos-e az

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ f(x) = Ax + b$$

függvény, ahol A $m \times n$-es nem null mátrix, $b \in \mathbb{R}^m$ adott vektor.

Megoldás. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\begin{aligned}||f(x) - f(y)||_{\mathbb{R}^m} &= ||(Ax+b) - (Ay+b)||_{\mathbb{R}^m} = ||Ax - Ay||_{\mathbb{R}^m} = \\ &= ||A(x-y)||_{\mathbb{R}^m} \le ||A|| \cdot ||x-y||_{\mathbb{R}^n}.\end{aligned}$$

Így $||A|| \neq 0$ miatt, ha adott $\varepsilon > 0$-ra $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{||A||} > 0$, úgy $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén, ha $d(x,y) = ||x-y||_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon)$, akkor $||f(x) - f(y)||_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$, ezért f egyenletesen folytonos $\mathbb{R}^n$-en.

4.10. feladat. A definíció alapján bizonyítsa be, hogy az

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

függvénynek létezik határértéke $(0,0)$-ban.

Megoldás. A $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ torlódási pontja a $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ halmaznak. Azt kell megmutatni, hogy $A = 0$ választással $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ \ 0 < d((x,y),(0,0)) < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$. $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ esetén

$$|f(x,y) - 0| = (x^2+y^2)\left|\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leq x^2+y^2 = d^2((x,y),(0,0)),$$

ezért $\forall\ \varepsilon > 0$-ra, ha $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} > 0$, akkor

$$0 < d((x,y),(0,0)) < \delta(\varepsilon) \doteq \sqrt{\varepsilon} \implies |f(x,y) - 0| < \varepsilon,$$

így

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2} = 0.$$

4.11. feladat. Bizonyítsa be, hogy az alábbi függvényeknek nem létezik határértéke a $(0,0)$ pontban:

a) $\quad f_1\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f_1(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

b) $\quad f_2\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f_2(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Megoldás. Az átviteli elvet használjuk a határértékre.

a) $(0,0) \in D_{f_1}$.

Tekintsük először az $\langle x_n \rangle = \left\langle \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \right\rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozatot, melyre $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \to (0,0)$, akkor

$$f_1\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 0 \to 0.$$

Ha $\langle x_n \rangle = \left\langle \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\rangle$, úgy $x_n \to (0,0)$ és

$$f_1\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2 - \frac{1}{n^2}}{\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5} \to \frac{3}{5}\ .$$

Így nem teljesül, hogy $\exists\ A \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\ x_n \to (0,0)$ $(x_n \in D_f)$, akkor $f_1(x_n) \to A$, ezért f_1-nek nem létezik határértéke $(0,0)$-ban.

b) $(0,0) \in D'_{f_2}$.

Ha $\langle x_n \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\rangle$, úgy $x_n \to (0,0)$ és

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{n}{\sqrt{2}} \to +\infty,$$

ezért nem létezik f-nek véges határértéke.

Ugyanakkor a 3. feladathoz hasonlóan beláthatjuk, hogy $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, így a Kalkulus II. jegyzet IV. 6. fejezet 2. tétele szerint kapjuk, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\infty,$$

azaz f-nek $(0,0)$-ban a határértéke $+\infty$.

4.12. feladat. Bizonyítsa be, hogy

$$\exists \lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \frac{2}{5}\ .$$

Megoldás. $(2,-1)$ torlódási pontja az

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

függvény értelmezési tartományának.

Legyen $\langle (x_n, y_n) \rangle$ tetszőleges olyan $\mathbb{R}^2$-beli sorozat, hogy $(x_n, y_n) \to (2,-1)$, akkor $x_n \to 2,\ y_n \to -1$ és

$$\lim_{n\to\infty} f_1(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n^2 = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n^2) = 2 \cdot 1 = 2$$

és

$$\lim_{n\to\infty} f_2(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n^2 + y_n^4) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 + \lim_{n\to\infty} y_n^4 = 4 + 1 = 5,$$

illetve a műveleti tulajdonságok miatt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^4} = \frac{2}{5} \ ,$$

ami az átviteli elv szerint adja állításunkat.

Gyakorló feladatok

1) Határozza meg az

$$f_1(x,y) = \exp(x+y) \ ; \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{\cos(x^2+y^2)} \ ;$$

$$f_3(x,y) = \arccos \frac{2y}{x^2+y^2-1}$$

függvények értelmezési tartományát.

2) Korlátosak-e az

$$f_1(x,y) = \arcsin \frac{x}{y} \qquad \left(-1 \le \frac{x}{y} \le 1, \ y \ne 0\right),$$

$$f_2(x,y,z) = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+2}} \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

függvények?

3) Vizsgálja az

$$f_1(x,y) = \begin{cases} (x+y)\cos\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y} & , \text{ ha } xy \ne 0 \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

és

$$f_2(x,y) = \sqrt[3]{xy} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvények folytonosságát a $(0,0)$ pontban.

4) Folytonosak-e az

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{ ha } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

és

$$f_2(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

függvények a $(0,0)$ illetve $(0,0,0)$ pontban.
És az $(x_0,y_0) \ne (0,0)$ illetve $(x_0,y_0,z_0) \ne (0,0,0)$ pontban?

5) Egyenletesen folytonos-e az $f_1(x,y) = x^2 + y \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény $\mathbb{R}^2$-n, illetve a $[0,1] \times [1,2]$ téglalapon?

6) Léteznek-e a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

és

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{3xyz}{x^2+y^2+z^2}$$

határértékek?

V. fejezet

A Riemann-integrál általánosítása és alkalmazása

1. Korlátos változású függvények

5.1. feladat. Bizonyítsa be, hogy

$$V(f,[a,b]) = f(b) - f(a), \text{ ha } f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ monoton növekedő,}$$
$$V(f,[a,b]) = f(a) - f(b), \text{ ha } f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ monoton csökkenő.}$$

Megoldás.

– Ha f növekedő, akkor $\forall\ P$ felosztására $[a,b]$-nek

$$\begin{aligned} V(f,[a,b],P) &= \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \\ &= (f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \cdots \\ &+ (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(x_{k+1}) - f(x_0) = f(b) - f(a), \end{aligned}$$

így $V(f,[a,b]) = \sup\limits_P V(f,[a,b],P) = f(b) - f(a)$.

– Ha f csökkenő, úgy $\forall\ P$-re

$$\begin{aligned} V(f,[a,b],P) &= \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = -\sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \\ &= -(f(b) - f(a)) = f(a) - f(b), \end{aligned}$$

így $V(f,[a,b]) = \sup\limits_P V(f,[a,b],P) = f(a) - f(b)$.

Megjegyzés. Ha f konstans $[a,b]$-n, akkor nyilván $f(a) = f(b)$, így $V(f,[a,b]) = 0$.

5.2. feladat. Bizonyítsa be, hogy ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ adott függvény, $c \in [a,b]$ tetszőleges, akkor

$$V(f,[a,b]) = V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]).$$

(Kalkulus II. IV. 1. fejezet 4. tétel).

Megoldás.

– Legyen P_1 $[a,c]$, P_2 $[c,b]$ egy felosztása, akkor $P_1 \cup P_2$ felosztása $[a,b]$-nek és (1) miatt

$$V(f,[a,b],P_1 \cup P_2) = V(f,[a,c],P_1) + V(f,[c,b],P_2)$$

következik, amiből (2) miatt előbb

$$V(f,[a,c],P_1) + V(f,[c,b],P_2) \leq V(f,[a,b]) \ ,$$

majd

$$V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]) \leq V(f,[a,b]) \tag{5}$$

következik.

– Legyen most $P \doteq \{a = x_0, x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n = b\}$ $[a,b]$ tetszőleges felosztása, hogy $x_j \leq c \leq x_{j+1}$, akkor

$$P_1 = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_j, c\}, \qquad P_2 = \{c, x_{j+1}, \ldots, x_n = b\}$$

felosztása $[a,c]$, illetve $[c,b]$-nek, továbbá

$$|f(x_{j+1}) - f(x_j)| \leq |f(x_{j+1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_j)|$$

miatt

$$\begin{aligned} V(f,[a,b],P) &= \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{j-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(c) - f(x_j)| + |f(x_{j+1}) - f(c)| + \\ &+ \sum_{k=j+1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \\ &= V(f,[a,c],P_1) + V(f,[c,b],P_2) \leq V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]) \ , \end{aligned}$$

illetve

$$V(f,[a,b]) \leq V(f,[a,c]) + V(f,[c,b])$$

adódik, mely (5)-tel együtt adja az állítást.

Megjegyzés. Ha $c_1, \ldots, c_n \in [a,b]$, úgy

$$V(f,[a,b]) = V(f,[a,c_1]) + V(f,[c_1,c_2]) + \cdots + V(f,[c_n,b]) \ .$$

5.3. feladat. Korlátos változásúak-e az alábbi függvények:

$$f_1(x) = \sin^2 x \qquad (x \in [0,\pi]) \ ;$$

$$f_2(x) = x^3 - 3x + 4 \qquad (x \in [0,2]) \ ;$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } x \in [0,1[\\ \dfrac{1}{2} & , \text{ ha } x \in [1,2[\\ 2 & , \text{ ha } x \in [2,3] \end{cases} \ ;$$

$$f_4(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{x} & , \text{ ha } x \in]0,1] \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \ . \end{cases}$$

Megoldás.

- Az $f_1(x) = \sin^2 x$ $(x \in [0,\pi])$ fügvény monoton növekedő a $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ és monoton csökkenő a $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ intervallumon (hiszen $\exists\ f_1'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$ és $\sin 2x \geq 0$, ha $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, illetve $\sin 2x \leq 0$, ha $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$), így f_1 korlátos változású a $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ és $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ intervallumokon (mert monoton függvény korlátos változású).
  Ekkor viszont az előző feladatban bizonyított Kalkulus II. jegyzetben is szereplő tételt követő 1. következmény szerint f_1 korlátos változású a $[0,\pi] = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ intervallumon.
- Az $f_2(x) = x^3 - 3x + 4$ $(x \in [0,2])$ függvényre $\exists\ f_2'(x) = 3x^2 - 3$ $(x \in [0,2])$ és $f_2'(x) = 3x^2 - 3 \geq 0 \iff |x| \geq 1$, illetve $f_2'(x) = 3x^2 - 3 \leq 0 \iff |x| \leq 1$ miatt f_2 monoton csökkenő és így korlátos változású a $[0,1]$, illetve monoton növekedő és ezért korlátos változású az $[1,2]$ intervallumon.
  Így – az f_1-nél alkalmazott befejezéssel – f_2 korlátos változású a $[0,2]$-n.
- Egyszerűen ellenőrízhető, hogy az f_3 függvény monoton növekedő, így korlátos változású.
- Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor korlátos változású, ha

$$V(f,[a,b]) \doteq \sup V(f,[a,b],P) = \sup_P \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < +\infty \ ,$$

  ahol $P \doteq \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ $[a,b]$ tetszőleges felosztása.
  Ha $\exists\ \langle P_n \rangle$ felosztássorozata $[a,b]$-nek, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} V(f,[a,b],P_n) = +\infty$, akkor nyilván nem véges $V(f,[a,b])$, így f nem korlátos változású.

Legyen $P_n \doteq \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1\right\}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re.

$$f_4\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}\cos k\pi = (-1)^k \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

és $f(0) = 0$, így

$$V(f_4, [0,1], P_n) = \left|-1 - \frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right| + \dots + \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| \geq$$
$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\ .$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, mégpedig $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$, így (a korábban tanultak szerint) $\lim\limits_{n\to\infty} V(f_4, [0,1], P_n) = +\infty$, ezért $V(f_4, [0,1]) = +\infty$, azaz f_4 nem korlátos változású.

5.4. feladat. Határozza meg $V(f, [a,b])$-t, ha

a) $f_1(x) = \sin x, \quad x \in [0, 2\pi] = [a,b]$;

b) $f_2(x) = |\sin x|, \quad x \in [0, 10\pi] = [a,b]$;

c) $f_3(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{, ha } x \in [-1,0] \\ x - x^2 & \text{, ha } x \in]0,1] \end{cases}, \quad x \in [-1,1] = [a,b].$

Megoldás. Az első feladathoz fűzött megjegyzést és a 3. feladat eredményét használjuk.

a) Legyen $c_1 = \frac{\pi}{2}$, $c_2 = \frac{3\pi}{2}$, akkor az 1. feladat megjegyzése miatt:

$$V(f_1, [0, 2\pi]) = V\left(f_1, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) + V\left(f_1, \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right) + V\left(f_1, \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]\right)$$

A sin függvény növekedő $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$-n, így a 3. feladat miatt

$$V\left(f_1, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

A sin függvény csökkenő $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$-n, így

$$V\left(f_1, \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right) = 1 - (-1) = 2.$$

A sin függvény növekedő $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$-n, így

$$V\left(f_1, \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]\right) = 0 - (-1) = 1.$$

Ezért

$$V(f_1, [0, 2\pi]) = 4.$$

b) Legyen $c_1 = \frac{\pi}{2},\ c_2 = \pi,\ c_3 = 3\frac{\pi}{2}, \dots,\ c_{19} = 19\frac{\pi}{2}$, akkor

$$V(f_2, [0, 10\pi]) = V\left(f_2, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) + V\left(f_2, \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right) + \cdots$$
$$+ V\left(f_2, \left[19\frac{\pi}{2}, 10\pi\right]\right).$$

Másrészt az $f_2 = |\sin|$ függvény a $[0, c_1], \dots, [c_{19}, 10\pi]$ intervallumokon váltakozva növekedő illetve csökkenő, továbbá a totális variáció minden részintervallumon 1, így

$$V(f_2, [0, 10\pi]) = 20.$$

c) Legyen $c_1 = 0,\ c_2 = \frac{1}{2}$, akkor

$$V(f_3, [-1, 1]) = V(f_3, [-1, 0]) + V\left(f_3, \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) + V\left(f_3, \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right).$$

Egyszerűen belátható, hogy f_3 csökkenő a $[-1, 0]$, növekedő a $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ és csökkenő az $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ intervallumokon, és hogy

$$V(f_3, [-1, 0]) = 1, \quad V\left(f_3, \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = 1\frac{1}{4} \quad \text{és } V\left(f_3, \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \frac{1}{4},$$

ezért

$$V(f_3, [-1, 1]) = \frac{5}{2}\ .$$

2. Riemann-Stieltjes integrál

5.5. feladat. Létezik-e $\int\limits_a^b f\ dg$, ha

a) $f_1(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & , \text{ ha } x \in]0,1[\\ 1 & , \text{ ha } x \in [1,2] \end{cases}$, $\quad g_1(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } x \in [0,1[\\ x & , \text{ ha } x \in [1,2] \end{cases}$,

b) $f_2(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 2 & , \text{ ha } x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$, $\quad g_2(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 1 & , \text{ ha } x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$.

Megoldás.

a) Legyen $\langle P_n \rangle$ egy tetszőleges normális felosztássorozata $[0,2]$-nek, hogy $P_n = \{0 = x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{n_k}^n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, $t_k^n \in [x_{k-1}^n, x_k^n]$ tetszőleges, akkor ha $1 \in [x_i^n, x_{i+1}^n]$, úgy

$$\begin{aligned} \sigma(f_1, g_1, P_n) &= \sum_{k=1}^{n_k} f_1(t_k^n)[g_1(x_k^n) - g_1(x_{k-1}^n)] = \\ &= f_1(t_1^n)(1-1) + \cdots + f_1(t_i^n)(1-1) + f_1(t_{i+1}^n)(x_{i+1}^n - 1) + \\ &+ 1(x_{i+2}^n - x_{i+1}^n) + 1(x_{i+3}^n - x_{i+2}^n) + \cdots + (2 - x_{n_k}^n - 1) = \\ &= f_1(t_{i+1}^n)(x_{i+1}^n - 1) - x_{i+1}^n + 2. \end{aligned}$$

$\langle P_n \rangle$ normális, $1 \in [x_i^n, x_{i+1}^n]$ (ahol i nyilván függ n-től), így $\lim\limits_{n\to\infty} x_{i+1}^n = 1$ és f_1 folytonossága miatt $\lim\limits_{n\to\infty} f_1(t_{i+1}^n) = f_1(1) = 1$, melyek adják, hogy

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sigma(f_1, g_1, P_n) = 1 \quad \forall\ \sigma(f_1, g_1, P_n)\text{-re},$$

ami definíció szerint adja, hogy $\exists \int\limits_0^2 f_1\ dg_1 = 1$.

b) Legyen $\langle P_n \rangle = \left\langle \left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n}{n} = 1\right\} \right\rangle$ a $[0,1]$ n egyenlő részre osztásával nyert normális felosztássorozat. Ha $n = 2k$, úgy $\dfrac{1}{2} = \dfrac{k}{2k}$ osztáspont, ha n páratlan úgy nem, ezért $n = 2k$ mellett

$$\begin{aligned} \sigma(f, g, P_{2k}) &= 1 \cdot 0 + \cdots + 1 \cdot 0 + 1(1-0) + 2(1-1) + \cdots \\ &\quad + 2(1-1) = 1, \end{aligned}$$

ha $t^n_{k_n} \neq 1$ és (hasonló számolással) $\sigma(f, g, P_{2k}) = 2$, ha $t^n_k = 1$.
Az első esetben $\sigma(f, g, P_{2k}) \to 1$, a másodikban $\sigma(f, g, P_{2k}) \to 2$
$\Longrightarrow \nexists \int\limits_0^1 f_2 \, dg_2$.

5.6. feladat. Vizsgálja meg, hogy létezik-e $\int\limits_a^b f \, dg$ (ha létezik, úgy számítsa ki értékét), ha

a) $f_1(x) = x, \qquad g_1(x) = \sin x \qquad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$,

b) $f_2(x) = x, \qquad g_2(x) = e^{|x|} \qquad (x \in [-1, 1])$,

c) $f_3(x) = x^5, \qquad g_3(x) = |x|^3 \qquad (x \in [-1, 2])$.

Megoldás. Ismeretesek a következők:

– Ha $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású, akkor $\exists \int\limits_a^b f \, dg$ (elegendő feltétel).

– Ha $\int\limits_a^b f \, dg$ és $\int\limits_a^b g \, df$ egyike létezik, akkor a másik is és

$$\int\limits_a^b f \, dg + \int\limits_a^b g \, df = [f \cdot g]_a^b$$

(a parciális integrálás tétele).

– Ha $a < c < b$ és

$$\exists \int\limits_a^b f \, dg, \int\limits_a^c f \, dg \text{ és } \int\limits_c^b f \, dg \Longrightarrow \int\limits_a^b f \, dg = \int\limits_a^c f \, dg + \int\limits_c^b f \, dg$$

(additivitás az intervallumra).

– Ha $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, f és g' folytonos $\Longrightarrow \exists \int\limits_a^b f \, dg = \int\limits_a^b f(x) g'(x) \, dx$.
(„visszavezetés” Riemann-integrálra).

a) f_1 folytonos, g_1 korlátos változású (mert monoton), így $\exists \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \, d(\sin x)$ és a parciális integrálás tételét felhasználva:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ d(\sin x) = [x \cdot \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

b) f_2 folytonos,

$$g_2(x) = \begin{cases} e^x & , \text{ ha } x \in [0,1] \\ e^{-x} & , \text{ ha } x \in [-1,0] \end{cases},$$

így g_2 monoton csökkenő $[-1,0]$-n, ezért itt korlátos változású, monoton növekedő $[0,1]$-n, így itt is korlátos változású. Ezek adják, hogy g_2 $[-1,1]$-n is korlátos változású.

Tehát $\exists \int_{-1}^{1} x\ d(e^{|x|})$ és a parciális integrálás tétele, valamint a Riemann-integrál tulajdonságai alapján:

$$\int_{-1}^{1} x\ d(e^{|x|}) = [x \cdot e^{|x|}]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{|x|}\ dx =$$

$$= 2e - \left[\int_{-1}^{0} e^{-x}\ dx + \int_0^1 e^x\ dx\right] =$$

$$= 2e - \left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_{-1}^{0} - [e^x]_0^1 = 2e + 1 - e - e + 1 = 2.$$

c) f_3 folytonos, g_3 korlátos változású a $[-1,2]$, $[-1,0]$, $[0,2]$ intervallumokon, így azokon léteznek a Riemann-Stieltjes integrálok és

$$\int_{-1}^{2} x^5\ d(|x|^3) = \int_{-1}^{0} x^5\ d(-x^3) + \int_0^2 x^5\ d(x^3) =$$

$$= \int_{-1}^{0} x^5(-3x^2)\ dx + \int_0^2 x^5 3x^2\ dx =$$

$$= -3\left[\frac{x^8}{8}\right]_{-1}^{0} + 3\left[\frac{x^8}{8}\right]_0^2 = \frac{3}{8} + 3\frac{2^8}{2^3} = \frac{3}{8} + 96 = 96\frac{3}{8}$$

(a visszavezetést is használva).

3. Görbék, görbementi integrál

5.7. feladat. Bizonyítsa be, hogy a

$$G = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$$

egységkör egy paraméteres előállítása az $\underline{f} = (\cos, \sin)\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ (nyilván) folytonos függvény.

Megoldás. Meg kell mutatni, hogy

$$G = \Gamma = \{\, (\cos t, \sin t) \,|\, t \in [0, 2\pi]\}.$$

Ismeretes, hogy $\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \ \forall\ t \in [0, 2\pi]$, így $\Gamma \subset G$.
Megmutatjuk, hogy $\forall\ (x, y) \in G$-re pontosan egy $t \in [0, 2\pi]$ létezik, hogy $(x, y) = (\cos t, \sin t) \in \Gamma$ (azaz $G \subset \Gamma$ is igaz).
$x^2 + y^2 = 1$ miatt $x, y \in [-1, 1]$.
Ha $x, y \in [0, 1]$, úgy egy és csak egy $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ létezik, hogy $\cos t = x$ (hiszen a cos függvény folytonos és szigorúan monoton csökkenő $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$-n és $\cos 0 = 1$, $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$, így 0 és 1 között minden értéket felvesz és csak egyszer).
Ekkor

$$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2} = y,$$

másrészt $t \in \left(\dfrac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ esetén $\cos t \in [0, 1]$ és $\sin t \in [0, 1]$ egyszerre nem teljesül, ezért ebben az esetben igazoltuk az állítást.
A többi esetben, vagyis ha $x, y \in [-1, 0]$; $x \in [0, 1]$ és $y \in [-1, 0]$ vagy fordítva, hasonlóan járhatunk el.

5.8. feladat. Bizonyítsa be, hogy az $\underline{f} = (\cos, \sin)\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ egységkör sima zárt görbe.

Megoldás. $\underline{f}' = (-\sin, \cos)\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ és a $-\sin$ és cos függvények folytonossága miatt f' folytonos, továbbá

$$\sum_{i=1}^{2} f_i'^2(t) = (-\sin(t))^2 + \cos^2 t = \sin^2 t + \cos^2 t = 1 > 0,$$

ami definíció szerint adja, hogy az egységkör sima görbe.
Másrészt

$$\underline{f}(0) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi) = \underline{f}(2\pi),$$

az zárt is.

5.9. feladat. Legyen $\underline{f} = (f_1, f_2)\colon [-3,3] \to \mathbb{R}^2$, ahol $f_1(t) = t^2 - t$, $f_2(t) = t^3 - 3t$. Van-e az $\underline{f}$ görbének többszörös pontja?

Megoldás. $\underline{f}(-1) = (2,2) = \underline{f}(2)$, így $(2,2)$ többszörös pont.

5.10. feladat. Bizonyítsa be, hogy az $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ pontokat összekötő szakasz ívhossza $\|\underline{x} - \underline{y}\|_{\mathbb{R}^n}$.

Megoldás. Az adott szakasz paraméteres előállítását az

$$\underline{f}(t) = \underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x}) = (x_1 + t(y_1 - x_1), \cdots, x_n + t(y_n - x_n)) \quad (t \in [0,1])$$

folytonos függvény adja.
Ha $P = \{0 = t_0, t_1, \ldots, t_m = 1\}$ a $[0,1]$ egy felosztása, akkor

$$\begin{aligned} l(\underline{f}, P) &= \sum_{i=1}^{m} \|(\underline{x} + t_i(\underline{y} - \underline{x})) - (\underline{x} + t_{i-1}(\underline{y} - \underline{x}))\|_{\mathbb{R}^n} = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \|(t_i - t_{i-1})(\underline{y} - \underline{x})\|_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1}) \|\underline{y} - \underline{x}\|_{\mathbb{R}^n} = \\ &= \|\underline{y} - \underline{x}\|_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|_{\mathbb{R}^n}(1 - 0) = \|\underline{x} - \underline{y}\|_{\mathbb{R}^n}\ , \end{aligned}$$

melyből nyilván következik, hogy

$$l(\underline{f}) = \sup_P \{l(\underline{f}, P)\} = \|x - y\|_{\mathbb{R}},$$

és ezt kellett bizonyítani.

5.11. feladat. Rektifikálható-e az

$$\underline{f}(t) = \left(t, \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}} \cos \dfrac{\pi}{t} & , \text{ ha } t > 0 \\ 0 & , \text{ ha } t = 0 \end{cases} \right) \quad (t \in [0,1])$$

$\mathbb{R}^2$-beli görbe?

Megoldás. Megmutatjuk, hogy $\sup_P \{l(\underline{f}, P)\} = +\infty$.

Ha $P_n \doteq \left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n-1}, \ldots, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ a $[0,1]$ egy felosztássorozata, úgy

$$\underline{f}\left(\frac{1}{i}\right) = \left(\frac{1}{i}, (-1)^i \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{i}}}\right) = \left(\frac{1}{i}, (-1)^i \sqrt{i}\right) \ (i = 1, 2, \ldots, n), \ \underline{f}(0) = (0,0)$$

miatt

$$l(\underline{f}, P_n) = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2 + (\sqrt{2}-(-\sqrt{3}))^2} + \cdots$$
$$+ \sqrt{\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)^2 + (\sqrt{n-1}-(-\sqrt{n}))^2} >$$
$$> (1+\sqrt{2}) + (\sqrt{2}+\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n-1}+\sqrt{n}) > \sqrt{n},$$

ami $\sqrt{n} \to +\infty$ miatt adja, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} l(\underline{f}, P_n) = +\infty$, ezért $\sup\limits_P \{l(\underline{f}, P)\} = +\infty$, vagyis görbénk nem rektifikálható.

5.12. feladat. Határozza meg az alábbi görbék ívhosszát:

$$f(t) = (3\cos t, 3\sin t, 2t) \quad (t \in [0, 2\pi]) \ ;$$
$$g(t) = \left(t, \frac{3}{2}t^2, \frac{3}{2}t^3\right) \quad (t \in [0, 2]) \ ;$$
$$h(t) = (t\cos t, t\sin t, t) \quad \left(t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right).$$

Megoldás. Alkalmazható a sima görbék rektifikálhatóságára és ívhosszának kiszámítására vonatkozó tétel.
E szerint

$$l(\underline{f}) = \int_a^b \|f'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i'^2(t)} \, dt.$$

– $\underline{f}$ komponens függvényei:

$$f_1(t) = 3\cos t \implies \exists\ f_1'(t) = -3\sin t \text{ és } f_1' \text{ folytonos;}$$
$$f_2(t) = 3\sin t \implies \exists\ f_2'(t) = 3\cos t \text{ és } f_2' \text{ folytonos;}$$
$$f_3(t) = 2t \implies \exists\ f_3'(t) = 2 \text{ és } f_3' \text{ is folytonos,}$$

továbbá

$$f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t) = 9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 4 = 13 > 0,$$

így $\underline{f}$ sima görbe.
Ezért

$$l(\underline{f}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{13} \, dt = 2\pi\sqrt{13}.$$

– $\underline{g}$ komponens függvényei:

$$g_1(t) = t \implies \exists\, g_1'(t) = 1;$$
$$g_2(t) = \frac{3}{2}t^2 \implies \exists\, g_2'(t) = 3t;$$
$$g_3(t) = \frac{3}{2}t^3 \implies \exists\, g_3'(t) = \frac{9}{2}t^2$$

és g_1', g_2', g_3' folytonosak, továbbá

$$g_1'^2(t) + g_2'^2(t) + g_3'^2(t) = 1 + 9t^2 + \frac{81}{4}t^4 > 0,$$

így $\underline{g}$ sima görbe.
Ezért

$$l(\underline{g}) = \int_0^2 \sqrt{1 + 9t^2 + \frac{81}{4}t^4}\, dt = \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{9}{2}t^2 + 1\right)^2}\, dt =$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{9}{2}t^2 + 1\right)\, dt = \left[\frac{3}{2}t^3 + t\right]_0^2 = \frac{3}{2}8 + 2 = 14.$$

– Hasonló meggondolások után:

$$l(\underline{h}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1^2}\, dt =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t - t\sin 2t + t^2\sin^2 t + \cos^2 t + t\sin 2t + t^2\cos^2 t + 1}\, dt =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + t^2}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dt =$$
$$= 2\int_0^{\operatorname{arsh}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} \operatorname{ch}^2 s\, ds = \int_0^{\operatorname{arsh}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} (1 + \operatorname{ch} 2s)\, ds =$$
$$= \left[s + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2s\right]_0^{\operatorname{arsh}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} = \operatorname{arsh}\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{8}}\ .$$

5.13. feladat. Számítsa ki az $\int\limits_{\underline{g}} \underline{f}$ görbementi integrált, ha

a) $\underline{g}(t) = (t^2, 2t, t)$ $(t \in [0,1])$, $\underline{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_3, x_1x_3, x_1x_2)$;

b) $\underline{g}$ a $(2,0,1)$ és $(2,0,4)$ pontokat összekötő irányított egyenes szakasz, $\underline{f}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, -3x_2, x_1)$;

c) $\underline{g}(t) = (t, t^2, t^3)$ $(t \in [0,1])$, $\underline{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_3, -x_2, x_1)$.

Megoldás. A tanultak szerint ha $\underline{g}'$ folytonos $[a,b]$-n, $\underline{f}$ folytonos $\underline{g}$ $([a,b])$-n, akkor

$$\int\limits_{\underline{g}} \underline{f} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_a^b (f_i \circ \underline{g}) g_i'(t)\ dt.$$

E feltételek mindhárom esetben teljesülnek.

a)

$$\int\limits_{\underline{g}} \underline{f} = \int\limits_0^1 (t^4 + t)2t\ dt + \int\limits_0^1 t^2 \cdot t \cdot 2\ dt + \int\limits_0^1 t^2 \cdot 2t \cdot 1\ dt =$$

$$= \left[2\frac{t^6}{6} + 2\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + 2\left[2\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 = 2.$$

b) Először írjuk fel az adott szakasz paraméteres előállítását:

$$\underline{g}(t) = (2,0,1) + t[(2,0,4) - (2,0,1)] = (2,0,1) + t(0,0,3) =$$
$$= (2,0,1+3t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))\ (t \in [0,1]).$$

Ekkor már:

$$\int\limits_{\underline{g}} \underline{f} = \int\limits_0^1 2 \cdot 2 \cdot 0\ dt + \int\limits_0^1 -3 \cdot 0 \cdot 0\ dt + \int\limits_0^1 2 \cdot 3\ dt = [6t]_0^1 = 6.$$

c)

$$\int\limits_{\underline{g}} \underline{f} = \int\limits_0^1 t \cdot t^3 \cdot 1\ dt + \int\limits_0^1 -t^2 \cdot 2t\ dt + \int\limits_0^1 t \cdot 3t^2\ dt =$$

$$= \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 - 2\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 + 3\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}\ .$$

Gyakorló feladatok

1) Bizonyítsa be, hogy $V(f,[a,b]) = f(b) - f(a) \iff$ ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növekedő.

2) Korlátos változásúak-e az alábbi függvények:

$$f_1(x) = 1 + \cos x \quad (x \in [0,\pi]); \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & , \text{ ha } x \in]0,1] \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \end{cases}.$$

3) Határozza meg $V(f,[a,b])$-t, ha

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x = 0 \\ 1 & , \text{ ha } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \end{cases}; \qquad f_2(x) = \cos 2x \quad (x \in [0,2\pi]).$$

4) Létezik-e $\int\limits_a^b f\, dg$, ha

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & , \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$; $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ nem konstans monoton növekedő függvény;

b) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $g(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } x \neq a_i,\ i = 1,\dots,n \\ c_i & , \text{ ha } x = a_i,\ i = 1,\dots,n \end{cases}$, ahol $a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < b,\ c_i \in \mathbb{R}$.

5) Számítsa ki $\int\limits_a^b f\, dg$ értékét, ha

a) $f(x) = x^2,\ g(x) = \cos x \quad (x \in [0,\pi])$;

b) $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = e^x \quad (x \in [0,1])$.

6) Határozza meg az alábbi görbék ívhosszát:

a) $\underline{f}(t) = \left(t, \dfrac{\sqrt{2}}{2}t^2, \dfrac{1}{3}t^3\right) \quad (t \in [0,2])$;

b) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.

7) Számítsa ki az $\int\limits_{\underline{g}} \underline{f}$ görbementi integrált, ha

a) $\underline{g}$ a $(0,0,0)$ és $(1,1,1)$ pontokat összekötő irányított egyenes szakasz, $\underline{f}(x_1,x_2,x_3) = (x_1x_3, -x_2, x_1)$;

b) $\underline{g}$ a $(0,0,0,0)$ és $(1,1,1,1)$ pontokat összekötő irányított egyenes szakasz, $\underline{f}(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1x_4, x_2, -x_2x_4, x_3)$.

VI. fejezet
Többváltozós függvények differenciálszámítása

6.1. feladat. Számítsa ki az alábbi függvények parciális deriváltjait, ha (és ahol) léteznek:

$$f_1(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2);$$
$$f_2(x,y) = \ln(x^2+y^2) \qquad (x^2+y^2 \neq 0);$$
$$f_3(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \left(-1 \leq \frac{x}{y} \leq 1,\ y \neq 0\right);$$
$$f_4(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (x^2+y^2 \neq 0);$$
$$f_5(x,y) = \sqrt{x^4+y^2}\sin(x+y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2);$$
$$f_6(x,y,z) = \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (x^2+y^2+z^2 \neq 0);$$
$$f_7(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z \qquad (x,y,z > 0).$$

Megoldás. Ha $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény, úgy az i-edik változója szerinti parciális derivált létezése az $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ pontban azt jelenti, hogy létezik a

$$\lim_{x_i \to x_{0i}} \frac{f(x_{01}, \ldots, x_{0i-1}, x_i, x_{0i+1}, \ldots, x_{0n}) - f(x_{01}, \ldots, x_{0i}, \ldots, x_{0n})}{x_i - x_{0i}}$$

véges határérték ($i = 1, 2, \ldots, n$ lehetséges), vagyis azt, hogy a $\varphi(t) = f(x_{01}, \ldots, x_{0i-1}, t, x_{0i+1}, \ldots, x_{0n})$ (az x_{0i} egy környezetében értelmezett) függvény differenciálható $t = x_{0i}$-ben.
Tehát azt a „technikát” alkalmazhatjuk, hogy adott (például x_i) változó szerinti parciális derivált létezésének bizonyításánál, illetve kiszámításánál csak az adott (itt x_i) változóban tekintjük a függvényt, a többi változót konstansnak tekintve, így mindig egyváltozós függvénnyel számolunk (a tanultaknak megfelelően).

– Az f_1 kétváltozós függvény csak x, vagy csak y függvényében is negyedfokú függvény, mely mindenütt differenciálható, így használhatjuk az egyváltozós függvényekre vonatkozó differenciálási és műveleti szabályokat. Ezért

$$\exists\ D_1 f(x,y) = 4x^3 - 4y^2 \cdot 2x = 4x^3 - 8xy^2 \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\text{-re},$$
$$\exists\ D_2 f(x,y) = 4y^3 - 4x^2 \cdot 2y = 4y^3 - 8x^2 y \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\text{-re}.$$

($D_1 f(x,y)$ helyett használhatjuk a $D_x f(x,y)$, $f_x(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, míg $D_2 f(x,y)$ helyett a $D_y f(x,y)$, $f_y(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ jelöléseket is.)

– f_2 értelmezett a $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nyílt halmazon és bármelyik változójában tekintve (a másik rögzítése mellett) az ln és az $x \to x^2 + y^2$, vagy $y \to x^2 + y$ függvények összetett függvénye, melyek mind differenciálhatók, ezért

$$\exists\ D_1 f_2(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\text{-ra},$$
$$\exists\ D_2 f_2(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2+y^2} \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\text{-ra}.$$

– f_3 D értelmezési tartományán (ezt már vizsgáltuk) az $x \to \dfrac{x}{y}$, $y \to \dfrac{x}{y}$ függvények (mint egyváltozósak) differenciálhatók, ugyanakkor az $\arcsin\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ függvény nem differenciálható -1-ben és $+1$-ben, így a parciális deriváltak nem léteznek D azon (x,y) pontjaiban, amikor $y = -x$ és $y = x$. Ezért

$$\exists\ D_1 f_3(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}} \cdot \frac{1}{y}$$

és

$$\exists\ D_2 f_3(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

ha $-1 < \dfrac{x}{y} < 1$ és $y \neq 0$.

– f_4 is összetett függvény az x és y változójában is, mégpedig az arctg és az $x \to \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ illetve $y \to \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ függvényeké, melyek differenciálhatók, így

$$D_1 f_4(x,y) = \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x}{x^2+y^2} =$$
$$= \frac{y^2}{(2x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\ ,$$
$$D_2 f_4(x,y) = \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}} \cdot x\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y}{x^2+y^2} =$$
$$= \frac{-xy}{(2x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\forall\ (x,y) \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

– Az f_5 függvénynél nem léteznek $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re a parciális deriváltak, csak $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ esetén, mert a $t \to \sqrt{t}$ függvény nem differenciálható $t = 0$-ban, így $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$-ra

$$D_1 f_5(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^4+y^2}} \cdot 4x^3 \sin(x+y) + \sqrt{x^4+y^2}\cos(x+y),$$
$$D_2 f_5(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^4+y^2}} \cdot 2y \sin(x+y) + \sqrt{x^4+y^2}\cos(x+y).$$

– Az f_6 háromváltozós függvény három parciális deriváltja létezik $\forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$-ra és

$$D_1 f_6(x,y,z) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - (x+y+z)\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2x}{x^2+y^2+z^2} =$$
$$= \frac{y^2+z^2-xy-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$D_2 f_6(x,y,z) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - (x+y+z)\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2y}{x^2+y^2+z^2} =$$
$$= \frac{x^2+z^2-xy-zy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$D_3 f_6(x,y,z) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - (x+y+z)\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2z}{x^2+y^2+z^2} =$$
$$= \frac{x^2+y^2-xz-yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \ .$$

– Ha $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+$, úgy léteznek a parciális deriváltak és

$$D_1 f_7(x,y,z) = z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} \cdot \frac{1}{y} \ ;$$
$$D_2 f_7(x,y,z) = z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} \cdot \frac{-x}{y^2} \ ;$$
$$D_3 f_7(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{z} \ln\left(\frac{x}{y}\right) \ .$$

6.2. feladat. Vizsgálja a $D_1 f(0,0)$ és $D_2 f(0,0)$ létezését az alábbi esetekben:

a) $$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & , \text{ ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases} \ ;$$

b) $$f(x,y) = \sqrt[3]{xy} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \ ;$$

c) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & , \text{ ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases} \ ;$$

d) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & , \text{ ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases} \ ;$$

e) $$f(x,y) = \sqrt{|xy|} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \ ;$$

f) $$f(x,y) = |x+y| \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \ .$$

Megoldás. Az $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény $(0,0)$-beli parciális deriváltjainak létezéséhez a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} \quad \text{és} \quad \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$$

határértékeket kell vizsgálni.

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x^2} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x^2} = 0,$$

mert $x \to 0$, illetve az $x \to \sin\frac{1}{x^2}$ függvény korlátos, ezért $\exists\, D_1 f(0,0) = 0$. Hasonlóan

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2 \sin\frac{1}{y^2} - 0}{y-0} = \lim_{y\to 0} y \sin\frac{1}{y^2} = 0 = \\ = D_2 f(0,0)\ ;$$

b) $$\exists \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x\cdot 0} - \sqrt[3]{0\cdot 0}}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = D_1 f(0,0),$$
$$\exists \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{0\cdot y} - \sqrt[3]{0\cdot 0}}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y-0} = \lim_{y\to 0} 0 = 0 = D_2 f(0,0);$$

c) $$\exists \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x-0} = 0 = D_1 f(0,0),$$
$$\exists \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y-0} = 0 = D_2 f(0,0);$$

d) $$\exists \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{x^2} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x-0} = 1 = D_1 f(0,0);$$
$$\exists \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y-0} = \lim_{y\to 0} 0 = 0 = D_2 f(0,0);$$

e) $$\exists \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x-0} = 0 = D_1 f(0,0),$$
$$\exists \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y-0} = 0 = D_2 f(0,0);$$

f)
$$\lim_{x\to 0}\frac{|x+0|-|0+0|}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$
nem létezik, mert $\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & ,\text{ ha } x>0\\ -1 & ,\text{ ha } x<0\end{cases}$ miatt $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{|x|}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{|x|}{x}=-1$, ezért nem létezik $D_1f(0,0)$.
Ugyanígy látható be, hogy $\nexists\ D_2f(0,0)$.

6.3. feladat. Milyen e irányra létezik $D_ef(0,0)$, ha

a) $f_1(x,y)=\sqrt[3]{xy}\quad((x,y)\in\mathbb{R}^2)$;
b) f_2 a 2. feladat c)-beli függvény;
c) f_3 a 2. feladat d)-beli függvény;
d) f_4 a 2. feladat e)-beli függvény;

Megoldás. Ha $f\colon D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ és $(x_0,y_0)\in D$, illetve $e=(e_1,e_2)\in\mathbb{R}^2$ ($\|e\|=\sqrt{e_1^2+e_2^2}=1$) adott, úgy definíció szerint
$$D_ef(x_0,y_0)\doteq\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+te_1,y_0+te_2)-f(x_0,y_0)}{t}\ ,$$
ha ez a határérték létezik. Ha $(x_0,y_0)=(0,0)$, úgy
$$D_ef(0,0)\doteq\lim_{t\to 0}\frac{f(te_1,te_2)-f(0,0)}{t}$$
(ha létezik a határérték).
a)
$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{te_1\cdot te_2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{e_1e_2t^{\frac{2}{3}}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{e_1e_2}{\sqrt[3]{t}}$$
csak akkor létezik, ha $e_1=0$ vagy $e_2=0$, és ekkor értéke: 0 (ami éppen $D_1f_1(0,0)$ és $D_2f_1(0,0)$ lesz, összhangban a 2. feladat b) részével).
Ha $e_1\cdot e_2\neq 0$, úgy $\nexists\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}$, ezért $\nexists\ D_ef(0,0)$.

b)
$$\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{(te_1)^2te_2}{(te_1)^2+(te_2)^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2e_1e_2}{t^2(e_1^2+e_2^2)}=\lim_{t\to 0}e_1e_2=e_1e_2,$$
így $\forall\ e=(e_1,e_2)$-re $\exists\ D_ef(0,0)=e_1e_2$.
(Speciálisan most is kapjuk, hogy $D_1f(0,0)=D_2f(0,0)=0$, összhangban a 2. feladat c) részével.)

c)

$$\lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{(te_1)^3}{(te_1)^2+(te_2)^2} - 0}{t} = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e_1^3}{e_1^2+e_2^2} = e_1^3 & , \text{ ha } e_1 \neq 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0}{t} = 0 & , \text{ ha } e_1 = 0 \end{cases},$$

így $\exists\ D_e f(0,0)\ \forall\ e$ irányra.

d)

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{|te_1te_2|} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \sqrt{|e_1e_2|}\frac{\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}\sqrt{|e_1e_2|},$$

ami csak akkor létezik, ha $e_1 = 0$ vagy $e_2 = 0$ (azaz csak a parciális deriváltak!).

6.4. feladat. Vizsgálja az adott függvények adott pontbeli differenciálhatóságát:

a) a 2. feladat a) függvényét a $(0,0)$-ban;
b) a 2. feladat c) függvényét a $(0,0)$-ban;
c) a 2. feladat d) függvényét a $(0,0)$-ban;
d) a 2. feladat e) függvényét a $(0,0)$-ban;
e) az $f(x,y) = |xy| \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ függvényt a $(0,0)$-ban;
f) az $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+2y^2+3z^2} \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$ a $(0,0,0)$-ban.

Megoldás. Azt mondjuk, hogy az $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, ha $\exists$ egy $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés, hogy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x-x_0)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

Ekkor $f'(x_0) = A$ az f függvény x_0-beli differenciálhányadosa.
Ha f differenciálható x_0-ban, úgy ott bármely komponens függvényének létezik minden parciális deriváltja, továbbá

$$f'(x_0) = (D_i f_j(x_0))_{m\times n}\ .$$

A differenciálhatóságnak tehát szükséges feltétele a $D_i f_j$ parciális deriváltak létezése. Ha ezeket meghatároztuk, és megalkottuk belőlük az A „derivált mátrix-jelöltet”, akkor ellenőrízni kell a definíció teljesülését.

a) A 2. feladat a) részében meghatároztuk a parciális deriváltakat:
$D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$, így a jelölt a derivált mátrixra: $A = (0\ 0)$.

Ekkor

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} - 0 - (0\ 0)\binom{x-0}{y-0}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| = 0,$$

mert $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$ és $\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|$ korlátos.

Ezért f differenciálható $(0,0)$-ban és $f'(0,0) = (0\ 0)$.

b) A 2. feladat c) részében beláttuk, hogy
$D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0 \implies$ csak $A = (0\ 0)$ lehetséges.
Ekkor

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} - 0 - (0\ 0)\binom{x-0}{x-0}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y|}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0,$$

mert $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \to (0,0)$ választással

$$\frac{\dfrac{1}{n^3}}{\left(\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{1}{n^2}\right)\dfrac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1+n^2}{n^4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{n^2}{1+n^2}\frac{1}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

Ez azt jelenti, hogy függvényünk nem differenciálható $(0,0)$-ban.

c) A 2. feladat d) részében beláttuk, hogy
$D_1 f(0,0) = 1,\ D_2 f(0,0) = 0$, így csak $A = (1\ 0)$ lehetne a $(0,0)$-beli derivált.
Ekkor

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2} - 0 - (1\ 0)\binom{x-0}{y-0}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2} - x\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0,$$

mert $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ választással

$$\frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}}{\left(\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{\sqrt{8}}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \to \frac{1}{\sqrt{8}} \neq 0.$$

Ezért a függvényünk nem differenciálható $(0,0)$-ban.

d) A 2. feladat e) részében beláttuk, hogy
$D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0 \implies A = (0,0)$ a „jelölt".

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\sqrt{|xy|} - 0 - (0\ 0)\binom{x-0}{x-0}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} ,$$

ami nem 0, mert $(x_n, x_n) \to (0,0)$ választással

$$\frac{\sqrt{|x_n x_n|}}{\sqrt{x_n^2 + x_n^2}} = \frac{|x_n|}{\sqrt{2}|x_n|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

ezért f nem differenciálható $(0,0)$-ban.

e) Az $f(x,y) = |xy|$ függvénynél

$$\exists \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x-0} = 0 = D_1 f(0,0) \quad ; \quad \exists \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y-0} = 0 = D_2 f(0,0) ,$$

és

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left||xy| - 0 - (0\,0)\binom{x}{y}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

mert $|x| \to 0$, a második tényező pedig $0 \le \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1$ miatt korlátos.
Ezért függvényünk differenciálható $(0,0)$-ban.

f)

$$\frac{f(x,0,0) - f(0,0,0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x^2} - 0}{x} = \frac{|x|}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

miatt nem létezik a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0,0) - f(0,0,0)}{x-0}$ határérték, azaz $D_1 f(0,0,0)$.
Így f nem differenciálható $(0,0,0)$-ban (mert ha az lenne, akkor $D_1 f(0,0,0)$ is létezne).
Hasonlóan belátható egyébként, hogy $D_2 f(0,0,0)$ és $D_3 f(0,0,0)$ sem létezik.

6.5. feladat. Bizonyítsa be, hogy ha $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = g(x_i)$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ (ahol g egyváltozós függvény), $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in D$ és g differenciálható x_{0i}-ben, akkor f differenciálható x_0-ban és

$$f'(x_0) = f'(x_{01}, \dots, x_{0n}) = (0 \cdots 0 g'(x_{0i}) 0 \cdots 0).$$

Megoldás.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - (0 \cdots 0 g'(x_{0i}) 0 \cdots 0)(x - x_0)|}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{|g(x_i) - g(x_{0i}) - g'(x_{0i})(x_i - x_{0i})|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i})^2}} =$$

$$= \lim_{(x_1, \dots, x_n) \to (x_{01}, \dots, x_{0n})} \left(\left| \frac{g(x_i) - g(x_{0i})}{x_i - x_{0i}} - g'(x_{0i}) \right| \frac{|x_i - x_{0i}|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i})^2}} \right) = 0,$$

mert az első tényező határértéke (mivel $\exists\, g'(x_{0i})$) 0, míg a második tényező korlátos.
Ez pedig adja f differenciálhatóságát x_0-ban és $f'(x_0)$ jelzett alakját.

Megjegyzés. A lokális tétel globális formában is megfogalmazható.

6.6. feladat. Bizonyítsa be, hogy ha $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $f(x, y) = g(x)h(y)$ $((x, y) \in D)$, $(x_0, y_0) \in D$ és $\exists\, g'(x_0)$, $h'(y_0)$, akkor $\exists\, f'(x_0, y_0)$ és

$$f'(x_0, y_0) = (g'(x_0)h(y_0)\ g(x_0)h'(y_0)).$$

Megoldás. Felhasználjuk a differenciálhatóság definícióját, azt is, hogy $g'(x_0)$ és $h'(y_0)$ létezése adja, hogy g folytonos x_0-ban és h folytonos y_0-ban, valamint, hogy az $x \to |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény folytonos, illetve, hogy

$$0 \le \frac{|x - x_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}\ ,\ \frac{|y - y_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \le 1.$$

$$
\begin{aligned}
0 \le & \frac{\left|f(x,y) - f(x_0,y_0) - (g'(x_0)h(y_0)\ g(x_0)h'(y_0))\binom{x-x_0}{y-y_0}\right|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \\
= & \frac{|g(x)h(y) - g(x_0)h(y_0) - g'(x_0)h(y_0)(x-x_0) - g(x_0)h'(y_0)(y-y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \\
= & \frac{|(g(x)-g(x_0))h(y) + g(x_0)(h(y)-h(y_0)) - g'(x_0)h(y_0)(x-x_0) - g(x_0)h'(y_0)(y-y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \le \\
\le & \left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}h(y) - g'(x_0)h(y_0)\right| \frac{|x-x_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} + \\
+ & \left|g(x_0)\frac{h(y)-h(y_0)}{y-y_0} - g(x_0)h'(y_0)\right| \frac{|x-x_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \to 0,
\end{aligned}
$$

ha $(x,y) \to (x_0,y_0)$, ami adja f differenciálhatóságát (x_0,y_0)-ban és a feladatban megfogalmazott formulát.

6.7. feladat. Vizsgálja az $f(x,y) = x^2 + y^2 + x\cos y + y^3 \sin x$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény differenciálhatóságát és határozza meg az $f'(x,y)$ deriváltmátrixot.

Megoldás. A $g_1(x,y) = x^2$ $((x,y) \in \mathbb{R})$ függvény az $x \to x^2$ függvény differenciálhatósága miatt $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}$ esetén differenciálható és $g_1'(x,y) = (2x\ 0)$ (lásd 5. feladat).
Hasonlóan kapjuk, hogy a $g_2(x,y) = y^2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény differenciálható és $g_2'(x,y) = (0\ 2y)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$.
A 6. feladat – az $x \to x,\ y \to \cos y,\ y \to y^3,\ x \to \sin x$ $(x,y \in \mathbb{R})$ függvények differenciálhatósága miatt – adja, hogy a

$$g_3(x,y) = x\cos y \quad \text{és} \quad g_4(x,y) = y^3 \sin x \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvények differenciálhatók és $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re:

$$g_3'(x,y) = (1 \cdot \cos y \cdot x(-\sin y))\ , \qquad g_4'(x,y) = (y^3 \cos x \cdot 3y^2 \sin x).$$

A Kalkulus II. jegyzet – Differenciálási szabályok 1. tétele – szerint ekkor a négy függvény összege is differenciálható és

$$f'(x,y) = (2x + \cos y + y^3 \cos x \cdot 2y - x\sin y + 3y^2 \sin x).$$

6.8. feladat. Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$:
a) létezik-e f', ha igen $f' =?$, $\det f' =?$
b) határozza meg az $S = [1,2] \times [0,\pi]$ képét f-re.

Megoldás.
a) $f = (f_1, f_2) \iff$ differenciálható, ha f_1 és f_2 is az és

$$f' = \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 \end{pmatrix}$$

(lásd Kalkulus II. jegyzet).
Most $f_1(r,\varphi) = r\cos\varphi$, $f_2(r,\varphi) = r\sin\varphi$, így f_1 és f_2 is két egyváltozós (differenciálható) függvény szorzata, ezért differenciálhatók. Továbbá

$$f'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \forall\ (r,\varphi)\text{-re.}$$

Ebből $\det f'(r,\varphi) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$ következik.

b) $[1,2]\times[0,\pi]$ az (r,φ)-sík egy téglalapja. f ennek egy (r,φ) pontjához az (x,y)-sík $(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ pontját rendeli. Az $r=1$ egyenes képe az $f(1,\varphi) = (\cos\varphi,\sin\varphi)$ egységkör, illetve ha $\varphi\in[0,\pi]$, úgy ennek felső félköre.
Az $r=2$ egyenes képe hasonlóan a 2 sugarú origó középpontú kör, illetve annak felső félköre.
Ha $1<r<2$, úgy az r sugarú (0-középpontú) felső félkört kapjuk.
E gondolatok adják, hogy S képe az $\{(x,y)|\ 1\le x^2+y^2\le 2,\ y\ge 0\}$ fél körgyűrű.

6.9. feladat. Legyen $D = \{(x_1,x_2,x_3)|\ 1+x_1+x_2+x_3\neq 0\}$,

$$f\colon D\to\mathbb{R}^3,\quad f(x) = \frac{x}{1+x_1+x_2+x_3}\ ,\quad f' = ?$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x_1,x_2,x_3)}{1+x_1+x_2+x_3} = \\ &= \left(\frac{x_1}{1+x_1+x_2+x_3}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2+x_3}, \frac{x_3}{1+x_1+x_2+x_3}\right) \end{aligned}$$

miatt f komponens függvényei az

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1}{1+x_1+x_2+x_3}\ ;\quad f_2(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_2}{1+x_1+x_2+x_3}\ ;$$
$$f_3(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_3}{1+x_1+x_2+x_3}$$

valós értékű függvények.
Ezek mind lineáris függvények hányadosai, melyek (ahogy ezt a Kalkulus II. jegyzetben beláttuk) differenciálhatók, így a műveleti tulajdonságok (hányados differenciálhatósága) miatt f_1, f_2 és f_3 is differenciálható D-n.

Ezért

$$f'(x_1,x_2,x_3) =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1\cdot(1+x_1+x_2+x_3)-x_1}{(1+x_1+x_2+x_3)^2} & \frac{-x_1}{(1+x_1+x_2+x_3)^2} & \frac{-x_1}{(1+x_1+x_2+x_3)^2} \\ \frac{-x_2}{(1+x_1+x_2+x_3)^2} & \frac{1\cdot(1+x_1+x_2+x_3)-x_2}{(1+x_1+x_2+x_3)^2} & \frac{-x_2}{(1+x_1+x_2+x_3)^2} \\ \frac{-x_3}{(1+x_1+x_2+x_3)^2} & \frac{-x_3}{(1+x_1+x_2+x_3)^2} & \frac{1\cdot(1+x_1+x_2+x_3)-x_3}{(1+x_1+x_2+x_3)^2} \end{pmatrix}.$$

6.10. feladat. Legyen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ olyan függvény, hogy $f(0,0,0) = (1,2)$ és $\exists\ f'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, továbbá legyen $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$g(x,y) = (x+2y+1,\ 3xy)$.
Létezik-e $(g\circ f)'(0,0,0)$ és ha igen, mivel egyenlő?

Megoldás. Az összetett függvény differenciálására vonatkozó tétel feltételeit kell vizsgálnunk.
Most $D = \mathbb{R}^3$, $n = 3$, $m = 2$, $k = 2$. f differenciálható az $x_0 = (0,0,0)$ pontban. Be kell látni, hogy g differenciálható az $f(0,0,0) = (1,2)$ pontban, ez igaz mert: $g \iff$ differenciálható $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-ben, ha a
$g_1(x,y) = x+2y+1$ és $g_2(x,y) = 3xy$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ komponensfüggvényei differenciálhatók, ami teljesül, mert g_1 lineáris függvény (így differenciálható), g_2 pedig két egyváltozós differenciálható függvény szorzata (ami a 8. feladat miatt differenciálható).
Ekkor

$$(g\circ f)'(0,0,0) = g'(f(0,0,0))f'(0,0,0) = g'(1,2)f'(0,0,0).$$

De

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} D_1g_1(x,y) & D_2g_1(x,y) \\ D_1g_2(x,y) & D_2g_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3y & 3x \end{pmatrix},$$

így $g'(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.
Ezért

$$(g\circ f)'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot2+2\cdot0 & 1\cdot3+2\cdot1 \\ 6\cdot1+3\cdot0 & 6\cdot2+3\cdot0 & 6\cdot3+3\cdot1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 12 & 21 \end{pmatrix}$$

(ahol használtuk a mátrixok szorzási szabályát a Kalkulus II. jegyzetből).

6.11. feladat. Vizsgálja meg, hogy az alábbi függvények folytonosan differenciálhatók-e $(0,0)$-ban

a) $$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{, ha } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{, ha } x^2+y^2=0\end{cases};$$

b) $$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{, ha } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{, ha } x^2+y^2=0\end{cases};$$

Megoldás. A tanultak szerint azt mondjuk, hogy az adott függvények folytonosan differenciálhatók $(0,0)$-ban, ha létezik D_1f és D_2f parciális deriváltjuk a $(0,0)$ egy környezetében és azok folytonosak $(0,0)$-ban.

a) A 2. a) és 4. a) feladatban beláttuk, hogy $\exists\ D_1f(0,0)=0$ és $D_2f(0,0)=0$ (sőt azt is, hogy f differenciálható $(0,0)$-ban).
Nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned}\exists\ D_1f(x,y)&=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}=\\&=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\quad(\forall\ (x,y)\neq(0,0)),\\ \exists\ D_2f(x,y)&=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\quad(\forall\ (x,y)\neq(0,0)).\end{aligned}$$

Ha $\exists\ (x_n,y_n)\to(0,0)$ sorozat, hogy $D_1f(x_n,y_n)\not\to D_1f(0,0)=0$, illetve $D_2f(x_n,y_n)\not\to D_2f(0,0)=0$, akkor D_1f és D_2f nem folytonosak $(0,0)$-ban, így f nem folytonosan differenciálható.
Legyen $x_n\neq 0$ $(n\in\mathbb{N})$ és $(x_n,x_n)\to(0,0)$, akkor például

$$D_1f(x_n,x_n)=2x_n\sin\frac{1}{2x_n^2}-\frac{1}{x_n}\cos\frac{1}{2x_n^2}\not\to 0,$$

mert

$$\lim_{n\to\infty}2x_n\sin\frac{1}{2x_n^2}=0,\ \text{ de }\ -\frac{1}{x_n}\cos\frac{1}{2x_n^2}\not\to 0$$

(utóbbi egyszerűen belátható).
Hasonlóan belátható, hogy $D_2f(x_n,x_n)\not\to 0$ is igaz.
f tehát nem folytonosan differenciálható $(0,0)$-ban.
Megmutatható, hogy $\forall\ (x_0,y_0)\neq(0,0)$ pontban folytonosan differenciálható f.

b) A Kalkulus I. jegyzetben már vizsgáltuk a függvényt és megmutattuk, hogy

$$D_1 f(x,y) = \begin{cases} y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\dfrac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} & \text{, ha } (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0-0}{x-0} = 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0) \end{cases};$$

$$D_2 f(x,y) = \begin{cases} x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\dfrac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} & \text{, ha } (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0-0}{y-0} = 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Egyszerű számolás adja, hogy $\forall\ (x,y) \neq (0,0)$-ra

$$D_1 f(x,y) = y\left(1 + \frac{2y^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right), \quad D_2 f(x,y) = x\left(1 + \frac{3y^2x^2-2y^4}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

Ellenőrizhető, hogy $D_1 f(x,y)$ kifejezésében az y, míg $D_2 f(x,y)$ kifejezésében az x szorzója korlátos, ezért

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_1 f(x,y) = 0 = D_1 f(0,0)$$

és

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_2 f(x,y) = 0 = D_2 f(0,0).$$

Ez pedig adja a $D_1 f$ és $D_2 f$ parciális deriváltak folytonosságát $(0,0)$-ban, ezért függvényünk folytonosan differenciálható $(0,0)$-ban.

6.12. feladat. Vizsgálja $D_2 D_1 f(x,y)$ és $D_1 D_2 f(x,y)$ létezését és egyenlőségét, ha

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{, ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Megoldás. A Kalkulus II. jegyzetben már beláttuk, hogy

$$D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 1,$$

továbbá, hogy

$$D_1 f(x,y) = \frac{2y(x^2+y^2)-2xy2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \quad ((x,y) \neq (0,0)),$$

$$D_2 f(x,y) = \frac{2x^3-2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \quad ((x,y) \neq (0,0))$$

Ezekből: $D_2 D_1 f(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\frac{2y^3}{y^4}-0}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2}{y^2} = +\infty,$

így $\nexists\ D_2D_1f(0,0)$.
Hasonlóan

$$D_1D_2f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^3}{x^4} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^2} = +\infty,$$

így $\nexists\ D_1D_2f(0,0)$.
Egyszerűen belátható viszont, hogy $\forall\ (x,y) \neq (0,0)$-ra

$$D_2D_1f(x,y) = \frac{12x^2y^2 - x^4 - y^4}{(x^2+y^2)^3} = D_1D_2f(x,y).$$

6.13. feladat. Írja fel a Taylor-formulát az

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 \qquad ((x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3)$$

függvényre az $x = (1,1,1)$ esetén, $r = 2$ mellett, a maradéktag nélkül.

Megoldás. Egyszerűen belátható, hogy f kétszer differenciálható, ugyanis f differenciálható $\forall\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$-ban és a D_1f, D_2f és D_3f parciális deriváltak is differenciálhatók (ellenőrízzük).
Ekkor

$$f(1,1,1) + \frac{df((1,1,1),(h_1,h_2,h_3))}{1!} + \frac{d^2f((1,1,1),(h_1,h_2,h_3))}{2!}$$

kiszámítása a feladat ($k = (h_1,h_2,h_3)$ jelöléssel), ahol

$$\begin{aligned}
df((1,1,1),(h_1,h_2,h_3)) &= \sum_{i=1}^{3} f_{x_i}(1,1,1)h_i = \\
&= f_{x_1}(1,1,1)h_1 + f_{x_2}(1,1,1)h_2 + f_{x_3}(1,1,1)h_3 \\
d^2f((1,1,1),(h_1,h_2,h_3)) &= \sum_{i_1,i_2=1}^{3} f_{x_{i_1}i_2}(1,1,1)h_{i_1}h_{i_2} = \\
&= f_{x_1x_2}(1,1,1)h_1^2 + f_{x_2x_2}(1,1,1)h_2^2 + \\
&\quad + f_{x_3x_3}(1,1,1)h_3^2 + 2f_{x_1x_2}(1,1,1)h_1h_2 + \\
&\quad + 2f_{x_1x_3}h_1h_3 + f_{x_2x_3}h_2h_3
\end{aligned}$$

(felhasználva a vegyes parciálisok egyenlőségét is).
Mivel $f(1,1,1)=0$ és

$$\begin{aligned}
f_{x_1}(x_1,x_2,x_3) &= 3x_1^2-3x_2x_3 \quad\Longrightarrow\quad f_{x_1}(1,1,1)=0,\\
f_{x_2}(x_1,x_2,x_3) &= 3x_2^2-3x_1x_3 \quad\Longrightarrow\quad f_{x_2}(1,1,1)=0,\\
f_{x_3}(x_1,x_2,x_3) &= 3x_3^2-3x_1x_2 \quad\Longrightarrow\quad f_{x_3}(1,1,1)=0,\\
f_{x_1x_2}(x_1,x_2,x_3) &= -3x_3 \quad\Longrightarrow\quad f_{x_1x_2}(1,1,1)=-3,\\
f_{x_1x_3}(x_1,x_2,x_3) &= -3x_2 \quad\Longrightarrow\quad f_{x_1x_3}(1,1,1)=-3,\\
f_{x_2x_3}(x_1,x_2,x_3) &= -3x_1 \quad\Longrightarrow\quad f_{x_2x_3}(1,1,1)=-3,\\
f_{x_1x_1}(x_1,x_2,x_3) &= 6x_1 \quad\Longrightarrow\quad f_{x_1x_1}(1,1,1)=6,\\
f_{x_2x_2}(x_1,x_2,x_3) &= 6x_2 \quad\Longrightarrow\quad f_{x_2x_2}(1,1,1)=6,\\
f_{x_3x_3}(x_1,x_2,x_3) &= 6x_3 \quad\Longrightarrow\quad f_{x_3x_3}(1,1,1)=6.
\end{aligned}$$

Így a keresett formula:

$$\frac{1}{2}\left[6h_1^2+6h_2^2+6h_3^2-3h_1h_2-3h_1h_3-3_2h_3\right],$$

ami $f(1+h_1,1+h_2,1+h_3)$ bizonyos közelítését adja.

6.14. feladat. Határozza meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:

a) $f_1(x,y)=2x^2+(y-1)^2 \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$,

b) $f_2(x,y)=x^2-y^2 \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$,

c) $f_3(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2 \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$,

d) $f_4(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+3x-2z \quad ((x,y,z)\in\mathbb{R}^3)$.

Megoldás. Ismeretes a következő tétel (lásd Kalkulus II. jegyzet):
Ha az $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $x_0\in D$ pontban, továbbá $f'(x_0)=0$ és $d^2f(x_0,h)$ pozitív (negatív) definit, akkor x_0-ban f-nek szigorú lokális minimuma (maximuma) van.
Továbbá igaz, hogy $d^2f(x_0,h) \iff$ pozitív (negatív) definit, ha a

$$\Delta_1 = f_{x_1x_1}(x_0),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0)\\ f_{x_2x_1}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0)\end{vmatrix}, \dots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0) & \dots & f_{x_1x_n}(x_0)\\ f_{x_2x_2}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0) & \dots & f_{x_2x_n}(x_0)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{x_nx_1}(x_0) & f_{x_nx_2}(x_0) & \dots & f_{x_nx_n}(x_0)\end{vmatrix}$$

úgynevezett bal felső sarokdeterminánsok (az úgynevezett Hesse-mátrixból) pozitívak (illetve váltakozva negatívak és pozitívak).

a) Az f_1 függvény (mint egyváltozós differenciálható függvények összege) differenciálható, továbbá nyilván a $D_1 f_1(x,y) = 4x$ és $D_2 f(x,y) = 2(y-1)$ parciális deriváltak is differenciálhatók (lásd 5. feladat), így f kétszer differenciálható.
$f'(x,y) = (4x \cdot 2(y-1)) = (0,0) \iff 4x = 0,\ 2(y-1) = 0 \iff x = 0,\ y = 1$, így a függvénynek a $(0,1)$ pontban lehet lokális szélsőértéke.

$$D_1 D_1 f(x,y) = 4, \qquad D_2 D_1 f(x,y) = 0,$$
$$D_1 D_2 f(x,y) = 0, \qquad D_2 D_2 f(x,y) = 2,$$

így a Hesse-mátrix $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, így a $(0,1)$ pontban is.

$$\Delta_1 = 4 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

így $d^2 f((0,1),h)$ pozitív definit, ezért f-nek $(0,1)$-ben lokális minimuma van.

b) Az f_2 függvényről egyszerűen belátható, hogy kétszer differenciálható.

$$D_1 f_2(x,y) = 2x = 0, \quad D_2 f_2(x,y) = -2y = 0 \quad \iff \quad (x,y) = (0,0).$$

Itt lehet lokális szélsőértéke f_2-nek.

$$D_1 D_1 f_2(x,y) = 2,$$
$$D_2 D_1 f_2(x,y) = 0 = D_1 D_2 f_2(x,y),$$
$$D_2 D_2 f_2(x,y) = -2$$

$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re, így $(0,0)$-ban is.
A Hesse-mátrix: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, így $\Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = -4 < 0$, ezért $d^2 f_2((0,0),h)$ nem pozitív és nem negatív definit, így más módon kell megnézni, hogy $(0,0)$-ban van-e lokális szélsőérték.
Mivel $\forall\ r > 0$-ra $\exists\ x,y \in \mathbb{R}$, hogy $(0,y),(x,0) \in K((0,0),r)$ és $f_2(0,y) = -y^2 < 0,\ f_2(x,0) = x^2 > 0$, azaz $\forall\ K((0,0),r)$-ben f felvesz pozitív és negatív értéket is, így $(0,0)$-ban nincs lokális szélsőértéke f_2-nek.

c) Az $f_3(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ függvény kétszer differenciálható $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re (indokolja).

$$\left.\begin{aligned} D_1 f_3(x,y) &= 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ D_2 f_3(x,y) &= 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{aligned}\right\}$$

$\iff (x,y)=(0,0);\ (x,y)=(\sqrt{2},-\sqrt{2});\ (x,y)=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.
Így a $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ és $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ pontokban lehet lokális szélsőértéke f_3-nak.

$$\begin{aligned} D_1D_1f_3(x,y) &= 12x^2-4,\\ D_2D_1f_3(x,y) &= D_1D_2f_3(x,y)=4,\\ D_2D_2f_3(x,y) &= 12y^2-4. \end{aligned}$$

A $(0,0)$ pontban a Hesse-mátrix: $\begin{pmatrix} -4 & 4\\ 4 & -4\end{pmatrix}$, így $\Delta_1=-4$, $\Delta_2=0$ miatt nem alkalmazható tételünk.
Bizonyítsa be, hogy $(0,0)$-ban nincs lokális szélsőérték.
A $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ és a $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ pontban is kapjuk egyszerű számolással, hogy $\Delta_1=20>0$, $\Delta_2=384>0$, így e két pontban szigorú lokális minimuma van f_3-nak, ennek értéke: -8.

d) Az

$$f_4(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+3x-2z \qquad ((x,y,z)\in\mathbb{R}^3)$$

kétszer differenciálható $\forall\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ esetén (indokolja).

$$\left.\begin{aligned} D_1f_4(x,y,z)&=2x-y+3=0\\ D_2f_4(x,y,z)&=2y-x=0\\ D_3f_4(x,y,z)&=2z-2=0 \end{aligned}\right\} \iff (x,y,z)=(-2,-1,1),$$

ezért itt lehet f_4-nek lokális szélsőértéke.

$$\begin{aligned} &D_1D_1f_4(x,y,z)=2,\ D_2D_1f_4(x,y,z)=D_1D_2f_4(x,y,z)=-1,\\ &D_3D_1f_4(x,y,z)=D_1D_3f_4(x,y,z)=0,\ D_2D_3f_4(x,y,z)=D_3D_2f_4(x,y,z)=0,\\ &D_2D_2f_4(x,y,z)=2,\ D_3D_3f_4(x,y,z)=2, \end{aligned}$$

így a Hesse-mátrix mindenütt, így $(-2,-1,1)$-ben is

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \implies \Delta_1=2>0,\ \Delta_2=3>0,\ \Delta_3=6>0,$$

ami adja, hogy f_4-nek szigorú lokális minimuma van a $(-2,-1,1)$-ben, értéke $f(-2,-1,1)=-4$.

6.15. feladat. Bizonyítsa be, hogy az

$$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$$

függvény (leképezés) reguláris $\mathbb{R}^2$-n, kölcsönösen egyértelmű a $D = \{(x,y)|\ 0 < y < 2\pi\}$ halmazon, de nem kölcsönösen egyértelmű $\mathbb{R}^2$-n. Határozza meg $f(D)$-t és $(f^{-1})'(0,1)$-et.

Megoldás. Az $f_1(x,y) = e^x \cos y,\ f_2(x,y) = e^x \sin y$ függvények (mint egyváltozós folytonosan differenciálható függvények szorzatai) folytonosan differenciálhatók és

$$\det f'(x) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0 \quad (\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}),$$

így f reguláris leképezés $\mathbb{R}^2$-n.
A korábban tanultak szerint $f \iff$ kölcsönösen egyértelmű D-n, ha $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \implies x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$.
Ha $(e^{x_1} \cos y_1, e^{x_1} \sin y_1) = (e^{x_2} \cos y_2, e^{x_2} \sin y_2)$, akkor

$$e^{x_1} \cos y_1 = e^{x_2} \cos y_2,\ e^{x_1} \sin y_1 = e^{x_2} \sin y_2\ .$$

A két egyenlet négyzetre emelése és összeadása adja, hogy

$$e^{2x_1}(\cos^2 y_1 + \sin^2 y_1) = e^{2x_2}(\cos^2 y_2 + \sin^2 y_2),$$

azaz $e^{2x_1} = e^{2x_2}$ teljesül, ami (az exp függvény szigorú monotonitása miatt) $\iff$ teljesül, ha $x_1 = x_2$.
Ekkor viszont $\cos y_1 = \cos y_2$ és $\sin y_1 = \sin y_2$ kell, hogy teljesüljön, ami csak akkor igaz $0 < y_1, y_2 < 2\pi$-re, ha $y_1 = y_2$.
Ezzel bizonyítottuk, hogy f kölcsönösen egyértelmű D-n.
Mivel $f(0,0) = f(0,2\pi)$ és $0 \neq 2\pi$, így f $\mathbb{R}^2$-n nem kölcsönösen egyértelmű.
Rögzített $x \in \mathbb{R}$-re az $\{(x,y)|\ 0 < y < 2\pi\}$ halmaz képe az (u,v) síkban az $(u,v) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ pontok összessége, melyekre $u^2 + v^2 = (e^x)^2$ teljesül, azaz egy $(0,0)$-középpontú, e^x sugarú kör, megfosztva az $(e^x, 0)$ ponttól.
$x \in \mathbb{R}$ tetszőleges lehet, így $f(D) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0)|\ u \geq 0\}$.
D-n f reguláris és kölcsönösen egyértelmű, így f^{-1} is reguláris.
A $(0,1)$ pont a $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ képe f-re, azaz $f\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) = (0,1)$.
Ezért felhasználva a Kalkulus II. jegyzet VI. fejezet tételét:

$$(f^{-1})'(0,1) = \left(f'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.16. feladat. Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 - y^3$, akkor $f(0,0) = 0$. Létezik-e a 0-nak olyan környezete, melyen $f(x,y) = 0$ megoldható y-ra x függvényében? Differenciálható-e a kapott g függvény $x = 0$-ban?

Megoldás. A Kalkulus II. jegyzetben szereplő implicitfüggvény-tétel $k = 1,\ n = 1$ speciális esetének feltételei most nem teljesülnek maradéktalanul, ha $(a, b) = (0, 0)$. f folytonosan differenciálható (ez ellenőrizhető), de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3y^2$ miatt $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.
Ugyanakkor az $x^2 - y^3 = 0$ egyenlet megoldható y-ra x függvényében. A megoldás a $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ folytonos függvény, hiszen $x^2 - (\sqrt[3]{x^2})^3 = 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Ugyanakkor g nem differenciálható $x = 0$-ban, mert

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

határérték nem létezik (hiszen $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$).

6.17. feladat. Megoldható-e az

$$\begin{aligned} x_1^2 - y_1 y_2 &= 0 \\ 3x_1^3 - y_1 - 2y_2 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer y_1-re és y_2-re x_1 függvényében az $x_1 = 1$ pont egy környezetében?

Megoldás. Az

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1, y_2) &= x_1^2 - y_1 y_2 \\ f_2(x_1, y_1, y_2) &= 3x_1^3 - y_1 - 2y_2\ , \end{aligned}$$

$f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ jelöléssel egyenletrendszerünk

$$f(x_1, y_1, y_2) = (f_1(x_1, y_1, y_2), f_2(x_1, y_1, y_2))$$

alakú. A kérdés tehát az, hogy $\exists$-e $g = (g_1, g_2)$ valamilyen $K(1, r)$-en értelmezett függvény (függvényrendszer), hogy $f(x_1, g_1(x_1), g_2(x_1)) = 0$ $K(1, r)$-en.
Egyik út a válaszhoz, ha megoldjuk a kétismeretlenes egyenletrendszert y_1-re és y_2-re, ebből a megoldásrendszerből kiválasztjuk azokat, melyek $K(1, r)$-en értelmezettek.
A választ e nélkül is megadhatjuk, ha teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei $a = 1,\ k = 1,\ n = 2$ mellett.
Nyilván $f = (f_1, f_2)$ folytonosan differenciálható.
Kérdés, milyen y_1 és y_2-re teljesülnek egyenleteink, ha $x_1 = 1$, azaz, hogy $1 - y_1 y_2 = 0,\ 3 - y_1 - 2y_2 = 0$. Ez teljesül például, ha $y_1 = y_2 = 1$, tehát

$b = (1, 1)$.
Ekkor

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1, y_2) = \begin{vmatrix} -y_2 & -y_1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2y_2 - y_1$$

miatt $\det \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) = 1 \neq 0$.

Tehát $\exists\ (a, b_1, b_2) = (1, 1, 1)$, hogy $\det \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) = 1 \neq 0$.

Ezért az implicitfüggvény-tétel miatt $\exists\ K(1, r) \in \mathbb{R}$ és egy egyértelműen meghatározott $g\colon K(1, r) \to \mathbb{R}^2$ $(g = (g_1, g_2))$, hogy $g(1) = (g_1(1), g_2(1)) = (1, 1)$ és $f(x, g(x)) = 0$ $(x \in K(1, r))$.
Továbbá g folytonosan differenciálható.

6.18. feladat. Határozza meg az alábbi feltételes lokális szélsőérték feladatok megoldását:

a) Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ függvénynek a $h(x) = (x - 2)^2 + y^2 - 1 = 0$ feltételre vonatkozó szélsőértékeit;

b) Az $f(x, y) = x + y$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ függvénynek a $h(x) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 1 = 0$ feltételre vonatkozó szélsőértékeit.

Megoldás. A feltételes lokális szélsőérték szükséges feltételére vonatkozó tétel szerint (a kétváltozós esetre korlátozódva) úgy járunk el, hogy definiáljuk az

$$F\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda h(x, y)$$

függvényt.
Ott lehet feltételes lokális szélsőérték, ahol

$$D_1F(x, y, \lambda) = 0,\ D_2F(x, y, \lambda) = 0,\ h(x, y) = 0.$$

a) Most is teljesül, hogy f és h folytonosan differenciálhatók.

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda[(x - 2)^2 + y^2 - 1],$$

így a

$$\begin{aligned} D_1F(x, y, \lambda) &= 2x + 2\lambda(x - 2) = 0 \\ D_2F(x, y, \lambda) &= 2y + 2\lambda y = 0 \\ h(x, y) &= (x - 2)^2 + y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani.
A megoldások $\lambda = 1,\ x = 1,\ y = 0$ és $\lambda = -3,\ x = 3,\ y = 0$, így az $(1, 0)$ és $(3, 0)$ pontokban lehet feltételes lokális szélsőérték.
$f(1, 0) = 1,\ f(3, 0) = 9$.

Az $(x-2)^2+y^2=1$ egy kör egyenlete, mely kompakt halmaz, így azon f felveszi a maximumát és minimumát, s ezek csak 9 illetve 1 lehetnek.

b) f és h folytonosan differenciálhatók. Legyen

$$F(x,y,\lambda)=x+y++\lambda\left[(x-2)^2+(y+1)^2-1\right],$$

ekkor a

$$\begin{aligned}D_1F(x,y,\lambda)&=1+2\lambda(x-2)=0\\D_2F(x,y,\lambda)&=1+2\lambda(y+1)=0\\h(x,y)&=(x-2)^2+(y+1)^2-1=0\end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani, s erre

$$\begin{aligned}\lambda&=\frac{\sqrt{2}}{2},\ x=2-\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\lambda&=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ x=2+\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

adódik. Az $(x-2)^2+(y+1)^2=1$ is egy kör egyenlete, ami kompakt halmaz, melyen f felveszi maximumát és minimumát, ezek pedig

$$f\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2},-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+\sqrt{2},\ f\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2},-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-\sqrt{2}\ .$$

6.19. feladat. Határozza meg az xy minimális és maximális értékét az $x^2+y^2=1$ kör pontjaiban.

Megoldás. Az $f(x,y)=xy$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ függvény folytonosan differenciálható, a $h(x,y)=x^2+y^2-1$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ függvény is.
A feladat úgy fogalmazható, hogy határozzuk meg az $f(x,y)=xy$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ függvény lokális szélsőértékeit a $h(x,y)=x^2+y^2-1=0$ feltételre.
A probléma megoldására vonatkozó tétel feltételei teljesülnek, így az alkalmazható.
Tekintsük az

$$F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x^2+y-1)\quad((x,y,\lambda)\in\mathbb{R}^3)$$

függvényt. A problémának a

$$\begin{aligned}D_1F(x,y,\lambda)&=y+2\lambda x=0\\D_2F(x,y,\lambda)&=x+2\lambda y=0\\h(x,y)&=x^2+y^2-1=0\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásaként kapott (x, y) pontokban lehet megoldása.
Az első két egyenletből kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 = 4\lambda^2(x^2 + y^2) \iff \lambda = \pm\frac{1}{2}\,.$$

$\lambda = \frac{1}{2}$-re $y = -x$, így $x^2 + x^2 = 1 \implies x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \implies y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$;
$\lambda = -\frac{1}{2}$-re $y = x$, így $x^2 + x^2 = 1 \implies x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \implies y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ezért az f függvénynek a $h = 0$ feltételre a

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

pontokban lehet lokális szélsőértéke.
Az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel egy kört határoz meg az (x, y) síkban, mely kompakt halmaz, így ezen $f(x, y) = xy$ felveszi az abszolút minimumát és maximumát, melyek

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

és

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

miatt $-\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{2}$ lehetnek.

Megjegyzés. Az alábbi gondolatmenet mutatja, hogy egyes esetekben elemi módszerek egyszerűbben vezetnek eredményre.
$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ miatt

$$xy = \frac{1}{2}\left[(x + y)^2 - (x^2 + y^2)\right] = \frac{1}{2}\left[(x + y)^2 - 1\right],$$

ami mutatja, hogy xy akkor minimális, ha $(x + y)^2$ az, vagyis ha
$x + y = 0 \iff y = -x$, de akkor a feltételből

$$x^2 + x^2 = 1 \iff x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \implies \quad y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

ezért xy a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ és $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pontokban veszi fel minimumát, a $-\frac{1}{2}$ értéket.

Másrészt $0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ miatt $xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2} = \dfrac{1}{2}$ és egyenlőség csak $y = x$ esetén lehetséges, ami hasonlóan mint előbb adja, hogy az $\dfrac{1}{2}$ maximumot xy a $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$-ben veszi fel.

6.20. feladat. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 3x - 3y$ függvény szélsőértékeit a $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x, y \geq 0,\ x + y \leq 2\}$ halmazon.

Megoldás. D egy zárt háromszöglap, melyet az $x = 0,\ y = 0$ és $x + y = 2$ egyenesek határolnak. Ez kompakt halmaz, így azon f-nek van maximuma és minimuma.
Először nézzük, hogy D belsejében, a D° nyílt halmazon van-e lokális szélsőértéke f-nek.
Ott lehet, ahol

$$D_1 f(x,y) = 2x - y + 3 = 0, \quad D_2 f(x,y) = 2y - x - 3 = 0,$$

melynek megoldása az $(x,y) = (-1,1) \notin D^\circ$ pont, így f-nek D°-on nincs lokális (és így globális) szélsőértéke.
Így a maximum és minimum hely a háromszög kerületén van.

a) Ha az $x = 0,\ y \in [0,2]$ által meghatározott határszakaszt tekintjük, úgy az $f(0,y) = g(y) = y^2 - 3y$ ($y \in [0,2]$) egyváltozós függvény szélsőértékeit keressük. Ekkor $\exists\ g'(y) = 2y - 3 = 0$ és $g''(y) = 2$ miatt kapjuk, hogy g-nek $y = \dfrac{3}{2} \in]0,2[$-ben lokális minimuma van, melynek értéke: $-\dfrac{9}{4}$. $g(0) = 0,\ g(2) = -2$.
Így
$$f\left(0, \frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4},\ f(0,0) = 0,\ f(0,2) = -2.$$

b) Ha $y = 0$, akkor az $f(x,0) = h(x) = x^2 + 3x$ ($x \in [0,2]$) egyváltozós függvény szélsőértékeit kell meghatározni.
$$\exists\ h'(x) = 2x + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{3}{2} \notin [0,2],$$
így h-nak $]0,2[$-ben nincs lokális szélsőértéke. A végpontokban $h(0) = 0$, $h(2) = 10$, így $f(0,0) = 0,\ f(2,0) = 10$.

c) Ha $x + y = 2$, akkor $y = 2 - x$, így az $f(x, 2-x) = l(x) = 3x^2 - 2$ ($x \in [0,2]$) egyváltozós függvény szélsőértékeit keressük.
Ekkor $l'(x) = 6x = 0 \iff x = 0 \notin]0,2[$, így csak $[0,2]$ végpontjaiban kell meghatározni l értékeit: $l(0) = -2,\ l(2) = 10$, így

$f(0,2) = -2,\ f(2,0) = 10.$

A minimum így az $f\left(0, \dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{9}{4}$, a maximum az $f(2,0) = 10$ érték.

Gyakorló feladatok

1) Számítsa ki az alábbi függvények parciális deriváltjait:

$$f_1(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) |\ y \in \mathbb{R}\}\right);$$
$$f_2(x,y) = x\sin(x+y) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2);$$
$$f_3(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}} \quad (x,y,z > 0);$$
$$f_4(x,y,z) = x^{y^z} \quad (x,y,z > 0).$$

2) Létezik-e $D_1 f(0,0)$, $D_2 f(0,0)$? Milyen e-re létezik $D_e f(0,0)$?
Differenciálható-e f $(0,0)$-ban? Folytonos-e f $(0,0)$-ban?
Ha

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2+(y-x)^2} & \text{, ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

3) Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (e^{2x}\cos y, e^{2x}\sin y)$.
Létezik-e f'? Ha igen, határozza meg.
Határozza meg az $S = [0,1] \times [0,\pi]$ halmaz képét f-re.

4) Legyen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ rögzített, $f\colon K(x_0,1) \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = \dfrac{2x}{1-\|x\|^2}$.
Számítsa ki $f'(x)$-et (ha létezik).

5) Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, hogy

$$f(x_1,x_2) = (e^{2x_1+x_2}, 3x_2 - \cos x_1, x_1^2 + x_2 + 2),$$
$$g(y_1,y_2,y_3) = (3y_1 + 2y_2 + y_3^2, y_1^2 - y_3 + 1).$$

Ha $F(x) = g(f(x))$ $(x \in \mathbb{R}^2)$, úgy $F'(0,0) =?$
Ha $G(y) = f(g(y))$ $(y \in \mathbb{R}^3)$, úgy $G'(0,0,0) =?$

6) Bizonyítsa be, hogy $D_1D_2 f = D_2D_1 f$, ha

$$f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2 \ ((x,y) \in \mathbb{R}^2), \text{ vagy } f(x,y) = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}\ .$$

7) Írja fel a Taylor-formulát az $a = (1, 1, 1)$ pontban $r = 3$ mellett a maradéktag nélkül, ha

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 \quad ((x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3).$$

8) Írja fel $x - 1$ és $y - 2$ polinomjaként az

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + 2xy^2 + y^3 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvényt.

9) Határozza meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:

a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$;

b) $f(x, y) = (x - y)(1 - xy) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$;

c) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$;

d) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y) \quad ((x, y) \in]-\pi, \pi[\times]-\pi, \pi[)$.

10) Bizonyítsa be, hogy az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ függvény kölcsönösen egyértelmű a $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x > 0\}$ halmazon. Reguláris-e f D-n?

11) Megoldható-e a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4^2 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer az x_1, x_2, x_4 ismeretlenekre x_3 függvényében, illetve az x_1, x_2, x_3 ismeretlenekre x_4 függvényében?

12) Határozza meg az alábbi feltételes lokális szélsőérték feladatok megoldását:

a) Az $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ függvényét az $x^2 + y^2 = 1$ feltételre;

b) Az $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + 2x_3$ függvényét az $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2 = 0$ feltételre.

13) Határozza meg az

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y) \quad \left((x, y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

függvény szélsőértékeit.

14) Határozza meg az $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ ellipszisen azokat a pontokat, melyek maximális illetve minimális távolságra vannak a $(0, 0)$ ponttól.

VII. fejezet
Riemann-integrál $\mathbb{R}^n$-ben

7.1. feladat. Legyenek $f, g\colon Q \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan korlátos függvények, hogy $f(x) \le g(x)$ $(x \in Q)$. Mutassa meg, hogy

$$\underline{\int_Q} f \le \underline{\int_Q} g \qquad \text{és} \qquad \overline{\int_Q} f \le \overline{\int_Q} g$$

teljesül.

Megoldás. Legyen $P = P_1 \times P_2$ egy tetszőleges felosztása Q-nak és T_{ij} ezen felosztás egy tetszőleges résztéglája.
Ha

$$m_{ij}^f \doteq \inf_{x \in T_{ij}} \{f(x)\} \ ; \ m_{ij}^g \doteq \inf_{x \in T_{ij}} \{g(x)\} \ ;$$
$$M_{ij}^f \doteq \sup_{x \in T_{ij}} \{f(x)\} \ ; \ M_{ij}^g \doteq \sup_{x \in T_{ij}} \{g(x)\} \ ;$$

akkor $f(x) \le g(x)$ $(x \in Q)$ miatt

$$m_{ij}^f \le m_{ij}^g \quad \text{és} \quad M_{ij}^f \le M_{ij}^g$$

teljesül. Ezek $V(T_{ij}) > 0$ miatt adják $\forall\ T_{ij}$ téglára, hogy

$$m_{ij}^f V(T_{ij}) \le m_{ij}^g V(T_{ij}) \ ; \ M_{ij}^f V(T_{ij}) \le M_{ij}^g V(T_{ij}).$$

Ezen egyenlőtlenségeket összegezve kapjuk a

$$s(f,P) = \sum_{i,j} m_{ij}^f V(T_{ij}) \le \sum_{i,j} m_{ij}^g V(T_{ij}) = s(g,P),$$
$$S(f,P) = \sum_{i,j} M_{ij}^f V(T_{ij}) \le \sum_{i,j} M_{ij}^g V(T_{ij}) = S(g,P)$$

egyenlőtlenségeket, melyekből

$$\underline{\int_Q} f = \sup_P \{s(f,P)\} \le \sup_P \{s(g,P)\} = \underline{\int_Q} g$$

és

$$\overline{\int_Q} f = \inf_P\{S(f,P)\} \le \inf_P\{S(g,P)\} = \overline{\int_Q} g$$

következik, ami adja az állítást.

7.2. feladat. Legyen $Q = [0,1]\times[0,1]$, $f\colon Q \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$. Határozza meg $\underline{\int}_Q f$ és $\overline{\int}_Q f$ értékét.

Megoldás. A Darboux-tétel következményének a) része miatt Q $\forall$ $\langle P^k\rangle$ normális felosztássorozatára

$$\lim_{k\to\infty} s(f,P^k) = \underline{\int}_Q f, \qquad \lim_{k\to\infty} S(f,P^k) = \overline{\int}_Q f.$$

Legyen $P_1^k = \left\{\frac{i}{k} \mid i = 0,1,2,\dots,k\right\}$ és $P^k = P_1^k \times P_1^k$ $(k\in\mathbb{N})$,
úgy $\langle P^k\rangle$ egy normális felosztássorozata $[0,1]\times[0,1]$-nek (hiszen $\operatorname{diam} T_{ij} = \frac{\sqrt{2}}{k}$ $\forall$ T_{ij}-re, így $\|P^k\| = \frac{\sqrt{2}}{k} \to 0$, ha $k\to\infty$).
Nyilván $m_{ij} = x_{i-1}y_{j-1} = \frac{i-1}{k}\cdot\frac{j-1}{k}$, $M_{ij} = x_iy_j = \frac{i}{k}\cdot\frac{j}{k}$, $V(T_{ij}) = \frac{1}{k^2}$, ezért

$$\begin{aligned}
s(f,P^k) &= \sum_{i,j=1}^{k} \frac{i-1}{k}\cdot\frac{j-1}{k}\cdot\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^4}\sum_{i=1}^{k-1} i \sum_{j=1}^{k-1} j = \frac{1}{k^4}\left[\frac{k(k-1)}{2}\right]^2 = \\
&= \frac{k^2(k-1)^2}{4k^4} = \frac{(k-1)^2}{4k^2} = \frac{k^2-2k+1}{4k^2} \to \frac{1}{4} \\
S(f,P^k) &= \sum_{i,j=1}^{k} \frac{i}{k}\cdot\frac{j}{k}\cdot\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^4}\sum_{i=1}^{k} i \sum_{j=1}^{k} j = \frac{1}{k^4}\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 = \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4k^4} = \frac{k^2+2k+1}{4k^2} \to \frac{1}{4}\ .
\end{aligned}$$

Így $\underline{\int}_Q f = \overline{\int}_Q f = \frac{1}{4}$.
Ez az integrál definíciója miatt adja, hogy az adott függvény Riemann-integrálható Q-n és $\int\limits_Q f = \frac{1}{4}$.

7.3. feladat. Legyen $Q = [0,1]\times[0,1]$,

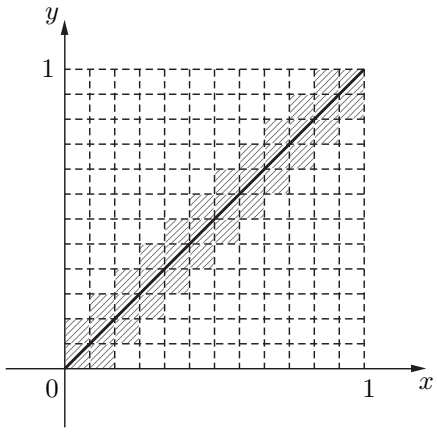
$$f\colon Q\to\mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } x = y \\ 0 & \text{, ha } x \ne y\ . \end{cases}$$

Mutassa meg, hogy f Riemann-integrálható.

Megoldás. A Riemann-kritérium szerint egy $f\colon Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény $\Longleftrightarrow$ Riemann-integrálható Q-n, ha $\forall\ \epsilon > 0$-hoz $\exists\ P$ felosztása Q-nak, hogy $\mathcal{O}(f, P) < \varepsilon$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy $\dfrac{3}{n} < \varepsilon$ (ez jön például abból, hogy $\left\langle \dfrac{3}{n} \right\rangle$ nullsorozat).

Tekintsük $[0,1] \times [0,1]$-nek azt a $P = P_1 \times P_1$ felosztását, ahol $P_1 = \left\{ \dfrac{i}{n} |\ i = 0, 1, 2, \ldots, n \right\}$. Ekkor $V(T_{ij}) = \dfrac{1}{n^2}$.



Ekkor f definíciója miatt:
a besatírozott T_{ij} négyzetekre: $m_{ij} = 0,\ M_{ij} = 1$,
a többi T_{ij} négyzetre: $m_{ij} = 0,\ M_{ij} = 0$.
Mivel $3n - 2$ db besatírozott négyzet van, így ezen P felosztásra

$$\mathcal{O}(f, P) = \sum_{i,j} (M_{ij} - m_{ij}) V(T_{ij}) = \sum_{3n-2} (1 - 0) \frac{1}{n^2} = \frac{3n-2}{n^2} < \frac{3}{n} < \varepsilon,$$

ami adja a Riemann-kritérium teljesülését.
A bizonyítást a Lebesgue-kritériummal is elvégezhetjük, mert függvényünk a Q átlójának pontjai kivételével folytonos. Az átlónak pedig (mint $\mathbb{R}^2$-beli egyenes szakasznak) a síkbeli Lebesgue-mértéke 0.

7.4. feladat. Legyen $f\colon Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható a $Q \subset \mathbb{R}^n$ téglán. Bizonyítsa be, hogy ha $f = 0$ egy nullmértékű E halmaztól eltekintve, akkor $\int\limits_Q f = 0$.

Megoldás. Q bármely P felosztása esetén, annak bármely $T_{i_1\dots i_n}$ résztéglájára $T_{i_1\dots i_n} \not\subset E$, mert ellenkező esetben E nem lehetne Lebesgue-szerint nullmértékű (miért is?), így $\forall\ T_{i_1\dots i_n}$ résztéglának van olyan pontja, ahol f zérus.
Ebből nyilvánvalóan következik, hogy

$$m_{i_1\dots i_n} \le 0, \quad M_{i_1\dots i_n} \ge 0 \quad \forall \text{ résztéglán},$$

ami adja, hogy

$$s(f,P) = \sum_{i_1,\dots,i_n} m_{i_1\dots i_n} V(T_{i_1\dots i_n}) \le 0,$$
$$S(f,P) = \sum_{i_1,\dots,i_n} M_{i_1\dots i_n} V(T_{i_1\dots i_n}) \ge 0.$$

Ezek pedig adják, hogy

$$\underline{\int}_Q f = \sup_P s(f,P) \le 0, \qquad \overline{\int}_Q f = \inf_P S(f,P) \ge 0.$$

Ez pedig f Q feletti Riemann-integrálhatósága, azaz $\underline{\int}_Q f = \overline{\int}_Q f$ miatt csak úgy lehetséges, ha

$$\int_Q f = \underline{\int}_Q f = \overline{\int}_Q f = 0,$$

amit bizonyítani kellett.

7.5. feladat. Vizsgálja meg, hogy léteznek-e az alábbi integrálok. Ha igen, határozza meg értéküket:

a) $\displaystyle\iint_{[-1,2]\times[1,4]} (3x + 5x^2y)\ dxdy$; b) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} x\sqrt{y}\ dxdy$;

c) $\displaystyle\iiint_{[0,1]\times[0,2]\times[1,2]} (5x^2z + yz^2)\ dxdydz$; d) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[-1,0]} xe^{xy}\ dxdy$;

e) $\displaystyle\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,1]} y\cos xy\ dxdy$; f) $\displaystyle\iint_{[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,1]} \sqrt{1 - y\cos^2 x}\ dxdy.$

Megoldás. Két-, illetve három dimenziós tégla feletti integrálok létezését kell vizsgálnunk. A függvények minden esetben folytonosak (ami a Kalkulus II. jegyzet és példatár IV. fejezetében tanultak szerint bizonyítható). Egy

$f\colon Q \to \mathbb{R}$ folytonos függvény Riemann-integrálható (lásd Kalkulus II. jegyzet VII. 1. c fejezet 5. tétel), így valamennyi integrálunk létezik.
Az integrálok értéke a Fubini-tétel 3. következményében szereplő formula speciális eseteivel számolható, ezek:

$$\iint\limits_Q f = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\ dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)\ dy\right]\ dx =$$

$$= \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)\ dx\right]\ dy;$$

$$\iiint\limits_Q f = \iiint\limits_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x,y,z)\ dxdydz =$$

$$= \int\limits_{a_1}^{b_1} \left(\int\limits_{a_2}^{b_2} \left[\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\ dz\right]\ dy\right)\ dx =$$

$$= \ldots = \int\limits_{a_3}^{b_3} \left(\int\limits_{a_2}^{b_2} \left[\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\ dx\right]\ dy\right)\ dz.$$

Az integrálás sorrendje általában szabadon választható, de (ahogy ezt látni fogjuk) a kiszámítás nehézsége (esetleg lehetősége is) függhet a választott sorrendtől.
Természetesen az egy változótól függő integrálok kiszámításánál használjuk a Newton-Leibniz formulát is.

a) $$\iint\limits_{[-1,2]\times[1,4]} (3x+5x^2y)\ dxdy = \int\limits_{-1}^{2} \left[\int\limits_1^4 (3x+5x^2y)\ dy\right]\ dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{2} \left[3xy + 5x^2\frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=4}\ dx = \int\limits_{-1}^{2} \left(12x + 5x^2\cdot 8 - 3x - \frac{5}{2}\right)\ dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{2} \left(9x + 40x^2 - \frac{5}{2}\right)\ dx = \left[9\frac{x^2}{2} + 40\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= 18 + \frac{320}{3} - 5 - \frac{9}{2} + \frac{40}{3} - \frac{5}{2} = 126.$$

b) $$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} x\sqrt{y}\ dxdy = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^1 x\sqrt{y}\ dx\right]\ dy = \int\limits_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\sqrt{y}\right]_{x=0}^{x=1}\ dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{y}\ dy = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ .$$

c) $$\iiint\limits_{[0,1]\times[0,2]\times[1,2]} (5x^2z + yz^2)\ dxdydz =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^2 (5x^2z + yz^2)\ dy\right]\ dx\right)\ dz =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^1 \left[5x^2zy + \frac{y^2}{2}z^2)\right]_{y=0}^{y=2}\ dx\right)\ dz =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^1 (10x^2z + 2z^2)\ dx\right)\ dz =$$

$$= \int\limits_1^2 \left[\frac{10x^3}{3}z + 2z^2x\right]_{x=0}^{x=1}\ dz = \int\limits_1^2 \left(\frac{10}{3}z + 2z^2\right)\ dz =$$

$$= \left[\frac{10}{3}\cdot\frac{z^2}{2} + 2\frac{z^3}{3}\right]_1^2 = \frac{20}{3} + \frac{16}{3} - \frac{10}{6} - \frac{2}{3} = \frac{29}{3}\ .$$

d) $$\iint\limits_{[0,1]\times[-1,0]} xe^{xy}\ dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-1}^0 xe^{xy}\ dy\right)\ dx = \int\limits_0^1 [e^{xy}]_{y=-1}^{y=0}\ dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (1 - e^{-x})\ dx = \left[x + e^{-x}\right]_0^1 = 1 + e^{-1} - 1 = \frac{1}{e}\ .$$

Próbálja ki a másik utat, vagyis $\int\limits_{-1}^0 \left(\int\limits_0^1 xe^{xy}\ dx\right)\ dy$ meghatározását is (már az indulás is bonyolultabb, s mi van még azután).

e)
$$\iint\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,1]} y\,\cos xy\;dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos xy\;dx\right)\;dy =$$
$$= \int\limits_0^1 [\sin xy]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}\;dy = \int\limits_0^1 \sin\frac{\pi}{2}y\;dy =$$
$$= \left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}y\right]_0^1 = -\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(0) = \frac{2}{\pi}\;.$$

A másik út elég reménytelennek tűnik, próbálja ki!

f)
$$\iint\limits_{\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\times[0,1]} \sqrt{1-y\cos^2 x}\;dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int\limits_0^1 \sqrt{1-y\cos^2 x}\;dy\right)\;dx =$$
$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{(1-y\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\right]_{y=0}^{y=1} dx =$$
$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{(1-\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right) + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right]\;dx =$$
$$= \frac{2}{3}[\operatorname{tg} x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\;dx = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\;dx =$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^{-2} x\sin x - \sin x)\;dx =$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left[-\frac{\cos^{-1} x}{-1} + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} + \cos\frac{\pi}{4} - 1 - 1\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\right).$$

A másik út itt is rögösebbnek kínálkozik, kipróbálja?

7.6. feladat. Legyen $f\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ olyan, hogy

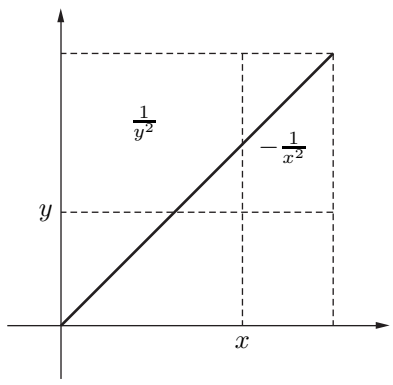
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2} & \text{, ha } 0<x<y<1\\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{, ha } 0<y<x<1\\ 0 & \text{, egyébként .}\end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy \qquad \text{és} \qquad \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx$$

is létezik és nem egyenlő. Ugyanakkor f nem Riemann-integrálható $[0,1]\times[0,1]$-en.

Megoldás. Az alábbi ábra az f értelmezési tartományát mutatja, s azt jelzi, hogy a szaggatott vonalakon (a négyzet határán és egyik átlóján) $f=0$ teljesül.
A felső háromszög felett f értéke $\dfrac{1}{y^2}$, az alsó háromszögön pedig $-\dfrac{1}{x^2}$.



$\forall$ rögzített $x\in]0,1[$-re:

$$\exists\int_0^1 f(x,y)\,dy=\int_0^x -\frac{1}{x^2}\,dy+\int_x^1\frac{1}{y^2}\,dy=\left[-\frac{1}{x^2}y\right]_{y=0}^{y=x}+\left[-\frac{1}{y}\right]_{y=x}^{y=1}=$$
$$=-\frac{1}{x}+\left(-1+\frac{1}{x}\right)=-1$$

$x = 0$ és $x = 1$ esetén $\int\limits_0^1 f(x,y)\ dy = \int\limits_0^1 0\ dy = 0$.

Így

$$\exists \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 f(x,y)\ dy \right)\ dx = \int\limits_0^1 -1\ dx = [-x]_0^1 = -1.$$

$\forall$ rögzített $y \in]0,1[$-re:

$$\exists \int\limits_0^1 f(x,y)\ dx = \int\limits_0^y \frac{1}{y^2}\ dx + \int\limits_y^1 -\frac{1}{x^2}\ dx = \left[\frac{1}{y^2}x\right]_{x=0}^{x=y} + \left[\frac{1}{x}\right]_{x=y}^{x=1} =$$

$$= \frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{y} = 1.$$

$y = 0$ és $y = 1$ esetén $\int\limits_0^1 f(x,y)\ dx = \int\limits_0^1 0\ dx = 0$.

Ezért

$$\exists \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 f(x,y)\ dx \right)\ dy = \int\limits_0^1 1\ dy = [y]_0^1 = 1.$$

Ha $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\ dxdy$ létezne, úgy a Fubini-tétel második következménye és az előbbiek miatt az egyenlő lenne 1-gyel és -1-gyel is, ez ellentmondás.

7.7. feladat. Bizonyítsa be az alábbi integrálok létezését és számítsa ki értéküket:

a) $\iint\limits_S (3x^4 + 2y)\ dxdy$, ha S az $y = x^2$ és $y = 2x$ függvények gráfja által bezárt tartomány;

b) $\iint\limits_S (x^2 + y^2)\ dxdy$, ha S az $y = x,\ y = x + 1,\ y = 0,\ y = 3$ egyenesekkel határolt tartomány;

c) $\iint\limits_S x^3 \cos xy\ dxdy$, ha $S = \{\, (x,y) \,|\, 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2 \,\}$;

d) $\iint\limits_S xy^2\ dxdy$, ha $S = \left\{\, (x,y) \,|\, 0 \le x \le \frac{p}{2},\ 0 \le y \le \sqrt{2px},\ p > 0 \,\right\}$;

e) $\iint\limits_S 2y \cos x\ dxdy$, ha $S = \left\{\, (x,y) \,|\, 1 \le y \le 3,\ \frac{\pi}{6} \le x \le y^2 \,\right\}$;

f) $\iiint\limits_S \frac{1}{(1+x+y+z)^2}\ dxdydz$, ha S az $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ és $x+y+z = 1$ síkokkal határolt tetraéder;

g) $\iint\limits_S e^{x^2}\ dxdy$, ha S az $y = x,\ y = 0,\ x = 1$ egyenesekkel határolt háromszög tartomány.

Megoldás. Látni fogjuk, hogy a szereplő S tartományok $\mathbb{R}^2$ illetve $\mathbb{R}^3$-beli egyszerű tartományok.
Tudjuk, hogy ha $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt és mérhető halmaz, $\Phi,\ \Psi\colon K \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, hogy $\Phi(x) \le \Psi(x)$ $(x \in K)$, akkor az
$S = \{\,(x,t) \in \mathbb{R}^n \,|\, x \in K,\ \Phi(x) \le t \le \Psi(x)\}$ halmazt egyszerű tartománynak nevezzük $\mathbb{R}^n$-ben.
Ha S egyszerű tartomány, $f\colon S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f integrálható S-en és

$$\text{(F)} \qquad \int\limits_S f = \int\limits_{x\in K} \left[\int\limits_{t=\Phi(x)}^{t=\Psi(x)} f(x,t)\ dt \right]\ dx\ .$$

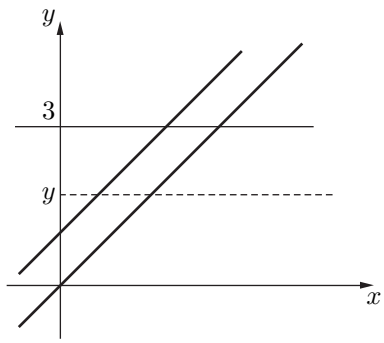
(Fubini-tétel egyszerű tartományra).
A feladatban szereplő függvények folytonosak.

a) Egyszerűen belátható, hogy $S = \{\,(x,y) \,|\, 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 2x\,\}$, így $K = [0,2],\ \Phi(x) = x^2,\ \Psi(x) = 2x$ $(x \in [0,2])$ folytonos függvények és $\Phi(x) = x^2 \le 2x = \Psi(x)$ $(x \in [0,2])$.
Így S egyszerű tartomány (a t változó helyett y szerepel) $\mathbb{R}^2$-ben, $f(x,y) = 3x^4 + 2y$ $((x,y) \in S)$ folytonos függvény, így f integrálható S-en, ezért (F) szerint (alkalmazva a Newton-Leibniz formulát is)

$$\iint\limits_S (3x^4 + 2y)\ dxdy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{x^2}^{2x} (3x^4 + 2y)\ dy \right)\ dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left[3x^4 y + y^2\right]_{y=x^2}^{y=2x}\ dx = \int\limits_0^2 (6x^5 + 4x^2 - 3x^6 - x^4)\ dx =$$

$$= \left[x^6 + 4\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = 64 + \frac{32}{3} - \frac{3\cdot 128}{7} - \frac{32}{5} = \frac{1408}{105}\ .$$



b) Az ábra segít abban, hogy belássuk, hogy $S = \{\,(x,y)\,|\,0 \le y \le 3,\ y - 1 \le x < y\,\}$, ami egyszerű tartomány, hogy (most x szerepét y veszi át, t helyébe pedig x kerül) $K = [0,3]$, $\Phi(y) = y - 1$, $\Psi(y) = y$, $\Phi(y) = y - 1 \le y = \Psi(y)$, $f(x,y) = x^2 + y^2$ $((x,y) \in S)$ folytonos, így (F) szerint

$$\exists \iint\limits_S (x^2+y^2)\ dxdy = \int\limits_0^3 \left(\int\limits_{y-1}^{y} (x^2+y^2)\ dx \right)\ dy =$$

$$= \int\limits_0^3 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=y-1}^{x=y}\ dy = \int\limits_0^3 \left[\frac{y^3}{3} + y^3 - \frac{(y-1)^3}{3} - y^2(y-1) \right]\ dy =$$

$$= \int\limits_0^3 \left(2y^2 - y + \frac{1}{3} \right)\ dy = \left[2\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{3}y \right]_0^3 = \frac{67}{4}\ .$$

c) S alakja mutatja, hogy egyszerű tartomány, a többi feltétel is teljesül, így (F)-ből kapjuk, hogy

$$\iint\limits_S x^3 \cos xy\ dxdy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{x^2} x^3 \cos xy\ dy \right)\ dx == \int\limits_0^2 \left[x^2 \sin xy \right]_{y=0}^{y=x^2}\ dx =$$

$$= \int\limits_0^2 x^2 \sin x^3\ dx = \left[\frac{-\cos x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{-\cos(8)}{3} + \frac{\cos(0)}{3} = \frac{1}{3}(1 - \cos(8)).$$

d) Az előzőekhez hasonló indoklással:

$$\exists \iint\limits_S xy^2\ dxdy = \int\limits_0^{\frac{p}{2}} \left(\int\limits_0^{\sqrt{2px}} xy^2\ dy \right)\ dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{p}{2}} \left[x\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{2px}}\ dx = \int\limits_0^{\frac{p}{2}} x\frac{(\sqrt{2px})^3}{3}\ dx =$$

$$= \frac{(\sqrt{2p})^3}{3} \int\limits_0^{\frac{p}{2}} x^{\frac{5}{2}}\ dx = \frac{(\sqrt{2p})^3}{3} \left[\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \right]_0^{\frac{p}{2}} =$$

$$= \frac{2}{7}(\sqrt{2p})^3 \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^7} = \frac{1}{42}p^5\ .$$

e) b)-hez hasonlóan:

$$\iint\limits_S 2y\cos x\ dxdy = \int\limits_1^3 \left(\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} 2y\cos x\ dx \right)\ dy =$$

$$= \int\limits_1^3 [2y\sin x]_{x=\frac{\pi}{6}}^{x=y^2}\ dy = \int\limits_1^3 (2y\sin y^2 - y)\ dy =$$

$$= \left[-\cos y^2 - \frac{y^2}{2} \right]_1^3 = -\cos(9) - \frac{9}{2} + \cos(1) + \frac{1}{2} =$$

$$= \cos(1) - \cos(9) - 4$$

f) Az ábra mutatja, hogy a $K = \{\, (x,y) \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x \,\}$ kompakt és mérhető halmazzal S az

$$S = \{\, (x,y,z) \,|\, (x,y) \in K,\ 0 \le z \le 1-x-y \,\}$$

egyszerű tartomány, így (mivel a többi feltétel is teljesül) (F) adja, hogy

$$\iiint\limits_S \frac{1}{(1+x+y+z)^2}\,dxdydz = \iint\limits_K \left[\int\limits_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^2}\,dz\right] dxdy =$$

$$= \iint\limits_K \left[-\frac{1}{1+x+y+z}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dxdy = \iint\limits_K \left(\frac{1}{1+x+y} - \frac{1}{2}\right) dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} \left(\frac{1}{1+x+y} - \frac{1}{2}\right) dy\right) dx = \int\limits_0^1 \left[\ln(1+x+y) - \frac{1}{2}y\right]_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\ln 2 - \frac{1}{2}(1-x) - \ln(1+x)\right) dx = \left[\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)x + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 - \int\limits_0^1 \ln(1+x)\,dx =$$

$$= \ln(2) - \frac{1}{4} - \int\limits_0^1 1\cdot\ln(1+x)\,dx = \ln(2) - \frac{1}{4} - \left([x\ln(1+x)]_0^1 - \int\limits_0^1 x\cdot\frac{1}{1+x}\right) dx =$$

$$= \ln(2) - \frac{1}{4} - \ln(2) + \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = -\frac{1}{4} + [x - \ln(1+x)]_0^1 = \frac{3}{4} - \ln(2).$$

g) S az ábra szerinti háromszög tartomány.
Az $x \to e^{x^2}$ függvényt (x szerint) nem tudjuk elemi úton integrálni, ezért először y-szerinti integrálással próbálkozzunk, ekkor tekintsük az $S = \{\,(x,y)\,|\,0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\,\}$ egyszerű tartományt, ahol $K = [0,1]$. $(x,y) \to e^{x^2}$ folytonos, így

$$\exists \iint\limits_S e^{x^2}\,dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x e^{x^2}\,dy\right) dx = \int\limits_0^1 \left[e^{x^2}y\right]_{y=0}^{y=x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 xe^{x^2}\,dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2}\ .$$

7.8. feladat. Számítsa ki az alábbi görbékkel határolt tartományok Jordan-mértékét:

a) $2y = 16 - x^2,\ x + 2y = 4$; b) $xy = 1,\ x + y = \dfrac{5}{2}$;

c) $y = \sqrt{x},\ y = \sqrt{3x - 18},\ y = 0$; d) $y^2 = 2x + 1,\ y^2 = -4x + 4$.

Megoldás. Ha $S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz, úgy ha az $f(x,y) = 1$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény Riemann-integrálható S-en, akkor azt mondjuk, hogy S Jordan-mérhető $\mathbb{R}^2$-ben és Jordan-mértékén az

$$m_J(S) \doteq \iint\limits_S 1 \, dxdy$$

számot értjük.

A 7. feladat elején mondottak szerint – mivel az $f(x,y) = 1$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ korlátos függvény folytonos – ha S egyszerű tartomány, úgy az (F) formulával számolható $m_J(S)$, $f \equiv 1$ választással.

a) A $2y = 16 - x^2$ parabola és az $x + 2y = 4$ egyenes metszéspontjai (az egyenletrendszer megoldásával) egyszerűen meghatározhatók.

Ezek a $\left(-3, \dfrac{7}{2}\right)$ és $(4,0)$ pontok.

Így

$$S = \left\{ (x,y) \mid -3 \le x \le 4\,,\ 2 - \frac{x}{2} \le y \le 8 - \frac{1}{2}x^2 \right\},$$

azaz S egyszerű tartomány, ahol $K = [-3,4]$ kompakt halmaz;

$\Phi(x) = 2 - \dfrac{x}{2}$, $\Psi(x) = 8 - \dfrac{1}{2}x^2$ folytonos függvények K-n, ezért

$$m_J(S) = \iint\limits_S 1 \, dxdy = \int\limits_{-3}^{4} \left(\int\limits_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{1}{2}x^2} 1 \, dy \right) dx = \int\limits_{-3}^{4} [y]_{y=2-\frac{x}{2}}^{y=8-\frac{1}{2}x^2} \, dx =$$

$$= \int\limits_{-3}^{4} \left(8 - \frac{1}{2}x^2 - 2 + \frac{x}{2} \right) dx = \int\limits_{-3}^{4} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{2} + 6 \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + 6x \right]_{-3}^{4} = \frac{343}{12}\,.$$

b) Az $xy = 1$ hiperbola és az $x + y = \dfrac{5}{2}$ egyenes metszéspontjai: $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ és $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.

Így

$$S = \left\{ (x,y) \,|\, x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right],\ \frac{1}{x} \le y \le \frac{5}{2} - x \right\}$$

egyszerű tartomány, $K = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, $\Phi(x) = \frac{1}{x}$, $\Psi(x) = \frac{5}{2} - x$ folytonosak K-n, ezért

$$m_J(S) = \iint\limits_S 1\ dxdy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} 1\ dy \right)\ dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} [y]_{y=\frac{1}{x}}^{y=\frac{5}{2}-x}\ dx =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{5}{2} - x - \frac{1}{x} \right)\ dx = \left[\frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2} - \ln x \right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{13}{8} - 2\ln 2.$$

c) Az $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{3x-18}$, $y = 0$ görbék metszéspontjai $(0,0)$, $(6,0)$, $(9,3)$. $y = \sqrt{x} \iff y^2 = x\ (x \geq 0)$; $y = \sqrt{3x-18} \iff x = \frac{1}{3}y^2 + \frac{8}{3}\ \left(x \geq \frac{8}{3}\right)$.

Így

$$S = \left\{ (x,y) \,|\, y \in [0,3],\ y^2 \leq x \leq \frac{1}{3}y^2 + \frac{18}{3} \right\}$$

szerint adott, azaz egyszerű tartomány, hogy $K = [0,3]$, $\Phi(x) = y^2$, $\Psi(x) = \frac{1}{3}y^2 + 6$, ezért

$$m_J(S) = \iint\limits_S 1\ dxdy = \int\limits_0^3 \left(\int\limits_{y^2}^{\frac{1}{3}y^2+6} 1\ dx \right)\ dy =$$

$$= \int\limits_0^3 [x]_{x=y^2}^{x=\frac{1}{3}y^2+6}\ dy = \int\limits_0^3 \left(\frac{1}{3}y^2 + 6 - y^2 \right)\ dy =$$

$$= \int\limits_0^3 \left(-\frac{2}{3}y^2 + 6 \right)\ dy = \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{y^3}{3} + 6y \right]_0^3 = 12.$$

d) $y^2 = 2x+1$ és $y^2 = -4x+4$ parabolák, az x-tengellyel, metszéspontjaik: $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$.

Így

$$S = \left\{ (x,y) \,|\, y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}],\ \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{4}y^2 + 1 \right\}$$

egyszerű tartomány, $K = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $\Phi(y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}$, $\Psi(x) = -\frac{1}{4}y^2 + 1$, ezért

$$m_J(S) = \iint\limits_S 1\ dxdy = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int\limits_{\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{4}y^2+1} 1\ dx \right)\ dy =$$

$$= \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [x]_{x=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}}^{x=-\frac{1}{4}y^2+1}\ dy = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{4}y^2 + 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} \right)\ dy =$$

$$= \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(-\frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{2} \right)\ dy = \left[-\frac{3}{4} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{3}{2}y \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\ .$$

7.9. feladat. Számítsa ki az alábbi felületekkel határolt S testek Jordan-mértékét:

a) $z = 1 + x + y,\ x = 0, y = 0, z = 0,\ x + y = 1;$
b) $x + y + z = 2,\ x^2 + y^2 = 1,\ x = 0, y = 0, z = 0.$

Megoldás. Ha $S \subset \mathbb{R}^3$, úgy $m_J(S) = \iiint\limits_S 1\ dxdydz$.

Ha S egyszerű tartomány $\mathbb{R}^3$-ban, úgy most is használható a 7. feladatban idézett (F) formula, $f \equiv 1$ választással.

a) $x = 0$ az (y, z)-sík, $y = 0$ az (x, z)-sík, míg $z = 0$ az (x, y)-sík egyenlete. $x + y = 1$ olyan sík, mely merőleges az (x, y)-síkra, s azt az $x + y = 1$ (x, y)-síkbeli egyenesben metszi.
Végül $z = 1 + x + y$ egy olyan sík $\mathbb{R}^3$-ban, mely a z-tengelyt a $(0, 0, 1)$ pontban metszi. Ezeket figyelembe véve S az alábbi test:
Ha

$$K = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [0, 1],\ 0 \le y \le 1 - x \,\},$$

úgy ez egy kompakt mérhető halmaz (egy zárt háromszög), továbbá

$$S = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in K,\ 0 \le z \le 1 + x + y \,\},$$

azaz egyszerű tartomány, ahol $\Phi(x,y)=0,\ \Psi(x,y)=1+x+y$ folytonos függvények K-n, így (F)-et is használva

$$m_J(S)=\iiint\limits_S 1\ dxdydz=\iint\limits_K\left(\int\limits_0^{1+x+y}1\ dz\right)\ dxdy=$$

$$=\iint\limits_K [z]_{z=0}^{z=1+x+y}\ dxdy=\iint\limits_K(1+x+y)\ dxdy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{1-x}(1+x+y)\ dy\right)\ dx=\int\limits_0^1\left[y+xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x}\ dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{3}{2}-x-\frac{x^2}{2}\right)\ dx=\frac{5}{6}\ .$$

b) Az $x+y+z=2$ olyan sík, mely a tengelyeket 2 egységnyi távolságra metszi a $(0,0,0)$ ponttól.
Az $x^2+y^2=1$ egy végtelen henger palástja, melynek tengelye merőleges az (x,y)-síkra és azt az $x^2+y^2=1$ körben metszi; $x=0, y=0, z=0$ a koordináta-síkok. S szemléltetése
Ha

$$K=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x\in[0,1],\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\,\},$$

úgy K kompakt és mérhető halmaz (egy negyed körlap), továbbá

$$S=\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,(x,y)\in K,\ 0\le z\le 2-x-y\,\},$$

azaz egyszerű tartomány a $\Phi(x,y)=0,\ \Psi(x,y)=2-x-y$ folytonos függvényekkel K-n.
Így használható (F), és

$$
\begin{aligned}
m_J(S) &= \iiint\limits_S 1\ dxdydz = \iint\limits_K \left(\int\limits_0^{2-x-y} 1\ dz \right)\ dxdy = \\
&= \iint\limits_K [z]_{z=0}^{z=2-x-y}\ dxdy = \iint\limits_K (2-x-y)\ dxdy = \\
&= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (2-x-y)\ dy \right)\ dx = \int\limits_0^1 \left[2y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}\ dx = \\
&= \int\limits_0^1 \left(2\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} \right)\ dx = \\
&= 2\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 -2x\sqrt{1-x^2}\ dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x^2)\ dx = \\
&= 2\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx + \frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \\
&= 2\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx - \frac{2}{3} = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\ dt - \frac{2}{3} = \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\ dt - \frac{2}{3} = \\
&= \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\ .
\end{aligned}
$$

Itt $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}$ értékét az $x = \sin t$ $\left(t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right)$ helyettesítéssel számoltuk ki.

7.10. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\iint\limits_S (x^2+y^2)\ dxdy$, ahol $S = \{\,(x,y)\,|\,0 < x^2+y^2 \le 4\}$;

b) $\iint\limits_S e^{x^2+y^2}\ dxdy$, ahol $S = \{\,(x,y)\,|\,0 < x^2+y^2 \le R^2,\ R > 0\}$.

Megoldás. A helyettesítéses integrálás tételét követő 1) és 2) példák azt sugallják, hogy a helyettesítéshez a polár-transzformációt használjuk, azaz a

$$g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

transzformációt, melyre $\det g' = r$ (ahogy ezt tanultuk).
A

$$\iint\limits_{S=g(E)} f(x,y)\ dxdy = \iint\limits_E f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\ drd\varphi$$

formulát használjuk (ami a Kalkulus II. jegyzet VII. 4. fejezet (I-T) formulájából jön a speciális esetben).
E-t az egyes feladatokban adjuk meg.

a) g (a polár-transzformáció) az $E = \{\,(r,\varphi)\,|\,0 < r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\,\}$ halmazt képezi le S-be kölcsönösen egyértelmű módon, így

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)\ dxdy = \iint\limits_{]0,2]\times[0,2\pi]} (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\cdot r\ drd\varphi =$$

$$= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} r^3\ drd\varphi = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{2\pi} r^3\ d\varphi\right)\ dr =$$

$$= \int\limits_0^2 [r^3\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\ dr = \int\limits_0^2 2\pi r^3\ dr = 2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}\pi\ .$$

b) Hasonló meggondolással, most $E = \{\, (r,\varphi) \,|\, 0 < r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \,\}$ és

$$\iint\limits_S e^{x^2+y^2}\ dxdy = \iint\limits_{]0,R]\times[0,2\pi]} e^{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\cdot r\ drd\varphi =$$

$$= \iint\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} re^{r^2}\ drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^R re^{r^2}\ dr\right)\ d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{e^{r^2}}{2}\right]_0^R\ d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}e^{R^2} - \frac{1}{2}\right)\ d\varphi =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2}e^{R^2} - \frac{1}{2}\right) = \pi\left(e^{R^2} - 1\right).$$

Gyakorló feladatok

1) Legyenek $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ nemnegatív és monoton növekedő függvények. Bizonyítsa be, hogy a

$$h\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R},\ h = f\cdot g$$

függvény Riemann-integrálható $Q = [0,1]\times[0,1]$-en.

2) Bizonyítsa be, hogy ha $A_i \subset \mathbb{R}^n$ $(i \in \mathbb{N})$ nullmértékű halmazok $\mathbb{R}^n$-ben, akkor $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_i$ is nullmértékű $\mathbb{R}^n$-ben.

3) Bizonyítsa be, hogy egy $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla esetén BdQ nullmértékű $\mathbb{R}^n$-ben.

4) Legyen $f\colon Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható a $Q \subset \mathbb{R}^n$ téglán. Bizonyítsa be, hogy ha $f \ge 0$ és $\int\limits_Q f = 0$, akkor $f = 0$ egy nullmértékű halmaztól eltekintve.

5) Léteznek-e az alábbi integrálok? Ha igen, határozza meg értéküket:

a) $\iint\limits_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\pi]} (3\sin x + x\cos y)\ dxdy$;

b) $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \dfrac{1}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}}\ dxdy$;

c) $\iint\limits_S \cos(x+y)\ dxdy$, ha $S = \{\,(x,y)\,|\,0 \le y \le \pi,\ 0 \le x \le y\,\}$;

d) $\iint\limits_S e^{\frac{x}{y}}\ dxdy$, ha S az $y = 2x,\ y = -x,\ y = 4$ egyenesekkel határolt háromszög;

e) $\iint\limits_S (x-y)\ dxdy$, ha S az $y^2 = 3x,\ y^2 = 4-x,\ y = 0$ görbékkel határolt tartomány;

f) $\iiint\limits_S (x\sin z+(y+z)\cos x+y^2)\ dxdydz$, ahol $S = \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] \times [-1,1] \times [0,\pi]$.

6) Határozza meg az alábbi görbékkel határolt tartományok Jordan-mértékét (területét):

a) $x = y^3,\ x+y = 2,\ y = 0$;

b) $y = \sin x,\ y = \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2$.

7) Számítsa ki az alábbi felületekkel adott testek Jordan-mértékét (térfogatát):

a) $x^2 + y^2 = 1,\ x+y+z = 2,\ z = 0$;

b) $x^2 + z = 64,\ 3x + 4y = 24,\ x = 0, y = 0, z = 0$.

8) Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\iiint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\ dxdydz$, ha $S = \{\,(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2 \le 4\,\}$;

b) $\iint\limits_S 1\ dxdy$, ha S az $x^2 = y,\ x^2 = 2y,\ x^2 = y^2,\ x^2 = 4y^2$ görbékkel határolt tartomány.

VIII. fejezet
Differenciálegyenletek

1. Elemi úton megoldható differenciálegyenlet-típusok

A) Szeparábilis differenciálegyenletek

8.1. feladat. Oldja meg az alábbi szeparábilis differenciálegyenleteket, illetve a rájuk vonatkozó kezdetiérték problémákat:

a) $y' = e^{2x} - x$; b) $y' = 2x,\ y(1) = 4$;

c) $y' = -\dfrac{x}{y}$; d) $y' = -\dfrac{xy}{x+1}$;

e) $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0,\ y(0) = 1$; f) $xy' + y = y^2,\ y(1) = \dfrac{1}{2}$.

Megoldás. A Kalkulus II. jegyzetben beláttuk, hogy:
Ha az $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R},\ g\colon \langle c,d\rangle \to \mathbb{R}$ $(g \neq 0)$ adott folytonos függvények, úgy az $y\colon \langle a,b\rangle \to \langle c,d\rangle$ differenciálható függvény $\Longleftrightarrow$ megoldása az

$$(\mathsf{Sz}) \qquad y' = f(x)g(y)$$

szeparábilis differenciálegyenletnek, ha

$$(\mathsf{SzMo}) \qquad \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(t)}\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

teljesül, ahol $x, x_0 \in \langle a,b\rangle,\ y, y_0 \in \langle c,d\rangle,\ y(x_0) = y_0$.
(Az intervallumok lehetnek zártak és nyíltak is).
Az (SzMo)-t teljesítő $y\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény tehát teljesíti (Sz)-t és az $y(x_0) = y_0$ feltételt is, így az

$$y' = f(x)g(y),\ y(x_0) = y_0$$

Cauchy-feladat megoldása is. Így az (SzMo) formulát Cauchy-feladatnál célszerű használni.

Másrészt jeleztük azt is, hogy a formális úton kapott

$$(*) \qquad \int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx$$

formulát teljesítő $y\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ függvények is megoldásai (Sz)-nek. Ezt is használhatjuk (Sz) megoldásánál.

a) Az $y' = e^{2x} - x$ szeparábilis egyenletnél $f(x) = e^{2x} - x$ $(x \in \mathbb{R})$ és $g(y) = 1$ $(y \in \mathbb{R})$, így $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle = \mathbb{R}$.
Észrevehetjük, hogy az $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldás primitív függvénye az $f(x) = e^{2x} - x$ függvények, így

$$y(x) = \int (e^{2x} - x)\, dx = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{x^2}{2} + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

adja a megoldást.
Itt most nem is kellett (SzMo)-t vagy $(*)$-ot használni.

b) Az $y' = 2x$, $y(1) = 4$ Cauchy-feladat differenciálegyenlete szeparábilis, hogy $f(x) = 2x$ $(x \in \mathbb{R})$, $g(y) = 1$ $(y \in \mathbb{R})$, továbbá $x_0 = 1$, $y_0 = 4$, így (az előbb mondottak szerint) $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \iff$ megoldása a Cauchy-feladatnak, ha $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int_4^{y(x)} 1\, dt = \int_1^x 2t\, dt \iff [t]_4^{y(x)} = [t^2]_1^x \iff y(x) - 4 = x^2 - 1,$$

azaz $y(x) = x^2 + 3$ $(x \in \mathbb{R})$.

c) Az $y' = -\dfrac{x}{y}$ olyan szeparábilis differenciálegyenlet, hogy $f(x) = -x$ $(x \in \mathbb{R})$ és $g(y) = \frac{1}{y}$ $(y > 0)$, vagy $g(y) = y$ $(y < 0)$, így $y\colon]a,b[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, vagy $y\colon]a,b[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_-$ típusú megoldásokat keresünk.
Ha $(*)$-ot használjuk, úgy $y \iff$ megoldás, ha

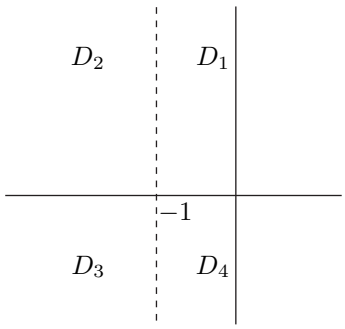
$$\int y\, dy = -\int x\, dx \iff \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1 \iff y^2 = C - x^2,$$

ahol $C \in \mathbb{R}_+$ olyan, hogy $C - x^2 > 0 \iff |x| < C$.
Így adott $C \in \mathbb{R}_+$-ra az $y = \sqrt{C - x^2}$ $(|x| < C)$, illetve az $y = -\sqrt{C - x^2}$ $(|x| < C)$ függvények a megoldások a $]-C, C[$ intervallumon.
A megoldás egy görbesereg, mely az x-tengelyen lévő pontjaitól „megfosztott” $\sqrt{C}$ sugarú, origó középpontú körökből áll.

d) Az

$$y' = -\frac{xy}{x+1} = -\frac{x}{x+1}y$$

olyan szeparábilis differenciálegyenlet, ahol $g(y) = y$ $(y \neq 0)$, $f(x) = -\dfrac{x}{x+1}$ $(x \neq -1)$.
Ha a bevezetőben jelzett formulákat akarjuk használni, úgy $]a, b[=]-\infty, -1[$, vagy $]a, b[=]-1, +\infty[$, illetve $]c, d[= \mathbb{R}_-$, vagy $]c, d[= \mathbb{R}_+$ választható, azaz a $D_i \subset \mathbb{R}^2$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ tartományokon tekinthetjük egyenletünket.



Megjegyezzük, hogy az $y = 0$ $(x \neq -1)$ függvény is megoldás.
D_1-en: $y\colon\ ]-1, +\infty[\to \mathbb{R}_+ \iff$ megoldás, ha $\forall\ x > -1,\ y > 0$-ra

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{x}{x+1}\,dx \iff \\
&\qquad \iff \int \frac{1}{y}\,dy = -\int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\,dx \iff \\
&\qquad \iff \ln y = -x + \ln(x+1) + \ln C \quad (C > 0) \iff \\
&\qquad \iff y = C(x+1)e^{-x} \quad (C > 0).
\end{aligned}$$

D_2-n: $y\colon\ ]-\infty, -1[\to \mathbb{R}_+ \iff$ megoldás, ha $\forall\ x < -1,\ y > 0$-ra

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{x}{x+1}\,dx \iff \\
&\qquad \iff \ln y = -x + \ln(-(x+1)) + \ln C \quad (C > 0) \iff \\
&\qquad \iff y = -C(x+1)e^{-x} \quad (C > 0).
\end{aligned}$$

D_3-on: $y\colon\ ]-\infty,-1[\to\mathbb{R}_-\ \iff$ megoldás, ha $\forall\ x<-1,\ y<0$-ra

$$\int\frac{1}{y}\,dy=-\int\frac{x}{x+1}\,dx\iff$$
$$\iff\ln(-y)=-x+\ln(-(x+1))+\ln C\quad(C>0)\iff$$
$$\iff-y=-C(x+1)e^{-x}\iff y=C(x+1)e^{-x}\quad(C>0).$$

D_4-en: $y\colon\ ]-1,+\infty[\to\mathbb{R}_-\ \iff$ megoldás, ha $\forall\ x>-1,\ y<0$-ra

$$\int\frac{1}{y}\,dy=-\int\frac{x}{x+1}\,dx\iff\ln(-y)=$$
$$=-x+\ln(x+1)+\ln C\quad(C>0)\iff$$
$$\iff y=-C(x+1)e^{-x}\quad(C>0).$$

A fentiek mutatják, hogy mindegyik megoldást megkapjuk $y=C^*(x+1)e^{-x}\quad(x\neq-1)$ alakban, ahol $C^*=C\in\mathbb{R}_+$ vagy $C^*=-C\in\mathbb{R}_-$, vagy $C^*=0$.

e) Az

$$(x^2-1)y'+2xy^2=0,\quad y(0)=1$$

Cauchy-feladat esetén $x_0=0\in]-1,1[,\ y_0=1>0$, így egyenletünket $y'=\dfrac{2x}{1-x^2}y^2$ (szeparábilis) alakba írhatjuk, ha $x\in]-1,1[,\ y\in\mathbb{R}_+$. Használva (SzMo)-t, $y\colon\ ]a,b[\subseteq]-1,1[\to\mathbb{R}_+\iff$ megoldása a Cauchy-feladatnak, ha

$$\int_1^{y(x)}\frac{1}{t^2}\,dt=\int_0^x\frac{2x}{1-x^2}\,dx\iff$$
$$\iff\left[-\frac{1}{t}\right]_1^{y(x)}=\left[-\ln(1-x^2)\right]_0^x\iff$$
$$\iff1-\frac{1}{y(x)}=-\ln(1-x^2)\iff\frac{1}{y(x)}=1+\ln(1-x^2)\iff$$
$$\iff y(x)=\frac{1}{1+\ln(1-x^2)}\qquad\left(x\in\left]-\sqrt{1-\frac{1}{e}},\sqrt{1-\frac{1}{e}}\right[\right)$$

(hiszen $x\in\left]-\sqrt{1-\dfrac{1}{e}},\sqrt{1-\dfrac{1}{e}}\right[$ esetén lesz $y(x)>0$).

Megjegyzés. Ha csak az egyenletet vizsgáljuk, úgy $y(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ nyilván megoldás. Egyébként pedig az $\mathbb{R}^2$ hat tartományán kell vizsgálni az egyenletet. Melyek ezek, és hogy adódnak a megoldások?

f) Az $xy' + y = y^2,\ y(1) = \dfrac{1}{2}$ Cauchy-feladat ekvivalens az $y' = \dfrac{1}{x}(y^2 - y),\ y(1) = \dfrac{1}{2}$ Cauchy-feladattal, ha $x > 0$.
Az $y(1) = \dfrac{1}{2}$ feltétel miatt a problémát $y \in]0,1[$-re vizsgáljuk, így $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R}_+),\ g(y) = y^2 - y \neq 0,\ y \in]0,1[$ mellett
$y\colon\ ]0,1[\to \mathbb{R} \iff$ megoldása a Cauchy-feladatnak, ha

$$\int_{\frac{1}{2}}^{y(x)} \frac{1}{t^2 - t}\, dt = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \iff \int_{\frac{1}{2}}^{y(x)} \frac{1}{t(t-1)}\, dt =$$

$$= \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \iff \int_{\frac{1}{2}}^{y(x)} \left(\frac{-1}{1-t} - \frac{1}{t}\right) dt =$$

$$= \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \iff [\ln(1-t)]_{\frac{1}{2}}^{y(x)} - [\ln t]_{\frac{1}{2}}^{y(x)} = [\ln t]_1^x \iff$$

$$\iff \ln(1 - y(x)) - \ln y(x) = \ln(x) \iff$$

$$\iff \ln \frac{1 - y(x)}{y(x)} = \ln x \iff$$

$$\iff \frac{1 - y(x)}{y(x)} = x \iff y(x) = \frac{1}{x+1} \qquad (x > 0).$$

Vizsgáljuk csak az egyenletet!

B) Változóban homogén differenciálegyenletek

8.2. feladat. Határozza meg az alábbi változóban homogén differenciálegyenletek megoldását:

a) $xy' - 2y - x = 0$; b) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$;

c) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

Megoldás. Látni fogjuk, hogy ezek kezelhetők változóban homogén differenciálegyenletként, és megoldásuk az $u(x) \doteq \dfrac{y(x)}{x}$ függvény bevezetésével visszavezethető szeparábilis differenciálegyenletekre.

a) Az $xy' - 2y - x = 0$ egyenlet $x > 0$ (vagy $x < 0$) esetén ekvivalens az $y' = 2\dfrac{y}{x} + 1$ változóban homogén differenciálegyenlettel.

Legyen $]c, d[=]-1, +\infty[$, $]a, b[=]0, +\infty[$, $\dfrac{y(x)}{x} > -1$, $(x \in]0, +\infty[)$ és $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ $(x \in \mathbb{R}_+)$, ahol $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ megoldása egyenletünknek. Akkor $y(x) = xu(x)$ $(x \in \mathbb{R}_+)$-ból következik, hogy

$$y'(x) = u(x) + xu'(x) \qquad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Ezeket a differenciálegyenletbe visszahelyettesítve következik, hogy

$$\begin{aligned} & u(x) + xu'(x) = 2u(x) + 1 \qquad (x \in \mathbb{R}_+) \\ \iff\ & xu'(x) = u(x) + 1 \qquad (x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

azaz az $u > -1$ függvény teljesít az

$$u' = \frac{1}{x}(u + 1)$$

szeparábilis differenciálegyenletet és $x > 0$, $u > -1$ is teljesül, így megoldására

$$\int \frac{1}{u+1}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx,$$

azaz

$$\ln(u + 1) = \ln x + \ln C,$$

illetve

$$u = Cx - 1 \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$

következik. Ez adja, hogy

$$y(x) = Cx^2 - x \qquad (x \in \mathbb{R}_+)$$

az eredeti differenciálegyenlet megoldása.

b) Az

$$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$$

egyenlet $x > 0$ (vagy $x < 0$) esetén ekvivalens az

$$y' = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}$$

változóban homogén egyenlettel.
Ismét az $u(x) \doteq \dfrac{y(x)}{x}$ $(x \in \mathbb{R}_+)$ helyettesítést alkalmazva kapjuk az

$$xu' = -e^u, \quad \text{illetve} \quad u' = -\frac{1}{x}e^u$$

szeparábilis egyenletet, s ennek megoldása az

$$\int e^{-u}\, du = -\int \frac{1}{x}\, dx$$

formulából

$$u = -\ln(\ln cx),$$

ahol $c > 0$ és $cx > 1$ kell, hogy teljesüljön.
Így az eredeti egyenlet megoldása

$$y = -x\ln(\ln cx)$$

adott $c > 0$-ra az $\left]\dfrac{1}{c}, +\infty\right[$ intervallumon.

c) Az

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

egyenlet $x > 0$-ra (vagy $x < 0$-ra) ekvivalens az

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

változóban homogén egyenlettel.
Ebből az $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ $(x > 0)$ helyettesítéssel következik az

$$xu' = \sqrt{1 - u^2}, \quad \text{illetve} \quad u' = \frac{1}{x}\sqrt{1 - u^2}$$

szeparábilis egyenlet, ha $u(x) = \dfrac{y(x)}{x} \in]-1, 1[$.
Ennek megoldása teljesíti, hogy

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{1}{x}\, dx \qquad (u \in]-1, 1[,\ x > 0),$$

így $\arcsin u = \ln cx$, illetve $u = \sin(\ln cx)$ $(x > 0,\ c > 0)$ következik.
Ezért az eredeti egyenlet megoldása

$$y = x\ln(cx) \qquad (x \in \mathbb{R}_+,\ c > 0)$$

$\mathbb{R}_+$-on.

C) A) és B)-re visszavezethető differenciálegyenletek

8.3. feladat. Határozzuk meg az

$$\text{a)}\quad y' = (x+y)^2 \qquad ; \qquad \text{b)}\quad y' = \frac{2x+3y-5}{x+4y}$$

differenciálegyenletek megoldását.

Megoldás. Egyenleteink a Kalkulus II. jegyzet VIII. 3. fejezet c) részében szereplő $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ alakba tartoznak.

a) Használjuk az elméletben erre az esetre javasolt

$$u(x) \doteq x + y(x) \quad \text{illetve} \quad y(x) = u(x) - x$$

helyettesítést. Ekkor $y'(x) = u'(x) - 1$ miatt kapjuk az

$$u' - 1 = u^2, \quad \text{illetve} \quad u' = u^2 + 1$$

szeparábilis egyenletet, melynek $u \iff$ megoldása, ha

$$\int \frac{1}{u^2+1}\, du = \int 1\, dx$$

teljesül, amiből $\operatorname{arctg} u = x + c$, illetve $u = \operatorname{tg}(x+c)$ következik, ha adott c-re $x + c \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, azaz a $\left]-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right[$ intervallumon.
Ez adja, hogy

$$y(x) = \operatorname{tg}(x+c) - 1 \qquad \left(x \in \left]-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right[\right)$$

megoldása az eredeti egyenletnek a $\left]-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right[$ intervallumon.

b) Az

$$y' = \frac{2x+3y-5}{x+4y}$$

egyenlet esetében az $y = -1$ nem megoldás, így tegyük fel, hogy $y > -1$, továbbá, hogy $x + 4y > 0$. Ez igaz például, ha $y > 0$ és $x > 4$.
A

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 5 &= 0 \\ x + 4y &= 0 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer megoldása $x = 4,\ y = -1$, így az elmélet szerint vezessük be az

$$x = t + 4, \quad y(t+4) = \Psi(t) - 1 \quad (\Psi(t) \doteq y(t+4) + 1)$$

helyettesítéseket, ekkor $y'(t+4) = \Psi'(t)$-t is felhasználva:

$$y'(t+4) = \frac{2(t+4)+3(\Psi-1)-5}{t+4+4(\Psi-1)} \iff \Psi' = \frac{2t+3\Psi}{t+\Psi},$$

ha $t>0,\ \Psi>1$. $\Psi(t)=t$ nem megoldás, így tegyük fel, hogy $\Psi(t)>t$, azaz $\dfrac{\Psi(t)}{t}>1$.

Ez egy változóban homogén differenciálegyenlet Ψ-re.

Ebből az következik, hogy az $u(t)=\dfrac{\Psi(t)}{t}>1$ szerint definiált u függvény teljesíti

$$u' = -\frac{2}{t}\cdot\frac{2u^2-u-1}{1+4u} \qquad (t>0,\ u>1)$$

szeparábilis differenciálegyenletet, melyet egy u függvény $\iff$ teljesít, ha

$$\int \frac{4u+1}{2u^2-u-1}\,du = -\int \frac{2}{t}\,dt \qquad (t>0,\ u>1).$$

Mivel

$$\begin{aligned}
\int \frac{4u+1}{2u^2-u-1}\,du &= \int \frac{4u-1}{2u^2-u-1}\,du + \int \frac{1}{u^2-\frac{u}{2}-\frac{1}{2}}\,du = \\
&= \ln\left[2\left(u^2-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}\right)\right] + \int \frac{1}{(u-1)\left(u+\frac{1}{2}\right)}\,du = \\
&= \ln\left[2(u-1)\left(u+\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{2}{3}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+\frac{1}{2}}\right)du = \\
&= \ln\left[2(u-1)\left(u+\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{2}{3}\left[\ln(u-1)-\ln\left(u+\frac{1}{2}\right)\right] = \\
&= \ln\left[2(u-1)\left(u+\frac{1}{2}\right)(u-1)^{\frac{2}{3}}(u+1)^{-\frac{2}{3}}\right] = \\
&= \ln\left[2(u-1)^{\frac{5}{3}}\left(u+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]
\end{aligned}$$

és

$$-\int \frac{2}{t}\,dt = -2\ln t + \ln c_1 = \ln\frac{c_1}{t^2} \qquad (c_1>0),$$

így az ln függvény szigorú monotonitása miatt

$$2(u-1)^{\frac{5}{3}}\left(u+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{c_1}{t^2} \iff 2^3(u-1)^5\left(u+\frac{1}{2}\right)=\frac{c_1^3}{t^6} \iff$$
$$\iff (u-1)^5\left(u+\frac{1}{2}\right)=ct^{-6} \qquad (t>0,\ u>1,\ c>0).$$

Az $u(t)=\dfrac{\Psi(t)}{t}$, majd a $\Psi(t)=y(t+4)+1$, illetve $t+4=x$ helyettesítéssel (rövid számolás után) kapjuk az utóbbi egyenletből, hogy az y függvény $\iff$ megoldása az eredeti differenciálegyenletnek, ha

$$(y-x+5)^5(2y+x-2)=c\ .$$

Az $u>1$ feltétel adja, hogy $y-x+5>0$ és $c>0$ miatt $2y+x-2>0$ is teljesül, melyek adják, hogy $y>1$.

D) Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

A Kalkulus II. jegyzetben kimondtuk és bizonyítottuk a következőket: Ha $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos függvények, úgy az $y\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor megoldása az

$$\text{(LIH)} \qquad y'=f(x)y+g(x)$$

elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletnek, ha $\exists\ c\in\mathbb{R}$, hogy

$$\text{(LIHMo)} \qquad y(x)=cy_H(x)+y_p(x) \quad (x\in[a,b]),$$

ahol

$$(*) \qquad y_H(x)=\exp\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt \quad (x\in[a,b])$$

az

$$\text{(LH)} \qquad y'=f(x)y \quad (x\in[a,b])$$

lineáris homogén differenciálegyenlet sehol el nem tűnő, y_p pedig (LIH) egy partikuláris megoldása.
y_p-re van közvetlen előállításunk, de egyszerűbb a következő eljárás, melyet a konstansvariálás módszerének neveznek:
– határozzuk meg (LH) $(*)$ alakú megoldását;

– keressük y_p-t az

$$\text{(LIHPMo)} \qquad y_p(x) = c(x)\exp\left[\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right] \quad (x \in [a,b])$$

alakban, melyből $y_p'(x)$-et is meghatározzuk;

– helyettesítsük az y_p és y_p' függvényeket (LIH)-be;

– egyszerűsítés után egy $c'(x) = h(x)$ $(x \in [a,b])$ alakú egyenletet kapunk, melynek megoldása $c(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)\,dt$;

– megadjuk (LIHMo)-t.

Megjegyzések.

a) $[a,b]$ helyett nyílt intervallumot is tekinthetünk.

b) $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ és $\int_{x_0}^{x} h(t)\,dt$ helyett pedig $\int f(x)\,dx$ illetve $\int h(x)\,dx$ is írható, eltekintve az integrációs konstanstól.

8.4. feladat. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket (illetve kezdetiérték problémát):

a) $y' = -xy + x \quad (x \in \mathbb{R})$;

b) $x(y' - y) = e^x, \quad y(1) = e$;

c) $(2x+1)y' = 4x + 2y \quad \left(y > 0,\ x > -\dfrac{1}{2}\right)$;

d) $y' + y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sin x} \quad \left(x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$.

Megoldás.

a) Az $y' = -xy + x$ $(x \in \mathbb{R})$ inhomogén egyenlethez tartozó $y' = -xy$ $(x \in \mathbb{R})$ homogén egyenletnek (mely szeparábilis) $y > 0$ akkor és csak akkor megoldása, ha $\int \frac{1}{y}\,dy = -\int x\,dx$, melyből

$$\ln y = -\frac{x^2}{2}\ (x \in \mathbb{R}), \quad \text{illetve} \quad y_H = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

következik, ami a homogén egyenlet egy sehol el nem tűnő megoldása. Keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = c(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakban, úgy

$$y_p'(x) = c'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + c(x)(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

melyeket az eredeti egyenletbe helyettesítve

$$c'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + c(x)(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = -x \cdot c(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + x \quad (x \in \mathbb{R})$$

illetve

$$c'(x) = x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

következik, ami adja, hogy

$$c(x) = \int x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}\, dx = e^{\frac{x^2}{2}} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így

$$y_p(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = e^0 = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

és akkor az inhomogén egyenlet $y > 0$ általános megoldása (a bevezetőben mondottak szerint)

$$y(x) = c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.
Ha az $y < 0$ megoldását vizsgáljuk a homogén egyenletnek, úgy

$$y_H(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

míg $y_p(x) = 1$ $(x \in \mathbb{R})$ lesz.
Az inhomogén egyenlet általános megoldására pedig ugyanaz adódik, mint előbb.

b) Az $x(y' - y) = e^x,\ y(1) = e$ kezdetiérték probléma helyett tekinthető a

$$(\triangle) \qquad y' = y + \frac{e^x}{x} \quad (x > 0) \quad y(1) = e$$

feladat, mert az $(1, e)$ pont az $x > 0$ félsíkba esik, továbbá $y(1) > 0$ miatt legyen $y > 0$.
A $(\triangle')$

$$y' = y + \frac{e^x}{x} \quad (x > 0)$$

elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletének megoldásához tekintsük előbb az

$$y' = y$$

homogén egyenletet. $y > 0$ esetén ennek az $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ függvény akkor és csak akkor megoldása, ha

$$\int_e^{y(x)} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^x 1\, dt,$$

melyből következik, hogy

$$\ln \frac{y(x)}{e} = x - 1, \text{ azaz } y(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Így $y_H = e^x$ $(x \in \mathbb{R}_+)$.
Keressük y_p-t az $y_p(x) = c(x)e^x$ alakban $\mathbb{R}_+$-on, akkor

$$y_p'(x) = c'(x)e^x + c(x)e^x,$$

s ezeket $(\triangle')$-be behelyettesítve, rendezés után kapjuk c-re a $c'(x) = \dfrac{1}{x}$ egyenletet, melyből következik, hogy $c(x) = \ln x$ $(x > 0)$.
Ezeket felhasználva – (LIHMo) szerint –

$$y(x) = ce^x + e^x \ln(x) \quad (x > 0),$$

ami valóban megoldása a differenciálegyenletnek.
$y(1) = e$ adja, hogy $c = (e-1)e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{e} - \frac{1}{\sqrt{e}}$.

c) Ha $x > -\dfrac{1}{2}$, $y > 0$, úgy egyenletünk ekvivalens a

$$(\square) \qquad y' = \frac{2}{2x+1}y + \frac{4x}{2x+1}$$

explicit elsőrendű lineáris differenciálegyenlettel.
Az ehhez tartozó

$$y' = \frac{2}{2x+1}y \qquad \left(x > -\frac{1}{2}\right)$$

homogén egyenletnek $y \iff$ megoldása, ha

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{2}{2x+1}\, dx \quad \iff \quad y = c(2x+1) \quad \left(x > -\frac{1}{2}\right),$$

így $y_H = 2x + 1$ sehol el nem tűnő megoldás $x > -\dfrac{1}{2}$ esetén.
Keressük y_p-t

$$y_p(x) = c(x)(2x+1) \quad \left(x > -\frac{1}{2}\right)$$

alakban, úgy

$$y_p'(x) = c'(x)(2x+1) + 2 \cdot c(x),$$

melyeket ($\square$)-be helyettesítve, rendezés után

$$c'(x) = \frac{4x}{(2x+1)^2} = 2\frac{(2x+1)-1}{(2x+1)^2} =$$
$$= \frac{2}{2x+1} - \frac{2}{(2x+1)^2} \qquad \left(x > -\frac{1}{2}\right)$$

adódik, így

$$c(x) = \int \frac{2}{2x+1}\,dx - \int \frac{2}{(2x+1)^2}\,dx =$$
$$= \ln(2x+1) + \frac{1}{2x+1} \qquad \left(x > -\frac{1}{2}\right).$$

Tehát

$$y_p(x) = (2x+1)\ln(2x+1) + 1,$$

illetve

$$y(x) = c(2x+1) + (2x+1)\ln(2x+1) + 1 \qquad \left(x > -\frac{1}{2}\right),$$

s ez valóban megoldása ($\square$)-nak és akkor az eredeti egyenletnek is.

d) Egyenletünk írható az

$$(\circ) \qquad y' = -y \operatorname{tg} x + \frac{1}{\sin x} \qquad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

alakba. A ($\circ$)-höz tartozó homogén egyenlet

$$y' = -y \operatorname{tg} x \qquad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right),$$

melynek az $y\colon \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}_+$ függvény $\iff$ megoldása, ha

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx \iff \ln y = \ln\cos x + \ln c$$
$$\iff y = c \cdot \cos(x).$$

Így $y_H = \cos(x)$ egy nem eltűnő megoldás $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$-n.
Keressük y_p-t

$$y_p(x) = c(x)\cos(x) \qquad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

alakban, úgy

$$y_p'(x) = c'(x)\cos(x) - c(x)\sin(x) \qquad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right),$$

melyeket ($\circ$)-ba helyettesítve, rendezés után adódik, hogy

$$\begin{aligned} c'(x) &= \frac{1}{\sin(x)\cos(x)} \implies \\ \implies c(x) &= \int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\, dx = \\ &= \ln(\operatorname{tg} x) \quad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right). \end{aligned}$$

Ezért

$$y_p(x) = \cos(x)\ln\operatorname{tg}(x) \quad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right),$$

illetve

$$y(x) = c \cdot \cos(x) + \cos(x)\ln(\operatorname{tg}(x)) \quad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right),$$

ami valóban megoldása egyenletünknek.

E) Egzakt differenciálegyenletek

Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, $P, Q\colon D \to \mathbb{R}$ adott függvények. A

(E1) $$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

egyenletet, melyet szokás a

(E2) $$P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = 0$$

alakba is írni, egzaktnak nevezünk, ha az $f = (P,Q)\colon D \to \mathbb{R}^2$ függvénynek létezik primitív függvénye, azaz $\exists\, F\colon D \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy $F' = f$, azaz $D_1F = P$ és $D_2F = Q$ teljesül.
Ha például D téglalap vagy körlap, P és Q folytonosan differenciálhatók és $D_2P = D_1Q$ (D-n), akkor f-nek $\exists$ primitív függvénye.
Ismeretes, hogy az $y\colon I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény $\iff$ megoldása I-n az (E_1) (illetve a vele ekvivalens (E_2)) differenciálegyenletnek, ha $\exists\, c \in \mathbb{R}$, hogy

(EMo) $$F(x, y(x)) = c \qquad (x \in I)$$

D téglalap vagy körlap, akkor belátható, hogy F az

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\ dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\ dy$$

vagy

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\ dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\ dy$$

szerint határozható meg, ahol $(x_0,y_0) \in D$ tetszőlegesen választható.
F a következő módon is meghatározható (ha D téglalap vagy körlap), mivel $D_1F(x,y) = P(x,y)$, így $\forall$ rögzített y-ra F primitív függvénye P-nek, ezért

$$F(x,y) = \int P(x,y)\ dx + c(y).$$

De $D_2F = Q$, így a

$$D_2\left(\int P(x,y)\ dx\right) + c'(y) = Q$$

egyenletből meghatározható $c(y)$ és akkor F is.

8.5. feladat. Határozza meg az alábbi egzakt differenciálegyenletek megoldását:

a) $(2x+y)\ dx + (x-2y)\ dy = 0;$

b) $\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}y' = 0;$

c) $2xy\ dx + (x^2-y^2)\ dy = 0;$

d) $e^{-y}\ dx - (2y + xe^{-y})\ dy = 0.$

Megoldás.

a) $P(x,y) = 2x+y,\ Q(x,y) = x-2y\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, mely tekinthető téglalapnak is.
Belátható, hogy P,Q folytonosan differenciálhatók (hiszen $\exists\ D_1P = 2,\ D_2P = 1$ és folytonosak, illetve $\exists\ D_1Q = 1,\ D_2Q = -2$ és folytonosak), továbbá $D_2P(x,y) = 1 = D_1Q(x,y)$, így $\exists$ az $f = (P,Q)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvénynek primitív függvénye, azaz az egyenlet egzakt, továbbá

$(x_0, y_0) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ választással $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re

$$F(x,y) = \int_0^x (2x+0)\ dx + \int_0^y (x-2y)\ dy = x^2 + \left[xy - y^2\right]_{y=0}^{y=y} =$$
$$= x^2 + xy - y^2\ .$$

Így $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \iff$ megoldása az egyenletnek, ha $\exists\ c$, hogy

$$x^2 + xy - y^2 = c,$$

ami egy görbesereg $\mathbb{R}^2$-ben.
A másik módszer szerint, ha F primitív függvény, úgy $\forall\ y \in \mathbb{R}$ esetén

$$D_1F(x,y) = 2x + y \iff F(x,y) = \int (2x+y)\ dx + c(y) \iff$$
$$\iff F(x,y) = x^2 + xy + c(y).$$

$\forall$ rögzített y-ra

$$D_2F(x,y) = x + c'(y) = x - 2y \iff c'(y) = -2y \implies$$
$$\implies c(y) = -y^2,$$

ezért $F(x,y) = x^2 + xy - y^2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$, amint azt előbb is kaptuk.

b) Ekkor

$$P(x,y) = \frac{1}{y}\ , \quad Q(x,y) = -\frac{x}{y^2},$$

ha például $D = \{\,(x,y)\,|\,y > 0\,\}$, ami ugyancsak tekinthető téglalapnak. P és Q folytonosan differenciálhatók,

$$D_2P(x,y) = -\frac{1}{y^2} = D_1Q(x,y)\ D\text{-n},$$

így $\exists\ F\colon D \to \mathbb{R}$ primitív függvénye $f = (P,Q)$-nak, így az egyenlet egzakt és $(x_0, y_0) = (0,1)$ választással $\forall\ (x,y) \in D$-re

$$F(x,y) = \int_0^x \frac{1}{1}\ dx - \int_1^y \frac{x}{y^2}\ dy = x + \left[\frac{x}{y}\right]_{y=1}^{y=y} =$$
$$= x + \frac{x}{y} - x = \frac{x}{y}\ .$$

$y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \iff$ megoldás, ha $\exists\ c_1$, hogy $\dfrac{x}{y} = c_1$, azaz $y = cx > 0$. $D^* = \{\,(x,y)\,|\,y < 0\,\}$ esetén a megoldás $y = cx < 0$.

A másik út: F olyan, hogy

$$D_1F(x,y) = \frac{1}{y} \iff F(x,y) = \frac{x}{y} + c(y).$$

$$D_2F(x,y) = -\frac{x}{y^2} + c'(y) = -\frac{x}{y^2} \iff c'(y) = 0 \iff c(y) = c,$$

így $c = 0$ választással $\Longrightarrow$ $F(x,y) = \dfrac{x}{y}$, mint előbb.

c) $P(x,y) = 2xy$, $Q(x,y) = x^2 - y^2$ $((x,y) \in D = \mathbb{R}^2)$, P, Q folytonosan differenciálhatók és

$$D_1P(x,y) = 2y = D_2Q(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

így az egyenlet egzakt, továbbá $(x_0, y_0) = (0,0)$ választással $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re

$$F(x,y) = \int_0^x 0\ dx + \int_0^y (x^2 - y^2)\ dy = \left[x^2y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=y} = x^2y - \frac{y^3}{3}\ ,$$

ezért $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \iff$ megoldás, ha $\exists\ c \in \mathbb{R}$, hogy

$$x^2y - \frac{y^3}{3} = c \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

s ez egy görbesereg $\mathbb{R}^2$-ben.

d) $P(x,y) = e^{-y}$, $Q(x,y) = -(2y + xe^{-y})$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$, P és Q folytonosan differenciálhatók,

$$D_2P(x) = -e^{-y} = D_1Q(x,y) \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

így az egyenlet egzakt és $(x_0, y_0) = (0,0)$ választással

$$F(x,y) = \int_0^x e^{-0}\ dx - \int_0^y (2y + xe^{-y})\ dy = x - \left[y^2 - xe^{-y}\right]_{y=0}^{y=y} =$$
$$= x - (y^2 - xe^{-y} - 0 + x) = -y^2 + xe^{-y}\ .$$

$y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \iff$ megoldása egyenletünknek, ha $\exists\ c$, hogy

$$-y^2 + xe^{-y} = c \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

ami egy görbesereg $\mathbb{R}^2$-ben.

F) Integráló szorzó keresése

Ha y teljesíti (E1)-et (illetve (E2)-t) és $\exists\ \mu\colon D \to \mathbb{R}$ ($\mu \neq 0$), hogy a

$$\mu(x,y)P(x,y)\ dx + \mu(x,y)Q(x,y)\ dy = 0$$

egyenlet egzakt, akkor μ-t (E1) (illetve (E2)) integráló szorzójának nevezzük. Ha $\dfrac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y}$ az ω függvénye, akkor

$$\mu(\omega) = \exp \int \frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y}(\omega)\ d\omega$$

integráló szorzó, ahogy ezt a Kalkulus II. jegyzetben beláttuk.

8.6. feladat. Keressen integráló szorzót az alábbi differenciálegyenleteknél, majd adja meg megoldásukat:

a) $(x^2 + y^2 + x)\ dx + y\ dy = 0;$

b) $xy = (y^3 + x^2y + x^2)y';$

c) $(2x^2y^2 + y)\ dx + (x^3y - x)\ dy = 0.$

Megoldás.

a) A

$$P(x,y) = x^2 + y^2 + x, \quad Q(x,y) = y$$

függvények $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re értelmezettek

$$\exists\ P_y(x,y) = 2y \neq 0 = Q_x \implies P_y - Q_x = 2y$$

$y = 0$ nem megoldás, így feltehető, hogy $y > 0$, vagy $y < 0$.
Nézzük meg, hogy létezik-e x-től függő integráló szorzó.
Ha $\omega(x,y) = x$, akkor $\omega_x = 1,\ \omega_y = 0$, így

$$Q\omega_x - P\omega_y = y$$

és így

$$\frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y} = \frac{2y}{y} = 1,$$

ami tekinthető úgy, hogy x-től függő, ezért

$$\mu(x) = \exp \int 2\ dx = e^{2x} \neq 0$$

integráló szorzója az egyenletnek, melyből az ezzel való szorzás után kapott

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)\ dx + e^{2x}y\ dy = 0$$

egyenlet valóban egzakt és ekvivalens az eredetivel, ha $y > 0$ vagy $y < 0$. Tekintsük azt az $y > 0$ vagy $y < 0$ félsíkokon (ezek téglalpok).
Legyen $(x_0, y_0) = (0, 1)$, úgy $f = (P, Q)$ F primitív függvénye:

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_0^x e^{2x}(x^2+x+1)\ dx + \int_1^y e^{2x} y\ dy = \\
&= \left[\frac{e^{2x}}{2}(x^2+x+1)\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{2x}}{2}(2x+1)\ dx + e^{2x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^y = \\
&= \frac{e^{2x}}{2}(x^2+x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}(2x+1)\right]_0^x + \\
&+ \int_0^x e^{2x}\ dx + e^{2x}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \\
&= \frac{e^{2x}}{2}(x^2+x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{2}(2x+1) + \frac{1}{4} + \\
&+ \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{e^{2x}}{2}(y^2-1) = \frac{e^{2x}}{2}(x^2+y^2-1) - \frac{3}{4}\ .
\end{aligned}$$

Ezért $y \iff$ megoldása egyenletünknek, ha $\exists\ c \in \mathbb{R}$, hogy

$$e^{2x}(x^2+y^2-1) = c \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

ami egy görbesereg $\mathbb{R}^2_+$-ben.
Az $y < 0$ félsíkba eső görbesereg hasonlóan adódik, mondjuk $(x_0, y_0) = (0, -1)$ választással, az előbbivel egyező alakban.

b) Az egyenlettel ekvivalens az

$$xy - (y^3 + x^2 y + x^2)y' = 0$$

egyenlet, mely (E1) alakú, továbbá $y = 0$ nyilván megoldás, így keressük az $y > 0$ illetve $y < 0$ félsíkokban a megoldásgörbéket.

$$P_y = x,\ Q_x = -2xy - 2x \implies P_y - Q_x = 3x + 2xy.$$

Keressünk most y-tól függő integráló szorzót, azaz legyen $\omega(x,y) = y$, akkor $\omega_x = 0,\ \omega_y = 1,\ Q\omega_x - P\omega_y = -xy$, ezért

$$\frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y} = \frac{3x + 2xy}{-xy} = -2 - \frac{3}{y}\ ,$$

azaz csak y-tól függ, ami adja, hogy

$$\mu(y) = \exp \int \left(-2 - \frac{3}{y}\right)\, dy = \frac{e^{-2y}}{y^3} \neq 0 \quad (y \neq 0)$$

integráló szorzó.
Valóban, egyszerűen ellenőrízhető, hogy az eredetivel ekvivalens

$$\frac{x}{y^2} e^{-2y}\, dx - \left(1 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^3}\right) e^{-2y} = 0$$

egyenlet egzakt. Tekintsük ezt az $y > 0$, majd $y < 0$ félsíkokon (téglalapokon).
Az $y > 0$ félsíkban legyen $(x_0, y_0) = (0, 1)$, úgy

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^x \frac{x}{y^2} e^{-2y}\, dx - \int_1^y e^{-2y}\, dy = \\ &= \left[\frac{x^2}{2y^2} e^{-2y}\right]_{x=0}^{x=x} + \left[\frac{e^{-2y}}{2}\right]_1^y = \\ &= \frac{x^2}{2y^2} e^{-2y} + \frac{1}{2} e^{-2y} - \frac{e^{-2}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) e^{-2y} - \frac{e^{-2}}{2}\ , \end{aligned}$$

és ezért $y > 0 \iff$ megoldása az új és az eredeti egyenletnek is, ha $\exists\, c \in \mathbb{R}$, hogy

$$\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) e^{-2y} = c \qquad (x \in \mathbb{R},\ y > 0),$$

ami egy görbesereg az $y > 0$ félsíkban.
Az $y < 0$ félsíkban a megoldásgörbék alakja az előbbi (de $x \in \mathbb{R},\ y < 0$).
Jeleztük, hogy az eredeti egyenletnek $y \equiv 0$ is megoldása.

c) Tekintsük a

$$(2x^2y^2 + y)\, dx + (x^3y - x)\, dy = 0$$

egyenletet az első síknegyedben, azaz $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ esetén, ami egy végtelen téglalap.

$$\exists\, P_y = 4x^2y + 1 \text{ és } Q_x = 3x^2y - 1 \implies P_y - Q_x = x^2y + 2$$

x-től vagy y-tól függő integráló szorzót nem találnánk.
Próbáljunk meg xy-tól függőt keresni, azaz legyen
$\omega(x, y) = xy$, akkor $\omega_x = y,\ \omega_y = x \implies$

$$\begin{aligned} Q\omega_x - P\omega_y &= (x^3y - x)y - (2x^2y^2 + y)x = x^3y^2 - xy - 2x^3y^2 - xy = \\ &= -x^3y^2 - 2xy = -xy(x^2y + 2). \end{aligned}$$

Ezért

$$\frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y} = \frac{x^2y+2}{-xy(x^2y+2)} = -\frac{1}{xy}\ ,$$

azaz xy függvénye, így

$$\mu = \mu(xy) = \exp\int -\frac{1}{xy}\ d(x,y) = \frac{1}{xy} \neq 0$$

integráló szorzó, mert az eredeti egyenletet $\frac{1}{xy}$-nal szorozva kapott

$$\left(2xy + \frac{1}{x}\right)\ dx + \left(x^2 - \frac{1}{y}\right)\ dy = 0$$

egyenlet (egyszerűen ellenőrízhető) egzakt és ekvivalens az eredeti egyenlettel.
Az utóbbiból $(x_0, y_0) = (1,1)$ mellett

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_1^x \left(2xy + \frac{1}{x}\right)\ dx + \int_1^y \left(1 - \frac{1}{y}\right)\ dy = \\ &= \left[x^2y + \ln x\right]_{x=1}^{x=x} + \left[y - \ln y\right]_1^y = \\ &= x^2y + \ln x - y + y - \ln y - 1 = x^2y + \ln\frac{x}{y} - 1 \quad (x,y>0). \end{aligned}$$

Ezért $y > 0 \iff$ megoldása egyenletünknek, ha $\exists\ c \in \mathbb{R}$, hogy

$$x^2y + \ln\frac{x}{y} = c \qquad (x,y>0),$$

ez egy görbesereg $\mathbb{R}^2_+$-ben.
Vizsgálható a megoldás a többi síknegyedben is.
A megoldásokat összefoglalva az

$$x^2y + \ln\left|\frac{x}{y}\right| = c$$

görbesereg adódik és $y \equiv 0$ is megoldás.

2. Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek

A) Magasabbrendű lineáris homogén differenciálegyenletek

8.7. feladat. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását:

a) $y'' \sin x \cos x - y' = 0;$

b) $y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)y = 0,$ ha $y_1(x) = \operatorname{tg} x$ ismert;

c) $y'' - \dfrac{2x}{1+x^2} y' + \dfrac{2}{1+x^2} y = 0.$

Megoldás.

a) Az

$$y'' \sin x \cos x - y' = 0$$

egyenlet a $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon ekvivalens az

$$y'' - \frac{1}{\sin x \cos x} y' = 0 \qquad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

egyenlettel. Ennek az $y\colon \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ függvény $\Longleftrightarrow$ megoldása, ha az $u\colon \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R},\ u(x) = y'(x)$ teljesíti az

$$u' = \frac{1}{\sin x \cos x} u \qquad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

szeparábilis egyenletet, melynek $u \neq 0 \Longleftrightarrow$ megoldása $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$-n, ha

$$(*) \qquad \int \frac{1}{u}\, du = \int \frac{1}{\sin x \cos x}\, dx$$

teljesül.

$$\int \frac{1}{u}\, du = \begin{cases} \ln u + \ln c_1 & (u > 0) \\ \ln(-u) + \ln c_2 & (u < 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x \cos x}\, dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}\, dx = \\ &= -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \\ &= -\ln \cos x + \ln \sin x + \ln c_3 = \ln(c_3 \operatorname{tg} x) \quad (c_3 > 0). \end{aligned}$$

Ezek adják, hogy

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{c_3}{c_1} \operatorname{tg} x = d_1 \operatorname{tg} x & (d_1 > 0), \text{ ha } u > 0 \\ -\dfrac{c_3}{c_1} \operatorname{tg} x = d_2 \operatorname{tg} x & (d_2 < 0), \text{ ha } u < 0 \end{cases}$$

$u \equiv 0$ szintén megoldás, így $(*)$ általános megoldása

$$u(x) = c \operatorname{tg} x \qquad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right), \ c \in \mathbb{R}.$$

Ebből jön, hogy

$$y(x) = c \int \operatorname{tg} x \ dx = -c \int \frac{-\sin x}{\cos x} \ dx = e_1 \ln \cos x + e_2.$$

b) A Kalkulus II. jegyzet tartalmazza Liouville következő eredményét:
Ha y_1, y_2 megoldásai az

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x) = 0$$

másodrendű lineáris homogén egyenletnek egy I intervallumon, akkor

$$\text{(L)} \qquad W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(x_0) \exp\left[-\int_{x_0}^{x} a_1(t) \ dt\right]$$

teljesül, ahol $x_0 \in I$ rögzített. Ebből – feltéve, hogy $y_1 \neq 0$ egy adott megoldás – kapjuk $\forall$ y_2 megoldásra az

$$y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = W(x_0) \exp\left[-\int_{x_0}^{x} a_1(t) \ dt\right]$$

egyenletet, mely $y_1 \neq 0$ miatt ekvivalens az

$$\frac{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)}{y_1^2(x)} = \frac{1}{y_1^2(x)} W(x_0) \exp\left[-\int_{x_0}^{x} a_1(t) \ dt\right]$$

illetve

$$(*) \qquad \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{1}{y_1^2(x)} W(x_0) \exp\left[-\int_{x_0}^{x} a_1(t) \ dt\right]$$

egyenlettel.
Az $y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)y = 0$ egyenletnél $y_1(x) = \operatorname{tg} x \neq 0$, ha

$x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $a_1(x) = 0$, így $(*)$-ból

$$\left(\frac{y_2}{\operatorname{tg} x}\right)' = W(x_0)\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \quad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

következik, azaz $\frac{y_2(x)}{\operatorname{tg} x}$ primitív függvénye $W(x_0)\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$ függvénynek, ezért

$$\begin{aligned}\frac{y_2(x)}{\operatorname{tg} x} &= W(x_0)\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\,dx = W(x_0)\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)\,dx = \\ &= -W(x_0)[\operatorname{ctg} x + x]_{x_0}^{x} = \\ &= -W(x_0)[\operatorname{ctg} x + x] + W(x_0)[\operatorname{ctg} x_0 + x_0].\end{aligned}$$

Így egyenletünk általános megoldása

$$\begin{aligned}y_2(x) &= -W(x_0)[1 + x\operatorname{tg} x] + W(x_0)[\operatorname{ctg}(x_0) + x_0]\operatorname{tg} x = \\ &= c_1(1 + x\operatorname{tg} x) + c_2 \operatorname{tg} x.\end{aligned}$$

Ellenőrzésül lássuk be, hogy $y_1 = 1 + x\operatorname{tg} x$ és $y_2 = \operatorname{tg} x$ lineáris független megoldásai egyenletünknek.

c) Keressük y_1-et $y_1(x) = x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ alakban, de próbáljuk ki, hogy $y_1(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ megoldás-e?
Azonnal látjuk, hogy igen.
Tekintsük az

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = 0$$

egyenletet az $x > 0$ félsíkban.
Ekkor $y_1(x) = x$ $(x > 0)$ és $a_1(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$ miatt $(*)$ adja, hogy $\forall\, y_2\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ megoldása egyenletünknek teljesíti, hogy

$$\begin{aligned}\left(\frac{y_2(x)}{x}\right)' &= W(x_0)\frac{1}{x^2}\exp\left[\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx\right] = \\ &= W(x_0)\frac{1}{x^2}(1+x^2) = W(x_0)\left(\frac{1}{x^2} + 1\right),\end{aligned}$$

amiből következik, hogy

$$\frac{y_2(x)}{x} = \int_{x_0}^{x} W(x_0)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\,dx = W(x_0)\left[x-\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{x} =$$

$$= W(x_0)\left(x-\frac{1}{x}\right) - W(x_0)\left(x_0-\frac{1}{x_0}\right) \qquad (x\in\mathbb{R}_+)\,,$$

azaz

$$y_2(x) = W(x_0)(x^2-1) + W(x_0)\left(\frac{1}{x_0}-x_0\right)x =$$

$$= c_1(x^2-1)+c_2x \quad (x>0)$$

egyenletünk tetszőleges megoldása.

Megjegyzés.

$$\begin{vmatrix} x^2-1 & x \\ (x^2-1)' & x' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2-1 & x \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = x^2-1-2x^2 = -(x^2+1) \neq 0$$

miatt x^2-1 és x lineáris független megoldásai egyenletünknek, ami szintén adja, hogy y_2 az általános megoldás.

8.8. feladat. Adja meg az alábbi konstansegyütthatós lineáris homogén differenciálegyenletek általános megoldását:

a) $y''-2y'=0$; b) $y''+y'-2y=0$; c) $y''+4y=0$;

d) $y''-4y'+5y=0$; e) $y'''-8y=0$; f) $y^{(5)}-6y^{(4)}+9y^{(3)}=0$.

Megoldás. Használjuk a Kalkulus II. VIII. 5. b) fejezet tételét, megadva előbb a karakterisztikus egyenlet gyökeit, majd az alaprendszert (esetleg ellenőrízzük, hogy valóban alaprendszer-e), majd az általános megoldást az alaprendszer függvényeinek lineáris kombinációjaként.

a) Az $y''-2y'=0$ egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2-2\lambda = \lambda(\lambda-2)=0,$$

így gyökei: $\lambda_1=0,\ \lambda_2=2$.

Az $y_1=e^{0\cdot x}=1, y_2=e^{2x}$ függvények

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^{2x} \\ 0 & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{2x} \neq 0 \quad (x\in\mathbb{R})$$

miatt az egyenlet alaprendszerét alkotják, mert lineárisan függetlenek és (ahogy az egyszerűen ellenőrízhető) megoldásai annak.

Így az általános megoldás:

$$y = c_1 + c_2e^{2x} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

b) $y'' + y' - 2y = 0$ karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

melynek gyökei

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = \lambda^2 - 1 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$$

miatt $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$, alaprendszere $y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-2x}$.
y_1 és y_2 lineárisan függetlenek, mert

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-x} - e^{-x} = -3e^{-x} \neq 0$$

és $y_1,\ y_2$ megoldásai az egyenletnek. Így az általános megoldás:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

c) $y'' + 4y = 0$ karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \iff \lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i,$$

azaz gyökei $2i$ és $-2i$, így $\alpha = 0,\ \beta = 2$, ezért az alaprendszere:
$y_1 = \cos 2x,\ y_2 = \sin 2x$. Ezek valóban megoldások és

$$\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2 \neq 0$$

miatt lineárisan függetlenek.
Az általános megoldás tehát:

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

d) $y'' - 4y' + 5y = 0$ karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0,$$

melynek gyökei

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i,$$

így $\lambda = 2,\ \beta = 1$ és az alaprendszer:

$$y_1 = e^{2x}\cos x, \quad y_2 = e^{2x}\sin x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezek valóban megoldások és

$$\begin{vmatrix} e^{2x}\cos x & e^{2x}\sin x \\ 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x & 2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x \end{vmatrix} =$$
$$= e^{4x}(2\sin x\cos x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x + \sin^2 x) =$$
$$= e^{4x} \neq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

miatt lineárisan függetlenek.
Az általános megoldás:

$$y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

e) $y''' - 8y = 0$ karakterisztikus egyenlete: $\lambda^3 - 8 = 0$, melynek $\lambda = 3$ háromszoros gyöke, így az alaprendszere:

$$y_1 = e^{3x},\ y_2 = xe^{3x},\ y_3 = x^2e^{3x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(Ellenőrízzük, hogy ezek megoldások-e és lineárisan függetlenek-e?)
Az általános megoldás:

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{3x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

f) $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y^{(3)} = 0$ karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = (\lambda^3(\lambda^2 - 6\lambda + 9)) = \lambda^3(\lambda - 2)^2 = 0,$$

melynek $\lambda_1 = 0$ háromszoros, $\lambda_2 = 2$ kétszeres gyöke.
Így alaprendszere:

$$y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2,\ y_4 = e^{2x},\ y_5 = xe^{2x},$$

míg általános megoldása:

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + (c_4 + c_5x)e^{2x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

B) Magasabbrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek

8.9. feladat. Adja meg az alábbi lineáris inhomogén differenciálegyenletek megoldását:

a) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$; b) $y'' - y = 2e^x - x^2$;

c) $y'' - 3y' + 2y = \sin x$; d) $(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2$.

Megoldás. Az $a_i, b : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ (esetleg konstans) folytonos függvényekkel tekintett

$$\text{(IHnD)} \qquad y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)y^{(n-i)} = b(x)$$

n-edrendű lineáris inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) \qquad (x \in \langle a, b\rangle)$$

alakban áll elő, ahol y_p (IHnD) egy partikuláris megoldása, y_H pedig az (IHnD)-ből $b(x) = 0$-val kapott (HnD) általános megoldása, azaz

$$y_H(x) = c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x) \qquad (x \in \langle a, b\rangle),$$

ahol $y_1, \dots, y_n$ a (HnD) alaprendszere.
Megmutattuk, hogy

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x) \qquad (x \in \langle a, b\rangle)$$

megoldása (IHnD)-nek, ha a $c_1'(x), \dots, c_n'(x)$ megoldásai a

$$\text{(C)} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)y_i^{(j)}(x) = 0 \ (j = 0, 1, \dots, n-2), \quad \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) = b(x)$$

egyenletrendszernek. Ez a konstansvariálás módszere.

a) Az

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \qquad (x \in]0, \pi[\,)$$

egyenlethez tartozó homogén egyenlet: $y'' + y = 0$ (konstansegyütthatós) karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 + 1 = 0$, így $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$, így alaprendszere $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, általános megoldása pedig

$$y_H(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \qquad (x \in]0, \pi[\,).$$

Keressük y_p-t

$$y_p(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x \qquad (x \in]0, \pi[\,)$$

alakban. A fent mondottak szerint ez megoldása lesz az inhomogén egyenletünknek, ha

$$c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0$$
$$c_1'(x)(-\sin x) + c_2'(x) \cos x = \frac{1}{\sin x}\ ,$$

ami egy lineáris egyenletrendszer c_1' és c_2'-re, a rendszer determinánsa:

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

s ekkor (a Cramer-szabály szerint):

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix}}{1} = -1 \implies c_1(x) = -x,$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix}}{1} = \frac{\cos x}{\sin x} \implies c_2(x) = \ln(\sin x) \quad (x \in]0, \pi[\,).$$

Ezért

$$y_p(x) = -x \cos x + \sin x \ln(\sin x) \qquad (x \in]0, \pi[\,),$$

s végül az általános megoldás:

$$y = (c_1 - x)\cos x + (c_2 + \ln(\sin x))\sin x \qquad (x \in]0, \pi[\,).$$

b) Az

$$y'' - y = 2e^x - x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlethez tartozó homogén egyenlet: $y'' - y = 0$, annak karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 - 1 = 0$, ennek megoldása $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$, így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

$$y_p(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

megoldása az inhomogén egyenletnek, ha

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0$$

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)(-e^{-x}) = 2e^x - x^2$$

teljesül. Ennek determinánsa:

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0,$$

így (a Cramer-szabály szerint):

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ 2e^x - x^2 & -e^{-x} \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2 + x^2 e^{-x}}{-2} = 1 - \frac{x^2}{2}e^{-x}\ .$$

Ebből (a parciális integrálás módszerét is használva):

$$c_1(x) = x + \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

következik;

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 2e^x - x^2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2e^{2x} - x^2 e^x}{-2} = -e^{-2x} + \frac{x^2}{2}e^x\ ,$$

amiből (rövid számolással):

$$c_2(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right)e^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

következik.

Így

$$y_p(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^x + x^2 + 2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Az általános megoldás:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \left(x - \frac{1}{2}\right) e^x + x^2 + 2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

c) Az

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x$$

inhomogén egyenlethez tartozó homogén egyenlet: $y'' - 3y' + 2y = 0$, melynek karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, ennek megoldása: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$, így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

$$y_p(x) = c_1(x) e^x + c_2(x) e^{2x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

megoldása az inhomogén egyenletnek, ha

$$c_1'(x) e^x + c_2'(x) e^{2x} = 0$$

$$c_1'(x) e^x + c_2'(x) 2e^{2x} = \sin x$$

teljesül. Ennek megoldását az előbbiekhez hasonló számolással kapjuk:

$$c_1'(x) = -e^{-x} \sin x \implies c_1(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) e^{-x}\ ;$$

$$c_2'(x) = e^{-2x} \sin x \implies c_2(x) = -\frac{1}{5}(\cos x + 2\sin x) e^{-2x}\ .$$

Ezért

$$y_p(x) = \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ami $y_H(x)$-szel együtt adja az inhomogén egyenlet általános megoldását:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

d) A

$$(3x^3 + x) y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}_+)$$

másodrendű lineáris inhomogén (nem konstansegyütthatós) egyenletben az együtthatók és a jobboldal polinomok. Konkrét alakjuk azt "sugallja", hogy létezhet elsőfokú polinom megoldása:

$$y_p(x) = ax + b \qquad (x \in \mathbb{R}_+),$$

akkor $y_p'(x) = a,\ y_p''(x) = 0$. Ezeket az egyenletbe helyettesítve:

$$2a - 6x(ax + b) = 4 - 12x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}_+),$$

azaz

$$2a - 6bx - 6ax^2 = 4 - 12x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}_+),$$

ami $\Longleftrightarrow$ teljesül, ha $a = 2,\ b = 0$, ezért

$$y_p(x) = 2x \qquad (x \in \mathbb{R}_+)$$

megoldása az inhomogén egyenletnek.
Ha megtaláljuk a

$$(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}_+)$$

homogén egyenlet alaprendszerét, akkor y_H-t is meghatározhatjuk.
Ismét az együtthatókat "bűvölve", másodfokú megoldásra gondolunk:

$$y_1(x) = ax^2 + bx + c \ (x \in \mathbb{R}_+),$$

akkor

$$y_1'(x) = 2ax + b, \quad y_1''(x) = 2a \qquad (x \in \mathbb{R}_+),$$

s ezeket a homogén egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $a = c = 1$, $b = 0$, azaz

$$y_1(x) = x^2 + 1 \qquad (x \in \mathbb{R}_+)$$

megoldás.
Végül

$$y_2(x) = x^\alpha \ (x \in \mathbb{R}_+)$$

alakú megoldást keresve kapjuk, hogy

$$y_2(x) = \frac{1}{x} \qquad (x \in \mathbb{R}_+)$$

is megoldása a homogén egyenletnek. Ezek lineárisan függetlenek, mert

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2+1 & \frac{1}{x} \\ 2x & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -1 - \frac{1}{x^2} - 2 =$$

$$= -\left(3 + \frac{1}{x^2}\right) \neq 0 \qquad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Így

$$y_1(x) = x^2 + 1, \quad y_2(x) = \frac{1}{x} \qquad (x \in \mathbb{R}_+)$$

alaprendszere a homogén egyenletnek, tehát általános megoldása:

$$y_H(x) = c_1(x^2 + 1) + c_2\frac{1}{x} \qquad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása pedig:

$$y(x) = c_1(x^2 + 1) + c_2\frac{1}{x} + 2x \qquad (x \in \mathbb{R}_+).$$

C) Cauchy-feladatok magasabbrendű egyenletekre

8.10. feladat. Adjuk meg az alábbi Cauchy-feladatok megoldását:

a) $y''' - y' = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1;$
b) $y'' + y = 4e^x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -3.$

Megoldás.

a) A Cauchy-feladat differenciálegyenlete, az $y''' - y' = 0$ homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete $\lambda^3 - \lambda = 0$, melynek gyökei $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, így általános megoldása:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ebből:

$$y'(x) = c_2 e^x - c_3 e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
$$y''(x) = c_2 e^x + c_3 e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

következik.
Az $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$ kezdeti feltételek adják a

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= y(0) = 3 \\ c_2 - c_3 &= y'(0) = -1 \\ c_2 + c_3 &= y''(0) = 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert, melynek megoldása: $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, $c_1 = 2$, így a Cauchy-feladat megoldása:

$$y(x) = 2 + e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

b) Az

$$y'' + y = 4e^x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -3$$

Cauchy-feladat differenciálegyenlete másodrendű lineáris inhomogén.
A hozzá tartozó homogén egyenlet: $y'' + y = 0$, karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 + 1 = 0$, ennek gyökei: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$, így

$$y_H(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
$$y_p(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

megoldása lesz az inhomogén egyenletnek, ha

$$c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0$$
$$c_1'(x)(-\sin x) + c_2'(x) \cos x = 4e^x$$

teljesül. Egyszerű számolással kapjuk, hogy:

$$c_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ 4e^x & \cos x \end{vmatrix} = -4e^x \sin x \implies c_1(x) = 2(\cos x - \sin x)e^x \ ,$$

$$c_2'(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 4e^x \end{vmatrix} = 4e^x \cos x \implies c_2(x) = 2(\cos x + \sin x)e^x \ .$$

Ebből következik, hogy

$$y_p(x) = 2e^x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2e^x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A kezdeti feltételeket és $y'(x) = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + 2e^x$-et felhasználva

$$c_1 + c_2 \cdot 0 + 2 = y(0) = 4$$
$$c_1 \cdot 0 + c_2 + 2 = y'(0) = -3$$

következik, ami adja, hogy $c_1 = 2,\ c_2 = -5$.
Így a Cauchy-feladat megoldása:

$$y(x) = 2\cos x - 5\sin x + 2e^x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

D) Differenciálegyenlet-rendszerek

8.11. feladat. Határozza meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszerek megoldását:

$$\text{a)} \begin{cases} y_1' - y_1 + y_2 = 0 \\ y_2' + 4y_1 - y_2 = 0 \end{cases} ; \qquad \text{b)} \begin{cases} y_1' - y_2 = e^x \\ y_2' - y_1 = x^2 \end{cases}$$

Megoldás. Az egyenletrendszerek megoldását visszavezetjük másodrendű lineáris differenciálegyenletek megoldására. Az egyenletek adják, hogy y_1 és y_2 kétszer (sőt akárhányszor) differenciálhatók.
a) Az

$$y_1' - y_1 + y_2 = 0$$
$$y_2' + 4y_1 - y_2 = 0$$

egyenletrendszer első egyenletét differenciálva kapjuk, hogy

$$(*) \qquad y_1'' - y_1' - y_2' = 0.$$

Másrészt az egyenletrendszer első egyenletéből

$$y_2 = y_1 - y_1',$$

a másodikból (ezt is felhasználva)

$$y_2' = y_2 - 4y_1 = y_1 - y_1' - 4y_1 = -y_1' - 3y_1$$

következik, melyet $(*)$-ba helyettesítve kapjuk, hogy y_1 teljesíti az

$$y_1'' + 3y_1 = 0$$

egyenletet. Ennek karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 + 3 = 0$, megoldása $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}i$, így általános megoldása

$$y_1(x) = c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ebből

$$y_1'(x) = -c_1\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x + c_2\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$\begin{aligned} y_2(x) = y_1(x) - y_1'(x) = (c_1 - c_2\sqrt{3})\cos\sqrt{3}x + \\ + (c_2 + c_1\sqrt{3})\sin\sqrt{3}x \qquad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Ellenőrízhető, hogy a kapott y_1 és y_2 függvények megoldásai az egyenletrendszernek.

b) Az

$$\begin{aligned} y_1' - y_2 &= e^x \\ y_2' - y_1 &= x^2 \end{aligned}$$

egyenletrendszer első egyenletét differenciálva $y_1'' - y_2' = e^x$ adódik, melybe a második egyenletből kifejezett $y_2' = y_1 + x^2$-et behelyettesítve kapjuk az

$$(*) \qquad y_1'' - y_1 = x^2 + e^x$$

másodrendű lineáris inhomogén egyenletet y_1-re.
Ennek homogén egyenlete: $y_1'' - y_1 = 0$, a karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 - 1 = 0$, annak megoldása pedig $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, így

$$y_{1H}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

$$y_{1p}(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

megoldása $(*)$-nak, ha

$$\begin{aligned} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} &= 0 \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)(-e^{-x}) &= x^2 + e^x \end{aligned}$$

teljesül, ami egy lineáris inhomogén egyenletrendszer c_1', c_2'-re.
A rendszer determinánsa:

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2.$$

Egyszerű számolás adja, hogy:

$$c_1'(x) = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}e^{-x} \implies c_1(x) = \frac{1}{2}x - \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)e^{-x} ,$$

$$c_2'(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{x^2}{2}e^{x} \implies c_2(x) = -\frac{1}{4}e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right)e^{x} .$$

Ezért

$$y_{1p}(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x - x^2 - 2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így

$$y_1(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x - x^2 - 2.$$

Ebből

$$y_1'(x) = c_1e^x - c_2e^{-x} + \frac{1}{2}e^x + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x - 2x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Végül

$$y_2(x) = y_1'(x) - e^x = c_1e^x - c_2e^{-x} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^x - 2x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ellenőrízhető, hogy y_1 és y_2 valóban megoldásai az egyenletrendszernek.

Gyakorló feladatok

1) Oldja meg az alábbi szeparábilis differenciálegyenleteket, illetve a rájuk vonatkozó Cauchy-feladatokat:

   a) $y' = 3\sqrt[3]{y^2},\ y(1) = 0;$ b) $y' - xy^2 = 2xy;$

   c) $y' = y\cos x;$ d) $y' = (1 + y^2)\ln x,\ y(1) = 0.$

2) Adja meg az alábbi lineáris differenciálegyenletek megoldását:

   a) $xy' - 2y = 2x^4;$ b) $x^2y' + xy + 1 = 0;$

   c) $y' = 2x(x^2 + y);$ d) $xy' + 2y = \sin x.$

3) Határozza meg a következő egzakt egyenletek megoldását:

a) $\dfrac{x-y}{(x+y)^3} + \dfrac{2x}{(x+y)^3}y' = 0;$ b) $\dfrac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0.$

4) A korábbiakra vezessük vissza az alábbi egyenletek megoldását:

a) $y^2 - 2xy + x^2y' = 0;$ b) $2x^3y' = y(2x^2 - y^2);$

c) $y^2 + x^2y' = xyy';$ d) $xy' - y = x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x};$

e) $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0;$ f) $2x - 4y + 6 + (x + y - 3)y' = 0;$

g) $xy^2(xy' + y) = 1;$ h) $\left(y - \dfrac{1}{x}\right)\,dx + \dfrac{1}{y}\,dy = 0.$

5) Oldja meg az alábbi lineáris homogén (konstansegyütthatós) differenciálegyenleteket:

a) $y'' + 4y' + 3y = 0;$ b) $y'' + 2y' + 10y = 0;$

c) $y^{(4)} - y = 0;$ d) $y'' - 2y' + y = 0;$

e) $y^{(5)} - 10y^{(3)} + 9y' = 0;$ f) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

6) Oldja meg az alábbi lineáris inhomogén (konstansegyütthatós) differenciálegyenleteket:

a) $y'' + y = 4xe^x;$ b) $y'' + y' - 2y = 3xe^x;$

c) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x};$ d) $y'' - 3y' + 2y = \cos x;$

e) $y'' + 4y' + 3y = \operatorname{ch} x;$ f) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

7) Határozza meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását:

a) $x(x-1)y'' - xy' + y = 0;$

b) $xy'' + 2y' - xy = 0;$

c) $xy''' - y'' - xy' + y = 0,$ ha $y_1(x) = x,\ y_2(x) = e^x;$

d) $(2x+1)y'' + (2x-1)y' - 2y = x^2 + x;$

e) $(x+1)xy'' + (x+2)y' - y = x + \dfrac{1}{x}$.

8) Határozza meg az alábbi Cauchy-feladatok megoldását:

a) $y'' - 2y' + y = 0,\ y(2) = 1,\ y'(2) = -2;$

b) $y'' - 2y' = 2e^x,\ y(1) = -1,\ y'(1) = 0.$

9) Adja meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszerek megoldását:

a) $\begin{cases} y_1' + y_1 - 8y_2 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} y_1' - y_1 + y_2 - y_3 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 + y_3 = 0 \\ y_3' - 2y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y_1' - y_2 = -5\cos x \\ y_2' - 2y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} y_1' - 5y_1 + 3y_2 = 2e^{3x} \\ y_2' - y_1 - y_2 = 5e^{-x} \end{cases}$